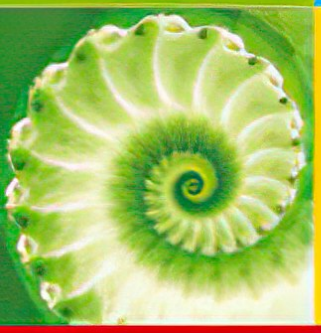
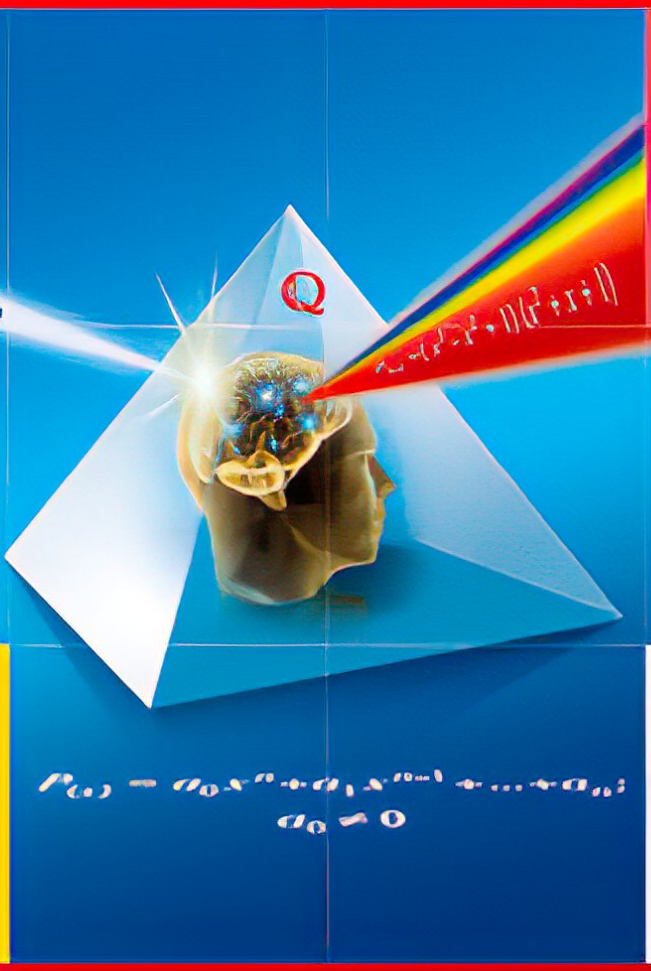
Colección Ciencias y Humanidades

Álgebra

TOMO

I



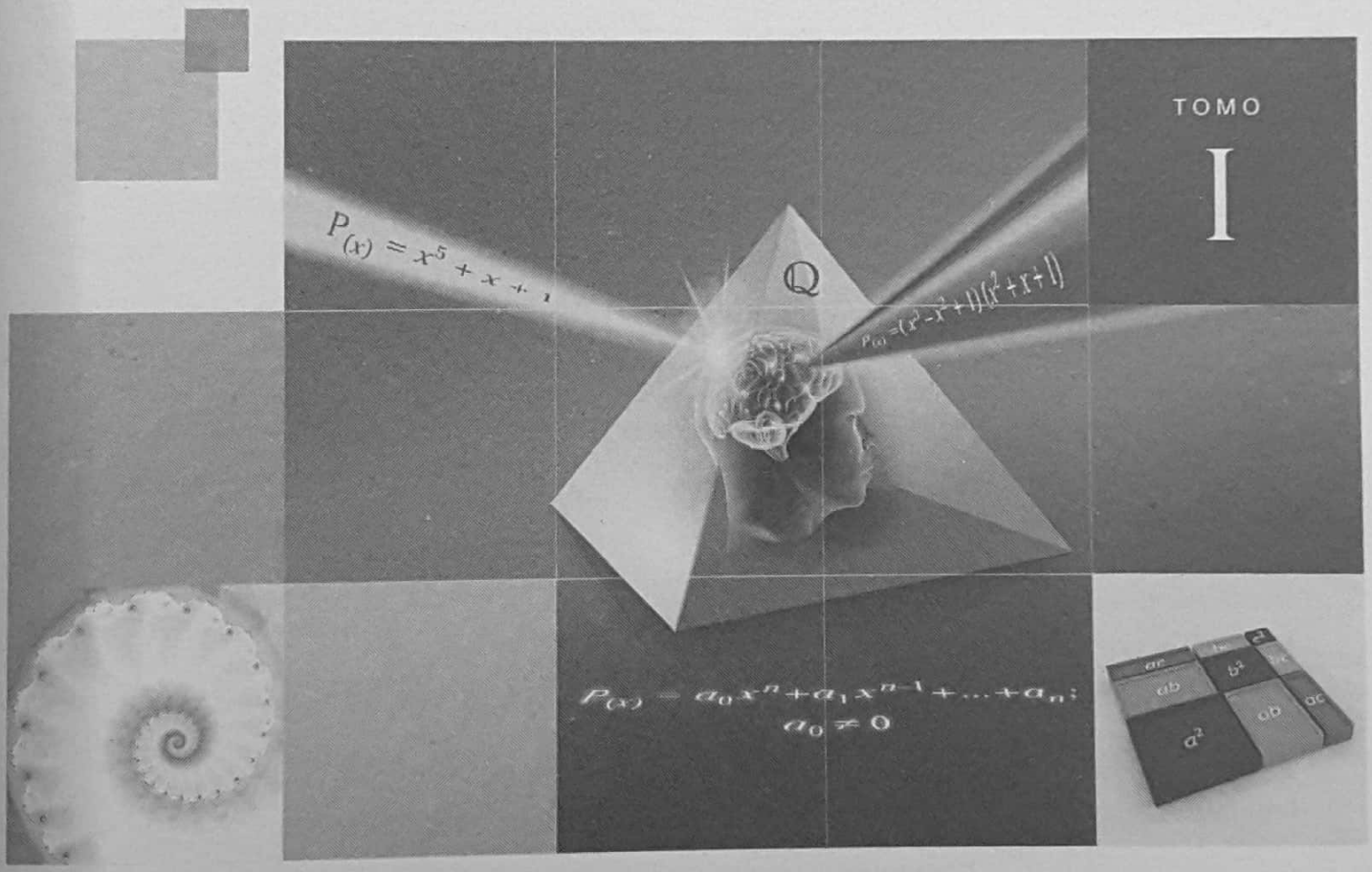


Lumbreras Editores

Asociación Fondo de Investigadores y Editores

Álgebra

Um presente do Coelho à família Eureka!



Lumbreras Editores

BIBLIOTECA NACIONAL DEL PERÚ
Centro Bibliográfico Nacional

512.0076 Asociación Fondo de Investigadores y Editores (Lima)
A1 Álgebra / [Asociación Fondo de Investigadores y Editores].– 2a ed.,
2016 5a reimpr.-- Lima : Lumbreras Editores, 2016 (Lima: Talls. Gráfs. de la Asociación Fondo de Investigadores y Editores).
2 t. ; 22 cm.– (Ciencias y humanidades)

Incluye bibliografías.

D.L. 2016-10789
ISBN 978-612-307-366-4 (t.1)

1. Álgebra - Problemas, ejercicios, etc. 2. Álgebra - Estudio y enseñanza
I. Título II. Serie

BNP: 2016-226

***Álgebra.* Tomo I**

Autor: Asociación Fondo de Investigadores y Editores
© **Titular de la obra:** Asociación Fondo de Investigadores y Editores
Editor: Asociación Fondo de Investigadores y Editores
Diseño y diagramación: Asociación Fondo de Investigadores y Editores

© **Asociación Fondo de Investigadores y Editores**
Av. Alfonso Ugarte N.° 1426 - Breña. Lima-Perú. Telefax: 332-3786
Para su sello editorial **Lumbreras Editores**
Página web: www.elumbreras.com.pe
Primera edición: marzo de 2011
Segunda edición: septiembre de 2013
Primera reimpresión: septiembre de 2013
Cuarta reimpresión: agosto de 2015
Quinta reimpresión: septiembre de 2016
Tiraje: 4000 ejemplares
ISBN: 978-612-307-366-4
Registro del proyecto editorial N.° 31501051600874
"Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú" N.° 2016-10789
Prohibida su reproducción total o parcial. Derechos reservados D. LEG. N.° 822

Distribución y ventas al por mayor y menor
Teléfonos: Lima: 01-332 3786 / Provincia: 01-433 0713
ventas@elumbreras.com.pe

Esta obra se terminó de imprimir en los talleres gráficos de la Asociación Fondo de Investigadores y Editores en el mes de septiembre de 2016.
Calle Las Herramientas N.° 1873 / Av. Alfonso Ugarte N.° 1426 - Lima-Perú.
Teléfono: 336-5889

Índice

Presentación 11
Introducción 13
Símbolos matemáticos 15
Evolución histórica del álgebra 17

CAPÍTULO I: NOCIONES PRELIMINARES

Introducción 31
Adición y sustracción 32
Multiplicación 34
Ley de los signos 34
Propiedades de los exponentes 34
Propiedad distributiva 34
Propiedad asociativa 35
Equivalencias notables 36
División 36
Ley de los signos 36
Propiedades de los exponentes 36
Ecuaciones y despeje de incógnitas 39
Biografía: Bernard Bolzano 43
Test 1 45
Problemas propuestos 47

CAPÍTULO II: LEYES DE EXPONENTES

Introducción 51
Definiciones previas 52
Exponente natural 52
Exponente cero 52
Exponente negativo 52
Exponente fraccionario 53
Potenciación 53
Teoremas de la potenciación 53
Radicación en $\mathbb{R}$ 55
Definición 55
Teoremas de radicación 56
Radicales sucesivos 56
Ecuaciones exponenciales 58
Biografía: Jean-Baptiste Fourier 61
Problemas resueltos 63
Test 2 77
Problemas propuestos 79
Claves 86

CAPÍTULO III: POLINOMIOS

Introducción 89
Definiciones previas 90
Expresión matemática 90
Notación matemática 90
Expresiones algebraicas 90
Polinomios 93
Definición 93
Polinomio en una variable 94
Valor numérico de una expresión matemática 94
Cambio de variable 97
Grado de un polinomio 98
Polinomios especiales 99
Biografía: Carl Friedrich Gauss 104
Problemas resueltos 106
Test 3 119
Problemas propuestos 121
Claves 128

CAPÍTULO IV: MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA

Introducción 131
Multiplicación algebraica 133
Definición de multiplicación 133

Leyes de la multiplicación 133
Multiplicación de expresiones de un término 134
Multiplicación de una expresión con otra de dos o más términos 134
Multiplicación de polinomios 135
Grado del polinomio producto 135
Productos notables 135
Definición 135
Principales productos notables 135
Biografía: Joseph-Louis de Lagrange 143
Problemas resueltos 145
Test 4 159
Problemas propuestos 161
Claves 168

Capítulo V: División algebraica de polinomios

Introducción 171
División algebraica de polinomios 173
Definición 173
Clases de división 173
Propiedades de grados 174
Casos que se presentan en la división de polinomios 174
Métodos para dividir polinomios algebraicamente 176
Teorema de René Descartes (Teorema del resto) 183
Biografía: Paolo Ruffini 186
Problemas resueltos 188
Test 5 204
Problemas propuestos 206
Claves 214

Capítulo VI: Divisibilidad de polinomios y cocientes notables

Introducción 217
Divisibilidad de polinomios 218
Definición 218
Teoremas de divisibilidad 219
Cocientes notables 224
Definición 224
Teorema del término general 225
Biografía: René Descartes 229
Problemas resueltos 231
Test 6 243
Problemas propuestos 245
Claves 252

Capítulo VII: Factorización de polinomios

Introducción 255
Factorización de polinomios 256
Campo numérico 256
Polinomio sobre un campo 257
Factorización sobre $\mathbb{Z}$ 259
Métodos para factorizar $\mathbb{Z}$ 259
Biografía: Jules Henri Poincaré 273
Problemas resueltos 275
Test 7 287
Problemas propuestos 289
Claves 296

Capítulo VIII: MCD, MCM y fracciones

Introducción 299
Conceptos básicos 300
Factor de un polinomio 300
Factor común de dos o más polinomios 300
Múltiplo de un polinomio 300
Polinomio múltiplo común 300
Máximo común divisor (MCD) 300
Definición 300
Mínimo común múltiplo (MCM) 301
Definición 301
Fracciones algebraicas 304
Definición 304
Dominio o conjunto de valores admisibles de fracciones algebraicas (CVA) 305
Operaciones entre números racionales 305
Fracciones algebraicas 306

Fracciones algebraicas reductibles 306
Clasificación de fracciones algebraicas 307
Descomposición de una fracción en fracciones parciales 309
Biografía: Blaise Pascal 315
Problemas resueltos 317
Test 8 330
Problemas propuestos 332
Claves 340

CAPÍTULO IX: RADICACIÓN

Introducción 343
Radicación 344
Definición 344
Definición de raíz aritmética 344
Teoremas de radicación en $\mathbb{R}$ 344
Raíz algebraica 344
Raíz cuadrada de un polinomio 345
Radicales simples 348
Radicales dobles 348
Racionalización 356
Definición 356
Factor racionalizante (FR) 356
Biografía: Pierre de Fermat 361
Problemas resueltos 363
Test 9 376
Problemas propuestos 378
Claves 384

CAPÍTULO X: BINOMIO DE NEWTON

Introducción 387
Definiciones previas 388
Factorial de un número natural 388
Número combinatorio 388
Desarrollo del binomio de Newton cuando n es un número natural 392
Método inductivo 393
Potencia de un polinomio 400
Término general (fórmula de Leibnitz) 400
Fórmula del desarrollo (fórmula de Leibnitz) 401
Número de términos 402
Desarrollo del binomio $(x+a)^n$ cuando n es un número racional (no natural) 402
Coeficiente binomial 402
Forma general del desarrollo 402
Término general 404
Número de términos 405
Término numéricamente más grande 405
Biografía: Isaac Newton 406
Problemas resueltos 409
Test 10 423
Problemas propuestos 425
Claves 432

CAPÍTULO XI: NÚMEROS REALES

Introducción 435
Definición previa 436
Conjunto de los números naturales 436
Propiedades de la adición de los números naturales 437
Propiedades de la multiplicación de los números naturales 437
Conjunto de los números enteros 437
Números enteros positivos 437
Números enteros negativos 438
Número cero 438
Adición y sustracción de los números enteros 438
Multiplicación de los números enteros 438
Potenciación y radicación 438
Conjunto de los números racionales 439
Propiedades de la adición y sustracción de los números racionales 439
Propiedades del producto de los números racionales 440

Distributividad de la multiplicación respecto a la adición 440
El cociente de los números racionales 440
Conjunto de los números irracionales 440
Números irracionales algebraicos 440
Números irracionales trascendentes 440
Adición y sustracción de los números irracionales 441
Multiplicación de los números irracionales 441
División de los números irracionales 441
Potenciación de los números irracionales 441
Conjunto de los números reales 442
Correspondencia biunívoca 442
Operación binaria o ley de composición interna 442
Propiedades de la operación binaria 443
Estructura de cuerpo 445
Cuerpo de los números reales como un cuerpo ordenado y completo 446
Axiomas de adición 446
Axiomas de multiplicación 446
Axiomas de distributividad 446
Definiciones complementarias 447
Definición de la sustracción 447
Definición de la división 447
Ley de cancelación 447
Conjuntos acotados 448
Máximos y mínimos de un conjunto 448
Cota superior de un conjunto 448
Cota inferior de un conjunto 449
Conjuntos acotados 449
Supremo de un conjunto 449
Ínfimo de un conjunto 449
Biografía: Giuseppe Peano 450
Problemas resueltos 452
Test 11 466
Problemas propuestos 468
Claves 476

CAPÍTULO XII: NÚMEROS COMPLEJOS

Introducción 479
Números complejos 480
Definición 480
Operaciones definidas en $\mathbb{C}$ 480
Igualdad de números complejos 480
Representación geométrica (plano de Gauss) 481
Sistema de los números complejos 482
Cantidades imaginarias 483
Unidad imaginaria 483
Forma cartesiana o binómica de un número complejo 485
Tipos de números complejos 486
Conjugado y opuesto de un complejo 486
Operaciones en la forma binómica o cartesiana 487
Módulo o valor absoluto de un número complejo 491
Forma polar o trigonométrica de un número complejo 493
Forma exponencial de un número complejo 498
Representación CIS 499
Representación fasorial 499
Raíz *n*-ésima. Raíces de la unidad real 501
Biografía: Leonhard Euler 507
Problemas resueltos 509
Test 12 526
Problemas propuestos 528
Claves 536

CAPÍTULO XIII: ECUACIONES ALGEBRAICAS

Introducción 539
Teoría de ecuaciones 541
Definición de una ecuación 541
Clases de ecuaciones 542
Ecuación polinomial 542
Definición 542
Teorema fundamental del álgebra 544
Ecuaciones lineales 544
Ecuaciones cuadráticas 546
Ecuaciones cúbicas 552
Ecuaciones cuárticas 560
Ecuaciones bicuadradas 562
Ecuaciones recíprocas 564
Ecuaciones binómicas 566
Ecuación polinomial de grado *n* 568
Transformaciones de las ecuaciones 571
Ecuaciones fraccionarias 574
Ecuaciones Irracionales 576
Biografía: Gerolamo Cardano 579
Problemas resueltos 581
Test 13 594
Problemas propuestos 596
Claves 604
Bibliografía 605

Presentación

La Asociación Fondo de Investigadores y Editores (Afined), a través de su sello Lumbreras Editores, se complace en presentar su nueva publicación ***Álgebra*** Tomo I, la cual forma parte de la **Colección Ciencias y Humanidades**. Esta publicación constituye un nuevo aporte al desarrollo de la educación en nuestra sociedad, en tiempos en los que el avance tecnológico y el uso de los nuevos medios van generando cambios rápidamente, y donde el acceso y el aprovechamiento de estos resultan desiguales en nuestro país. Por ello la importancia de estas publicaciones, que además tienen el respaldo del trabajo serio y orientado al servicio, y a la formación integral de los estudiantes.

Conscientes de ello, nuestra editorial –con presencia en distintos lugares del Perú– presenta esta colección, la cual es fruto del trabajo organizado y en conjunto con las distintas planas de profesores del **Instituto de Ciencias y Humanidades**, promotor de las academias Aduni y César Vallejo, cuya experiencia y dedicación en la instrucción de jóvenes estudiantes se ven reflejadas a lo largo de las siguientes páginas.

El esfuerzo de las distintas planas está enfocado, además de la enseñanza y la formación integral, en la investigación tanto en matemáticas como en ciencias naturales y humanidades. Agradecemos el trabajo y la dedicación de los docentes, quienes finalmente canalizan y orientan el contenido de cada obra en aras de alcanzar un mejor nivel y calidad, y de hacer entendible aquello que a veces resulta complicado para el estudiante, no solo de los niveles secundario y preuniversitario, sino también de los primeros ciclos de la universidad. Destacamos el trabajo profesional realizado desde sus inicios por los profesores a cargo de esta publicación, cuya labor en la sistematización del libro se ve plasmada en un trabajo teórico-práctico acorde con las exigencias y el nivel que requieren los estudiantes; hacemos mención especial al profesor Arturo Ángel Fernández Salazar, quien asumió la tarea de revisión y mejora del presente material, gracias a su experiencia tanto en la docencia como en la elaboración de materiales educativos.

Finalmente, queremos resaltar el compromiso de nuestra institución de continuar con la labor educativa y aportar con nuevas publicaciones que contribuyan a mejorar la calidad de esta, además de incentivar el trabajo de investigación y humanístico, el cual creemos debe estar siempre cerca de las grandes mayorías.

Asociación Fondo de Investigadores y Editores

Introducción

El hombre, desde su aparición, ha creado diversas formas de satisfacer sus necesidades. Para preservar su existencia y lograr su desarrollo se vio en la necesidad de medir y calcular situaciones concretas que lo rodeaban, cuantificar aspectos como tiempo, longitud, masa, peso, volumen, entre otros, dando así origen a la noción de cantidad. Más adelante, representó estas cantidades en conceptos abstractos de números y signos que facilitaron realizar con exactitud o por aproximación cálculos mentales con el fin de comprender y explicar mejor la realidad. Las operaciones simples que el hombre realizaba se elevaron entonces a un nivel superior de generalización, construyéndose un sistema abstracto y coherente de signos y números, dando lugar a los fundamentos del álgebra como parte fundamental de la matemática.

El álgebra es, en esencia, la doctrina de las operaciones matemáticas analizadas desde un punto de vista abstracto y genérico, independiente de los números u objetos concretos. A lo largo de la historia de la humanidad esta ciencia ha ido evolucionando, y cada civilización y cada cultura con sus características propias han dejado un legado testimonial escrito del cual en la actualidad somos herederos.

El presente texto, es el resultado de la experiencia docente de los integrantes de la Plana de Álgebra de las academias César Vallejo y Aduni, y tiene por objeto que los estudiantes de los últimos años de secundaria, y los que desean iniciar los estudios universitarios, conozcan, de modo accesible, los conceptos teóricos, la práctica del álgebra y su aplicación en otras áreas para el beneficio de la sociedad.

Dado el nivel de abstracción de los conceptos teóricos y los procesos tediosos de operatividad algebraica, se ha desarrollado una diagramación que resalta las definiciones, axiomas y teoremas con sus respectivas demostraciones, para una mejor comprensión de los temas y el aprendizaje óptimo de los estudiantes. Asimismo, se precisan los objetivos de aprendizaje en cada capítulo, a fin de que los docentes que hagan uso del texto desarrollen los contenidos a fin de lograr dichos objetivos.

En cuanto a la estructuración temática del texto, se muestra en el primer capítulo las nociones preliminares que el estudiante debe tener como saberes previos al iniciar el estudio del álgebra; luego se estudian las leyes

de exponentes, los polinomios y las operaciones que se realizan con estos, así como el cálculo directo de algunos productos y cocientes denominados notables. En los siguientes capítulos se abordan temas como la factorización, que permitirá la descomposición de polinomios en sus factores primos y a la vez conocer los múltiplos y divisores de estos, los cuales facilitan el estudio de las fracciones algebraicas. Asimismo, se estudiarán la simplificación de radicales dobles, la racionalización de expresiones con denominador irracional y el desarrollo del binomio de Newton como una extensión de los productos notables. Finalmente, se muestran los conjuntos de números reales, números complejos y ecuaciones algebraicas. Todos los capítulos desarrollados presentan ejercicios de aplicación, problemas resueltos y problemas propuestos con sus respectivas claves, para que los estudiantes se ejerciten y se autoevalúen.

Consideramos que el presente trabajo no está acabado. Las observaciones, críticas y sugerencias harán de él un texto mejorado. Renovamos nuestro compromiso de impulsar y desarrollar trabajos de investigación que permitan servir mejor a nuestros estudiantes y a nuestra sociedad.

Plana de Álgebra

Academias César Vallejo y Aduni

Símbolos matemáticos

$+$	más
$-$	menos
$\cdot$	multiplicación
$\div$	división
$\leq$	menor o igual que
$\geq$	mayor o igual que
$>$	mayor que
$<$	menor que
$=$	igual a
$\neq$	diferente de
$\equiv$	idéntico a
$\not\equiv$	no es idéntico
$\approx$	aproximado a
$+\infty$	más infinito
$-\infty$	menos infinito
$\in$	pertenece a
$\notin$	no pertenece a
$\subseteq$	contenido o igual
$\subset$	contenido
$\not\subset$	no contenido
$\{\ \}$; ϕ	conjunto vacío
$\cup$	unión
$\cap$	intersección
$\therefore$	por lo tanto
$\langle a; b\rangle$ o $]a; b[$	intervalo abierto
$[a; b]$	intervalo cerrado
$[a; b\rangle$ o $\langle a; b]$	intervalo semiabierto o semicerrado
Σ	sumatoria
$\sum_{n=1}^{k}$	suma desde 1 hasta k
$\prod$	productoria
$\prod_{1}^{k}$	producto desde 1 hasta k
$\sqrt[n]{\ }$	raíz n-ésima
$\forall$	para todo, para cualquiera
$\exists!$	existe uno solo
$\exists$	existe al menos uno
$\nexists$	no existe
$p \rightarrow q$	p implica q
$p \leftrightarrow q$	p si y solo si q
$p \vee q$	p o q
$p \wedge q$	p y q
$\mathbb{N}$	conjunto de los naturales
$\mathbb{Z}$	conjunto de los enteros
$\mathbb{Q}$	conjunto de los racionales
$\mathbb{I}$ o $\mathbb{Q}'$	conjunto de los irracionales
$\mathbb{R}$	conjunto de los reales
$\mathbb{C}$	conjunto de los complejos
$[\![x]\!]$	máximo entero de x
$\lvert x\rvert$	valor absoluto de x
$\mathrm{sgn}(x)$	signo de x

i	unidad imaginaria
$z=a+bi$	número complejo z
$\mathrm{Re}(z)$	parte real de z
$\mathrm{Im}(z)$	parte imaginaria de z
$\arg(z)$	argumento del complejo z
$\mathrm{Arg}(z)$	argumento principal del complejo z
$\lvert z \rvert$	módulo del complejo z
$\bar{z}$	conjugado de z
$\mathrm{cis}\,\theta$	$\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta$
Δ	discriminante
$\mathrm{Grad}_{(q)}$	grado del cociente
$\mathrm{Grad}_{(D)}$	grado del dividendo
$\mathrm{Grad}_{(d)}$	grado del divisor
$\mathrm{Grad}_{(R)}$	grado del residuo
x/x	x tal que x
CVA	dominio o conjunto de valores admisibles
GR	grado relativo
GR_x	grado relativo con respecto a x
GA	grado absoluto
$\mathrm{Grad}(f)$	grado absoluto de f
$\mathrm{VN}(P)$	valor numérico de P
T.I.P	término independiente de P
$\sum \mathrm{coef.}(P)$	suma de coeficientes de P
FR	factor racionalizante
PCR (PRR)	posibles ceros (raíces racionales)

CS	conjunto solución
$\mathrm{CS}=\phi$	conjunto solución vacío
$\mathrm{Sup}(A)$	supremo de A
$\mathrm{Inf}(A)$	ínfimo de A
MCM	mínimo común múltiplo
MCD	máximo común divisor
$x!$ o $\underline{\lfloor x}$	factorial de x
$n!!$ o $\underline{\lfloor\lfloor n}$	semifactorial de n
C_k^n o $\binom{n}{k}$	número combinatorio o coeficiente binomial
$\overset{\circ}{x}$	múltiplo de x
$P_{(x)}$ o $P(x)$	polinomio P de variable x
$P_{(2x+1)}$	polinomio P de variable compuesta $2x+1$
$P_{(x;\,y)}$	polinomio P de variables x e y
$P_{(x+1;\,y-2)}$	polinomio P de variables compuestas $x+1$ e $y-2$
$f_{(2)}$	f evaluado en dos
$Q_{(2;\,-1)}$	Q evaluado en $(2;\,-1)$
$P_{(x)}=Q_{(x)}$	$P_{(x)}$ es idéntico a $Q_{(x)}$
$\mathrm{Card}(A)$	cardinal del conjunto A
t_k	término de lugar k
MA	media aritmética
MG	media geométrica
MH	media armónica

Evolución histórica del Álgebra

El álgebra es, en esencia, la doctrina de las operaciones matemáticas analizadas desde un punto de vista abstracto y genérico, independientemente de los números u objetos concretos. Estudia la generalización del cálculo aritmético mediante expresiones compuestas de constantes (números) y variables (letras). Curiosamente, proviene de la expresión árabe *algabru walmuqabalah* que significa reducción, operación de cirugía por la cual se reducen los huesos luxados o fracturados (algebrista era el médico reparador de huesos).

La historia del álgebra es larga y ha habido muchas circunstancias adversas y de gran complejidad en todo su avance, pero las de mayor importancia han hecho que se puedan distinguir en el álgebra dos grandes periodos. El primero de ellos abarca desde sus inicios hasta el siglo XIX y el segundo comprende los dos últimos siglos de nuestra era. La gran distinción entre ellos es que, en la primera etapa, el principal objetivo del álgebra es la resolución de las ecuaciones algebraicas, por lo que se estudia y desarrolla todo lo que les concierne y lo que de un modo directo o indirecto está relacionado con ellas. Por el contrario, en la segunda etapa las metas del álgebra son distintas. Por un lado, ya se ha resuelto el problema de las ecuaciones en cuya resolución han intervenido grandes matemáticos que se mencionarán a lo largo del artículo; y, por otro lado, las preocupaciones de estos personajes se desvían y se centran principalmente en el estudio de las estructuras algebraicas.

Los orígenes del álgebra se pueden asociar al concepto de número, que surgió sin duda debido a la necesidad de contar objetos. En un principio, estos se contaban de forma rudimentaria, utilizando dedos, piedras (curiosamente, la palabra cálculo deriva de la palabra latina *calculus*, que remite a contar con piedras). La serie de números naturales era, obviamente, limitada en una primera etapa de recursos muy arcaicos, no obstante lo cual existía una conciencia generalizada sobre la necesidad de ampliar el ámbito de trabajo con dichos números para abarcar un campo mucho mayor. A continuación se van a describir las distintas etapas que han ido configurando la historia del álgebra, analizando los conocimientos y los avances que se ha realizado en cada una de ellas.

CIVILIZACIÓN EGIPCIA

La civilización egipcia es la primera en manejar el álgebra con profundidad y rigor matemático. Los egipcios poseían ya un sistema de numeración al que, posteriormente, se asemejaría el sistema de numeración romano. Era de carácter jeroglífico y estaba basado en una serie de números especiales que se denominaban números clave (1, 10, 100, 1000, etc.). Para la representación de estos, los egipcios empleaban distintos símbolos como palos, lazos y figuras diversas. La representación del resto de los números la basaban en el uso de estos números clave, y dio como resultado el desarrollo de un álgebra relativamente sencilla,

impulsados por la necesidad de resolver problemas de la vida diaria, tales como la repartición de cosechas y materiales.

En lo que respecta a operaciones y cálculos empleados en la civilización egipcia, cabe destacar que ya se utilizaban operaciones y reglas de cálculo con números enteros positivos, así como con números fraccionarios positivos. Solo trabajaban con las fracciones como divisores de la unidad, $1/n$, y las usaban para expresar el resto de fracciones, combinándolas entre sí. No obstante, aún se encontraban lejos del conocimiento y manejo de los números negativos.

En un nivel más avanzado, los egipcios fueron capaces de resolver ecuaciones de primer grado por el método por ellos denominado como "de la falsa posición". En estas ecuaciones, que podemos considerar primitivas o rudimentarias, la incógnita x recibía el nombre de montón.

CIVILIZACIONES BABILÓNICA Y MESOPOTÁMICA

A diferencia del álgebra empleada por los egipcios, el sistema de numeración utilizado por los mesopotámicos era de carácter posicional sexagesimal. El gran avance de esta civilización en materia de números consistió en que un mismo símbolo podía representar distintas cantidades, dependiendo únicamente del lugar o posición en que se colocara.

A diferencia de los egipcios, que no llegaron a resolver más que ecuaciones de primer grado, ya en el siglo XVII a.n.e., los matemáticos de Mesopotamia y de Babilonia eran capaces de resolver ecuaciones de primer y segundo grado. Incluso, hay constancia de que la resolución de algunos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas estaba al alcance de sus manos.

También es digno de mención el progreso que realizaron los matemáticos babilónicos y mesopotámicos con la potenciación, progreso que les condujo a la resolución de ecuaciones cuadráticas e incluso a la suma de progresiones tanto aritméticas como geométricas. Esta gran labor de avance en matemáticas y, en particular, en álgebra, fue posible debido al elevado grado de abstracción que fueron capaces de desarrollar.

CIVILIZACIÓN CHINA

El sistema numérico empleado por los chinos era el decimal jeroglífico. Aunque aún no se había introducido los números negativos de forma precisa, sí los admitían aunque no los aceptaban como soluciones de ecuaciones.

Sin embargo, su contribución algebraica de mayor importancia fue en relación a los sistemas de ecuaciones lineales. Desarrollaron un sistema de resolución de ecuaciones lineales de carácter genérico que tenía cierta similitud con el que siglos más tarde desarrollaría Gauss.

Se atribuye a ellos, alrededor del siglo I d.n.e., la invención de una especie de ábaco primitivo, (*suan zi*), que consistía en un conjunto de palos de bambú de dos colores asociados a números positivos y negativos respectivamente. Dicho instrumento recibió el nombre de tablero de cálculo. Entre las innovaciones de la civilización china hay que destacar que desarrollaron métodos que permitían obtener raíces racionales, además de las enteras obtenidas hasta entonces.

CIVILIZACIÓN HELÉNICA

Una característica importante de los griegos es su interés por tratar de precisar todas las operaciones y de justificar de forma rigurosa todas las leyes relativas al álgebra, interés que no se había despertado en civilizaciones anteriores.

En la época de Pitágoras (siglo VI a.n.e.) se llevó a cabo una recopilación y una fusión de muchos resultados matemáticos y la unión de estos dio lugar a nuevos sistemas teóricos. Se estudiaban

en aquella época propiedades numéricas, divisibilidad de números, cuestiones sobre proporciones aritméticas, geométricas y armónicas, y diferentes medias (aritmética, geométrica y armónica). Se estudiaron también las conocidas ternas pitagóricas, es decir, ternas de números que satisfacen la ecuación $a^2+b^2=c^2$ y se descubrió un método para el hallazgo de dichas ternas.

Otro gran descubrimiento de los griegos fue la existencia de la irracionalidad, llevando a cabo, por ejemplo, mediante reducción al absurdo la comprobación de la irracionalidad de 2. A partir de este descubrimiento surgió la necesidad de crear una teoría más amplia que comprendiera tanto los números racionales como los irracionales. Esto dio lugar a una reestructuración de la geometría que desembocó en el álgebra geométrica. Sin embargo, esta álgebra geométrica no era capaz de resolver problemas de dimensión mayor que dos, lo que hacía imposible resolver problemas que conllevaban la resolución de ecuaciones de tercer grado o superiores.

Destaca la figura del matemático griego Nicómaco de Gerasa, en el siglo II d.n.e., quien publicó su *Introducción a la aritmética* exponiendo varias reglas para el buen uso de los números.

A pesar de que las ecuaciones de primer y segundo grado ya se habían resuelto varios siglos antes, no fue hasta el siglo III d. C. cuando Diofanto, en su obra *Aritmética*, las estudia en profundidad y de forma rigurosa. Además, encontró solución a más de cincuenta clases diferentes de ecuaciones llamadas ecuaciones diofánticas. Designó las incógnitas con un signo que se correspondía con la primera sílaba de la palabra griega *arithmos*, que significa número. Toda su obra y los problemas que planteó sentaron las bases de lo que posteriormente sería el álgebra moderna a pesar de que su labor carecía de precisión y era algo rudimentaria.

Por lo tanto, se considera la época griega como un periodo donde se trataron las matemáticas de una forma muy amplia y se tocaron ya algunos de los elementos que posteriormente, y muchos siglos después, sentarían las nuevas ramas de las matemáticas.

CIVILIZACIÓN HINDÚ

La civilización india usó un sistema de numeración posicional y decimal desde el siglo VIII a.n.e., época a la que pertenecen los primeros hallazgos de este pueblo. A pesar de que ya por entonces habían desarrollado en cierta medida el álgebra, es durante los siglos V-XII donde todos sus avances y logros alcanzan su mayor apogeo.

Dentro de sus avances se incluye la introducción del cero y las operaciones con números irracionales. Tuvo gran importancia el correcto uso de los números negativos ya que en el siglo VII los hindúes habían desarrollado las reglas algebraicas fundamentales para manejar números positivos y negativos. Aceptaban los números negativos como soluciones de ecuaciones y las interpretaban como deudas.

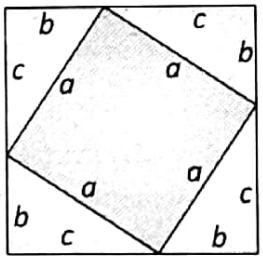
En este progreso significativo que legaron los hindúes destacan grandes figuras matemáticas como Aryabhata (s. VI), Brahmagupta (s. VI), Mahavira (s. IX) y Bhaskara Akaria (s. XII). A continuación vamos a repasar la biografía de algunos de estos personajes debido a la trascendencia que tuvieron:

Brahmagupta: nació en el 598 d.n.e. y murió en el 665 d.n.e. Dentro de sus logros cabe mencionar la generalización de la fórmula de Herón para calcular el área de un triángulo. Acepta los dos signos posibles de las raíces cuadradas y es capaz de resolver ecuaciones diofánticas lineales de la forma $ax+by=c$, con a, b y c enteros.

Descubrió que para que una ecuación de este tipo tuviera solución, c debía ser divisible por el máximo común divisor de a y b. Más aún, en el caso de ecuaciones donde a y b fuesen primos entre sí llegó a comprobar que las soluciones eran de la forma $x=p+mb$ y $y=q-ma$, donde m es un entero arbitrario.

Bhaskara: nació en el año 1114 y murió en el año 1185. De los citados matemáticos indios fue el último de ellos y su labor es de un gran valor. Una de sus obras más conocidas es *Vijaganita* y en ella destaca el descubrimiento que hizo del doble signo de los radicales cuadráticos. También se incluye en este libro el intento de resolver las divisiones por cero. Bhaskara se empeñó en este propósito ya que en los matemáticos indios se despertó un gran interés por las cantidades muy grandes.

El segundo libro más reconocido de su obra es el *Lilavati*. En él se trabajan y resuelven ecuaciones lineales y cuadráticas. Además, entre los problemas geométricos, propone una resolución para el teorema de Pitágoras.



Teniendo en cuenta el cuadrado de la suma $(b+c)^2=b^2+c^2+2bc$ y observando la figura $(b+c)^2=2bc+a^2$, se obtiene $a^2=b^2+c^2$.

También fue capaz de aproximar el número pi y dio algunas aproximaciones como 22/7 y 3927/1250.

LA CIVILIZACIÓN MUSULMANA

El mayor representante de la cultura musulmana fue el matemático y astrónomo Al-Khowarizmi que perteneció a una de las más importantes escuelas que se extendían por todo el imperio. Una de sus obras más conocidas está basada en *Brahmagupta*, libro que tradujo al árabe. Un detalle curioso referente a este libro fue que en él se incluyó una copia fiel del sistema de numeración hindú, lo que ha llevado a un gran error y es que hoy en día muchos creen que nuestro sistema de numeración proviene del árabe debido a esta traducción que llevó a cabo Al-Khowarizmi. Su obra más importante lleva por nombre *Hisab al-jabr wa-al-muqabala*, nombre del que posteriormente ha derivado el término álgebra.

La obra de Al-Khowarizmi fue seguida en el siglo X por el también musulmán Abu Kamil, cuyos avances en el álgebra serían aprovechados en el siglo XIII por el matemático italiano Fibonacci.

Otro matemático musulmán a tener en cuenta fue Casi, cuyo mérito se debió a haber encontrado las primeras 17 cifras del número pi en el siglo XV. Grandes matemáticos posteriores intentaron tal hazaña pero fracasaron en el intento (Viète solo fue capaz de encontrar las nueve primeras cifras en 1593). Solo a finales del siglo XVI se repite el logro de Casi.

Los trabajos de los matemáticos árabes desde el siglo IX hasta el siglo XV incluyen ecuaciones de primer y segundo grado. Además, algunos problemas de carácter geométrico como la división de la esfera por un plano o la trisección de un ángulo llevaron a plantear ecuaciones cúbicas.

EL ÁLGEBRA EN EL CONTINENTE EUROPEO

Edad Media

En Europa, la historia es bastante diferente que en el Oriente. Fue en la Edad Media cuando empezaron a surgir centros de enseñanza como el que organizó Gerberto en el siglo X en Reims (Francia). En ellos comenzaron a difundirse todos los conocimientos indo-arábigos gracias a que los musulmanes tradujeron toda la obra hasta la época, rompiendo así la barrera

lingüística. Uno de los musulmanes a destacar fue Gerardo Cremona (siglo XII).

Otra gran figura digna de mencionar es Leonardo de Pisa que ha pasado a la historia como Fibonacci. Su importancia se debe a que aprendió el sistema de numeración indo-arábigo tras viajes realizados al norte de África y a Oriente. Su obra más conocida recibe el nombre de *Liber Abaci* que significa Tratado del ábaco y que escribió alrededor de 1212. Es una obra muy completa donde se recogen, entre otras operaciones con fracciones, la regla de tres simple y compuesta, la división proporcional y la sucesión por la que este personaje ha pasado a la historia y que lleva su nombre, la sucesión de Fibonacci.

Siglo XVI

En el siglo XIV se produjo un avance relativo a las potencias ya que se comenzó a calcular potencias de exponentes fraccionarios y se establecieron de forma rigurosa las reglas para operar con ellas. La figura encargada de esto fue Nicole Orestes.

Estos avances, y la progresiva expansión del álgebra de Oriente en Europa, fueron los hechos más notables de carácter matemático que tuvieron lugar durante la Edad Media.

Sin embargo, a pesar de este pequeño aletargamiento, resurge el álgebra de forma descomunal en el siglo XVI. Es la época del Renacimiento que en matemáticas se refleja en la escuela italiana, donde las matemáticas y, en concreto, el álgebra, reciben gran impulso. En este siglo destaca el interés en la búsqueda de una solución a las ecuaciones de tercer y cuarto grado.

Hay varios nombres de italianos conocidos que han configurado la historia de esta búsqueda. Pocas veces, cuando se enseñan en las escuelas los conocimientos de las distintas áreas, se tiene en cuenta la dificultad y los problemas para llegar a tales hallazgos, así como la parte humana de ese quehacer. En la historia de las ecuaciones de tercer y cuarto grado han contribuido tres personajes y una serie de eventos interesantes y no está exactamente claro cómo fue el transcurso de este descubrimiento que en algunas ocasiones ha estado confuso. Hay un par de versiones que circulan y voy a tratar de comentar las dos para que los lectores decidan cuál les parece más real. Los personajes que intervinieron en esta curiosa historia fueron Scipion del Ferro, Fiore, Tartaglia y Cardano. Vamos a repasar las sus historias:

El primer personaje que aparece en esta historia es Scipion del Ferro (1465-1526). Trabajó en la Universidad de Bolonia y fue allí donde descubrió una fórmula para resolver a las ecuaciones de tercer grado en las que faltaba el término cuadrático, conocida como cúbica reducida. Sin embargo, decidió no hacerla pública. El motivo era que en aquella época era muy común que los distintos académicos se retaran públicamente entre ellos con problemas de distinta dificultad y el éxito en dichos retos era lo que garantizaba la permanencia de estos académicos en la universidad, por lo que encontrarse en posesión de un arma tan valiosa como la que había encontrado era motivo suficiente para guardar el secreto en espera de un próximo reto. Así se garantizaba el triunfo con cualquiera de sus rivales. Sin embargo, justo antes de morir, Scipion decidió transmitir su gran descubrimiento a uno de sus alumnos, Antonio Fior, para que su secreto no pereciera con él. El problema era que este alumno no se caracterizaba por el talento y la genialidad de su maestro e hizo uso de su arma para retar públicamente a un conocido académico de Brescia, Niccolo Fontana (1499-1557).

Niccolo Fontana sufrió, cuando era niño, en 1512, una herida en la cara, por un golpe de espada en la mandíbula, en uno de los muchos conflictos que hubo en Italia a manos de Gastón de Foix en Brescia, su ciudad natal. Dicha herida le dejó secuelas de carácter estético y más aún, pues a raíz de este altercado sufrió un receso en el habla y luego tuvo dificultades para hablar. Es por este motivo por lo que recibió el apodo de Tartaglia, por el que posteriormente fue conocido y que significa tartamudo. Tartaglia era por entonces un matemático de familia pobre que se ganaba la vida dando clases de matemáticas en el norte de Italia. Explicó esta ciencia sucesivamente en Verona, Vicenza, Brescia y finalmente Venecia, ciudad en la que falleció en 1557 siendo tan pobre como lo fue a lo largo de toda su vida. Según cuenta la historia, Tartaglia tenía un profesor que le enseñó medio alfabeto y no pudo enseñarle más porque su familia se quedó sin dinero. A partir de ahí su aprendizaje fue completamente autodidacta.

El reto de Fior consistía en resolver treinta problemas de ecuaciones de tipo cúbica reducida. Cuando Tartaglia fue retado dedicó todos sus esfuerzos a resolver estos problemas y, finalmente, el 12 de octubre de 1535 ganó el reto afirmando que había descubierto la solución de la ecuación cúbica con término lineal. Por el contrario, Fior perdió todo su prestigio y desapareció de los escenarios académicos. Es aquí donde interviene el siguiente personaje de esta historia.

Girolamo Cardano (1501-1576) nacido en Pavía y muerto en Roma. Era un hombre culto, científico y bizarro, aunque un tanto extraño. Era médico y conocía, aunque de forma intuitiva, el fenómeno de la alergia.

Su vida estuvo llena de anécdotas y una de ellas es la siguiente: era un hijo ilegítimo y su madre intentó en repetidas ocasionas abortar sin éxito. Finalmente, y gracias a un baño en vino tibio, nada más nacer, logró sobrevivir. Esta curiosidad fue incluida por el propio Cardano en su autobiografía. También hay que mencionar que pasó varias temporadas en la cárcel debido a sus trampas y pillerías. Es más, hay una leyenda que mantiene que mediante la astrología predijo el día de su muerte y que no tuvo más remedio que cometer suicidio para que su predicción fuese cierta.

Según cuenta la historia, Cardano era muy ambicioso y cuando llegó a sus oídos que Tartaglia había descubierto la solución a la ecuación cúbica reducida trató de obtener la fórmula. Hubo un acercamiento progresivo tras conocerse y continuaron manteniendo contacto entre ellos. Cardano intentó sonsacar a Tartaglia para que este le revelara la fórmula y aunque este se negó repetidas veces en 1539 se la reveló aunque lo hizo de forma cifrada. Además, hicieron un juramento y Cardano se comprometió a guardar dicha fórmula en secreto y no publicarla jamás.

A partir de aquí es donde la historia parece tener dos versiones distintas. En una de ellas se ofrece una imagen cruel y egoísta de Cardano que una vez enterado de la fórmula se apropió de ella, rompiendo el juramento con Tartaglia, y la publicó en su obra *Ars Magna*, atribuyéndose el mérito de dicho logro. Este plagio fue un duro golpe para Tartaglia que protestó con vehemencia, aunque no pudo conseguir nada. Finalmente, aparece en la historia Ludovico Ferrari que fue capaz de encontrar la solución de la ecuación de cuarto grado.

La otra versión ofrece una imagen bien distinta de Cardano en una historia que es la siguiente. Ludovico Ferrari entró en escena ya que se acercó Cardano buscando trabajo y este lo contrató para labores sin importancia. Sin embargo, el joven era muy despierto e inteligente y Cardano, que se dio cuenta de la capacidad de Ludovico,

empezó a instruirlo de modo que Ludovico se convirtió en su alumno.

Se produjo entonces un hecho parecido al de Scipion y Fior, ya que Cardano terminó revelándole sus conocimientos a su alumno Ludovico, en concreto la fórmula de la ecuación cúbica reducida. A partir de ahí comenzaron una labor juntos e hicieron nuevas investigaciones dentro del campo del álgebra. Cardano descubrió por fin cómo se resolvían las ecuaciones cúbicas completas pero su método se basaba en los conocimientos previos de Tartaglia, por lo que el juramento entre ambos le prohibía llevar a cabo una publicación. También Ferrari hizo un gran descubrimiento, ya que fue capaz de encontrar el modo de resolver las ecuaciones de cuarto grado. Sin embargo, se encontraba en la misma situación que su compañero y amigo Cardano, ya que sus investigaciones tenían como punto de partida la resolución de la ecuación cúbica reducida de Tartaglia y, de nuevo, el juramento le impedía la divulgación de sus conocimientos. Ante esta solución la única alternativa que les quedaba era tratar de encontrar los documentos de Scipion del Ferro que treinta años antes ya había descubierto la solución de la ecuación cúbica reducida y tratar de usar estos conocimientos en lugar de los de Tartaglia, para no romper de esta forma el juramento. Para ello, viajaron a Bolonia y allí encontraron los apuntes de Del Ferro de puño y letra, y a partir de ahí justificaron que sus descubrimientos se apoyaban en los resultados de Del Ferro y no en los de Tartaglia.

Finalmente, en el año 1545 Cardano publicó su obra *Ars Magna*, cuyo capítulo IX incluía la solución de la ecuación cúbica tras esta introducción:

> "Scipio del Ferro de Bolonia treinta años antes descubrió esta regla y la proporcionó a Antonio Fior de Venecia, cuyo concurso con Niccolo Tartaglia de Brescia dio a Niccolo la ocasión de descubrirlo. Él me la dio en respuesta a mi solicitud, aunque guardando la demostración. Armado con esta ayuda, yo busqué la demostración de varias formas. Esta es muy difícil".

Además de esta introducción, también reconocía en parte de su obra su deuda con Tartaglia. A pesar de esto, Tartaglia entró en cólera y trató de discutir con Cardano y Ferrari. Tartaglia se sintió ultrajado ya que Cardano había roto su promesa de guardar el secreto. Terriblemente enfadado, decidió retar a Cardano a una competición, pero este último no se presentó ya que quiso permanecer alejado de esta disputa, aunque fue representado en su lugar por su alumno Ferrari (1522-1565). El ingenio y la agresividad de este último hicieron que Ferrari ganara el enfrentamiento, por lo que Tartaglia perdió su prestigio.

Debido a la trascendencia de Tartaglia y Cardano vamos a repasar un poco más sus logros. Tartaglia realizó estudios en el cálculo de trayectorias de proyectiles, lo que supuso un gran avance en la aplicación de las matemáticas en la artillería. Otro de sus descubrimientos fue el de la fórmula que lleva su nombre y que se emplea para el cálculo del volumen de un tetraedro a partir de las longitudes de sus lados:

$$V = \sqrt{\frac{1}{288}\begin{bmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & d^2 & e^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & f^2 & 1 \\ d^2 & e^2 & f^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

Ideó el triángulo que permite obtener los coeficientes del desarrollo binomial, llamado Triángulo de Tartaglia, que es la disposición numérica formada a partir de los coeficientes de los distintos desarrollos de la potencia n-ésima de un binomio cuando n toma sucesivamente los valores 0, 1, 2, 3, etc.

Disponiendo en filas sucesivas dichos coeficientes para cada valor de n, se obtiene la siguiente configuración:

1
1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Cada fila corresponde a los coeficientes del desarrollo de la potencia (n-1)-ésima de un binomio (n= 1, 2, 3, siendo n el orden que ocupa dicha fila), según la fórmula que Newton generalizó posteriormente, utilizando los números combinatorios.

Tartaglia también escribió un libro en el que recogió grandes resultados sobre teorías de números en los que se incluían algunos juegos de ingenio como los siguientes:

> "Tres matrimonios (en los cuales los maridos son extremadamente celosos) quieren cruzar un río en una barca en la que caben como máximo dos personas. Determinar cómo debe planificarse el cruce si no puede dejarse a ninguna mujer en compañía de un hombre a menos que su marido esté presente."
>
> Tres personas quieren repartirse el aceite que hay en una garrafa de 24 litros. Determinar cómo puede hacerse el reparto si se dispone de tres garrafas vacías con capacidades conocidas de 5, 11 y 13 litros".

Por su parte, Cardano también es conocido por otros aspectos aparte de la curiosa historia. Estudió medicina en la Universidad de Pavía tras convencer a su padre pues este quería que estudiara Derecho aunque terminó sus estudios en la Universidad de Padua, siendo un alumno brillante.

Fue profesor de matemáticas en la Fundación Piatti, en Milán, y aunque aún no estaba colegiado, curó a algunos enfermos graves, por lo que su fama se extendió y muchos médicos acudían a él para pedirle consejo. Un caso concreto fue el del Arzobispo de St. Andrews de Escocia que estaba a punto de morir ya que ningún médico de la corte francesa o alemana había podido hacer nada por él. Cardano fue llamado y milagrosamente salvó de la muerte al arzobispo. Aplicó sus conocimientos matemáticos en álgebra, mecánica, astrología, hidrodinámica, geología y probabilidad, y se dedicó a los juegos de apuesta, especialmente dados y ajedrez. Cardano fue un adicto al juego durante toda su vida (de hecho, muchos lo consideran como el descubridor de la teoría de probabilidad). También se le conoce porque fue el primero en hacer operaciones con números complejos.

Siglos XVI-XVII

Otro personaje importante de la historia del álgebra fue François Viète (1540-1603). Su gran labor se debe a que estableció un lenguaje simbólico de carácter algebraico que le permitió escribir de forma clara y precisa todas las ecuaciones, así como sus propiedades usando fórmulas generales. Esta notación es, salvo pequeños cambios, la que se emplea hoy día. Estableció, además, una fuerte relación entre el álgebra y la trigonometría, y es considerado por muchos como el padre del álgebra lineal.

Ya en pleno siglo XVII aparece la figura de René Descartes. Se entregó durante toda su vida a la investigación, y cuando se trasladó a París su fama se extendió y su casa se convirtió en el centro de reunión de aquellos a los que les gustaba discutir y discernir sobre distintos asuntos.

Hubo dos grandes revoluciones que marcaron sus trabajos. La primera de ellas fue que simplificó

la notación algebraica y la segunda fue la creación de la geometría analítica.

Al igual que Viéte, tiene una gran relevancia en el álgebra por su dedicación a la notación. Fue él quién optó por designar a las constantes con las primeras letras del alfabeto (a, b, c...) y a las incógnitas con las últimas letras del alfabeto (...x, y, z). La notación exponencial que empleamos actualmente fue también ideada por Descartes.

En la parte de su conocida obra *Discurso del método* llamada "Géometrie" recoge una teoría general sobre ecuaciones e incluye un método para resolver ecuaciones cuadráticas a partir de procesos geométricos, llegando a la conclusión de que el número de soluciones de una ecuación coincide con el grado de esta, resultado que no fue capaz de probar. En toda la "Géometrie" destaca una interrelación entre el álgebra y la geometría, lo que desembocó, en 1637, en la fusión de estas dos, dando lugar a la geometría analítica.

Otra de sus grandes aportaciones fue la creación del sistema de coordenadas cartesianas, lo que permitió posteriormente a Isaac Newton y a Gottfried Leibnitz el desarrollo del cálculo diferencial e integral. Descartes fue capaz de explicar distintos fenómenos de tipo magnético, óptico, en astronomía y en fisiología orgánica, etc. Por lo tanto, fue el precursor del determinismo físico y biológico.

Antes de comenzar el siglo XVIII hay que destacar a dos matemáticos: Fermat se desligó en cierta medida de las ecuaciones algebraicas que mantenían ocupados a la mayoría de matemáticos y es conocido por el progreso y el impulso que le dio a la teoría de números por el resultado por el que es más conocido "el último teorema de Fermat" cuyo enunciado es el siguiente: Si n es un entero mayor o igual que 3, entonces no existen números enteros x, y y z (excepto la solución trivial: $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$) tales que cumplan la igualdad:

$$zn = xn + yn$$

Antes de terminar el siglo hubo otro resultado relevante y fue la formulación del principio de inducción matemática a manos de Pascal en el año 1665.

Siglo XVIII

Una serie de matemáticos se dedicó a la resolución numérica de ecuaciones. Entre ellos figuran Halley, Lagrange, Fourier y MacLaurin.

Pero una de las grandes figuras a destacar en el siglo XVIII fue Leonhard Euler.

Su obra más conocida fue *Aritmética universal*, publicada en 1768, donde intervienen numerosos resultados como un sistema simbólico-literal del álgebra, aclaraciones sobre operaciones con números, monomios, radicales y complejos, reglas de extracciones de las raíces de los números, introducción de los números poligonales, fracciones decimales periódicas y el estudio de resolución de fracciones algebraicas.

También hizo grandes avances numéricos, pues estudió con detenimiento y detalle los números irracionales, imaginarios y complejos.

Gracias a Euler existe la actual teoría de congruencias como resultado de arduos y extensos trabajos que requirieron de grandes esfuerzos y dedicación.

En el siglo XVIII, la teoría de números adquiere una gran importancia y se desvincula del resto de las matemáticas como una rama independiente. En este progreso colaboraron Lagrange, Lambert y Euler, entre otros. Fundamentó la teoría de fracciones continuas, lo que desembocó en sus estudios sobre análisis diofántico y estudió los números primos tratando de resolver su distribución.

Siglo XIX

El siglo XIX tiene una gran importancia en la evolución del álgebra. A partir de aquí el álgebra evoluciona de forma diferente y aparece un álgebra de carácter más abstracta donde surgen, además, objetos desconocidos hasta entonces, pero que captan el interés de los matemáticos del momento como son los grupos, las matrices o los hipercomplejos. Además, el interés en torno al cual giraban las matemáticas también es distinto. Mientras que en el álgebra anterior lo principal era la resolución de ecuaciones numéricas, aquí se centra en el estudio de las estructuras algebraicas. Todo esto da lugar a lo que hoy en día se conoce como álgebra moderna. Debido a la productividad de esta época, por los trabajos y resultados que se obtuvieron, es conocido el siglo XIX como la edad de oro de las matemáticas.

Un problema importante que queda resuelto en este siglo es la posibilidad o no de la resolución de ecuaciones por radicales. Como se ha reflejado antes, ya era conocido el método de resolución de ecuaciones cúbicas debido a los trabajos de Scipion del Ferro, Tartaglia, Cardano y Ferrari, y de ecuaciones cuárticas por Ferrari. A partir de aquí, gran cantidad de matemáticos se lanzaron a la búsqueda de la resolución por radicales de ecuaciones de quinto grado o mayor, pero el camino no fue fácil.

Algunos personajes ya creían que tal búsqueda no tenía solución y admitieron la imposibilidad de solución de ecuaciones de quinto grado como Leibnitz (en el siglo XVII) y Gauss en su *Disertación doctoral*, aunque no fueron capaces de demostrarlo. Fue Ruffini quien encontró una demostración, aunque no lo suficientemente detallada y rigurosa pero ya se asemejaba bastante a la que posteriormente establecería Abel en el año 1826.

Pero Abel no pudo dar un criterio general de resolubilidad en radicales de las ecuaciones con coeficientes numéricos. Sí fue posible gracias a Evaristo Galois. Debido a la importancia de este matemático veamos a continuación más detalles sobre su vida.

Evaristo Galois: nació el 25 de octubre de 1811, en Bourg-la-Reine, cerca de París y falleció el 31 de mayo de 1832 en París.

Destacó por su labor de carácter científico y por su inmersión en la vida política, ya que fue un ardiente revolucionario en el París de 1830. Sufrió varios fracasos en su vida como los dos intentos fallidos de ingresar en la Escuela Politécnica, el primero de ellos a los 16 años.

Realizó unos trabajos muy amplios entre los años 1829 y 1830. Dichos trabajos trataban sobre fracciones continuas, teoría de ecuaciones y teoría de números. En 1831 fue expulsado de la escuela normal donde estudiaba debido a estar involucrado en los acontecimientos políticos.

Más tarde ingresa en el ejército después del fracaso de un curso que pretendía impartir sobre números imaginarios, teoría de las ecuaciones resolubles por radicales, teoría de números y teoría de las funciones elípticas, pero que no contó con oyentes, por lo que se suspendió.

Galois fue detenido y pasó casi un año en la cárcel. Pero su vida fue bastante desdichada ya que no tardaría en morir. Al ser puesto en libertad se vio envuelto en una cuestión de honor por una mujer y murió en el duelo consiguiente. Esa misma noche y antes de ir al duelo Galois escribía también a su amigo Auguste Chevalier:

> "He hecho algunos descubrimientos nuevos en análisis. El primero concierne a la teoría de ecuaciones; los otros, a las funciones enteras. En teoría de ecuaciones he

> investigado las condiciones de solubilidad de ecuaciones por medio de radicales; con ello he tenido ocasión de profundizar en esta teoría y describir todas las transformaciones posibles en una ecuación, aun cuando no sea posible resolverla por radicales. Todo ello puede verse aquí, en tres memorias... Haz petición pública a Jacobi o a Gauss para que den su opinión, no acerca de la veracidad, sino sobre la importancia de estos teoremas. Confío en que después algunos hombres encuentren de provecho organizar todo este embrollo".

En el amanecer del día siguiente Galois abandonó su habitación de la pensión Sieur Faultrier, en París, y se enfrentó en duelo de honor a un activista político llamado d'Herbinville, cerca de un estanque cercano. Galois quedó abandonado tras recibir un balazo en el abdomen. Un transeúnte lo encontró y llevó al Hôpital Cochin, donde murió al día siguiente. Catorce años después, Joseph Liouville publicó el legado que Galois dejó a Chevalier, naciendo de esta forma la rama de teoría de grupos.

Toda esa labor constituyó la teoría de grupos en la que aparecían entes matemáticos como cuerpo que Galois introdujo para otorgar carácter general al teorema del número de raíces de las congruencias de grado n de módulo primo. De esta forma, y con colaboración de otros matemáticos como Riemann y Dedekind, se constituyó la teoría actual de grupos, de la que Galois es principal fundador. A pesar de que la noción de grupo estaba ya esbozada en trabajos de Lagrange, Gauss, Abel, Ruffini y Cauchy, fue Galois el que introdujo los conceptos de subgrupo e isomorfismo mostrando claramente la teoría general.

Karl Friedrich Gauss: otro de los grandes personajes del siglo XIX, por la gran contribución que hizo a las matemáticas, fue Karl Friedrich Gauss. Quizás la más significativa fue la exposición de la primera demostración del teorema fundamental del álgebra, cuyo enunciado es el siguiente: "Todo polinomio de grado n, con coeficientes complejos, tiene exactamente n raíces, no forzosamente distintas, es decir contadas con su orden de multiplicidad".

Dicho resultado era conocido desde el siglo XVII por Descartes, pero a pesar de los intentos nadie había sido capaz de probarlo. Gauss lo hizo y, además en los años 1815, 1816 y 1849 dio tres nuevas demostraciones.

También es de destacar su papel de inventor que lo llevó a construir un telégrafo eléctrico y un magnetómetro bifiliar para medir el magnetismo. Los trabajos conjuntos de Gauss y su discípulo Riemann sobre la teoría del electromagnetismo fueron un anticipo de la ley universal de la gravitación de Newton.

MITAD DEL SIGLO XIX Y XX

En la segunda mitad del siglo XIX, las investigaciones se centran en tres campos distintos:

Teoría de grupos

Durante este periodo se desarrolló en profundidad la teoría de grupos. Destaca la obra de Cayley donde figura una definición bastante abstracta de grupo. A partir de 1870, la obra de Jordan adquiere también una relevancia especial pues en ella aparece el primer estudio de grupos infinitos tras haber realizado un resumen de la teoría de grupos finitos y sus aplicaciones. Los grupos infinitos fueron estudiados por los discípulos de Jordan, F. Klein y S. Lie.

A finales del siglo XIX y principios del siglo XX se forma el núcleo del álgebra actual a partir de la teoría de grupos que se desarrolla estudiando los grupos finitos, los grupos discretos infinitos y los grupos continuos de una forma independiente pues la teoría de grupos comienza a ramificarse.

De esta forma y, como se comentó anteriormente, el centro de las investigaciones algebraicas pasa a ser la teoría de grupos, subgrupos, anillos y estructuras, lo que constituye el periodo de las matemáticas modernas.

Teoría de números y de conjuntos

Otro campo en el que distintos matemáticos profundizaron durante el siglo XIX fue la teoría de números. Debido a la importancia de una fundamentación correcta de la teoría del número real, matemáticos como Dedekind, Weierstrass y Heine dedicaron sus esfuerzos a justificar de forma rigurosa dicha teoría.

También la teoría de conjuntos sufre un impulso gracias a los trabajos de G. Cantor, que identificó el número real con una sucesión convergente de números reales. A él pertenecen las teorías de conjuntos infinitos y los números transfinitos.

Entre 1879 y 1884 elaboró de forma sistemática la teoría de conjuntos, introduciendo el concepto de potencia de un conjunto, el concepto de punto límite y de conjunto derivado, lo que constituyó el núcleo de la teoría abstracta de conjuntos.

La fundamentación de la teoría de conjuntos y sus aplicaciones dieron lugar en el siglo XX a la lógica matemática, que es parte fundamental de las matemáticas modernas.

Álgebra lineal

Esta teoría surge de los sistemas de ecuaciones lineales y está directamente relacionada con la teoría de las determinantes y matrices. Se realizan gran cantidad de investigaciones en torno a la noción de invariante de las ecuaciones que tuvo una especial acogida en distintos campos como el análisis, la geometría, la mecánica y la física.

A finales del siglo XIX se produjo la unificación de estas tres tendencias a manos de Dedekind y Hilbert, fundamentalmente. A partir de aquí, y durante el siglo XX, se procedió a la axiomatización del álgebra donde destacaron Steinitz, Hasse, Krull y Van del Waerden, entre otros. Todo esto sirvió de base a las numerosas investigaciones llevadas a cabo durante el siglo XX que formaron parte del álgebra abstracta.

Inés Mª González García de Velasco

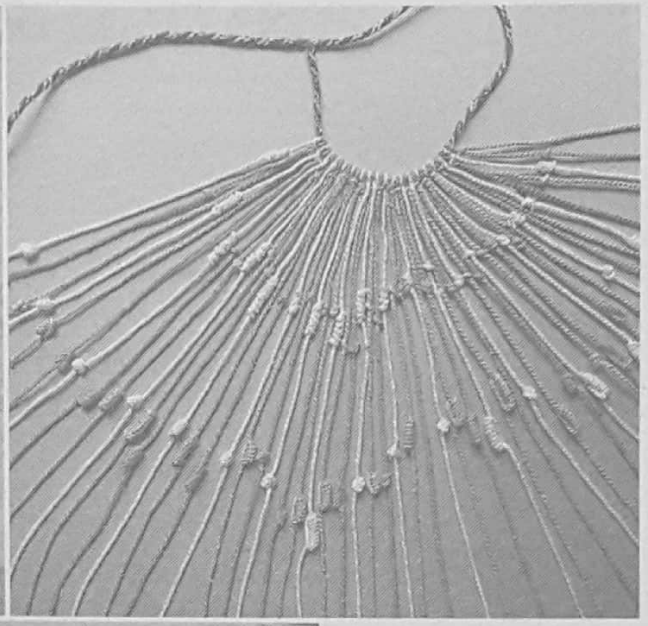
BIBLIOGRAFÍA

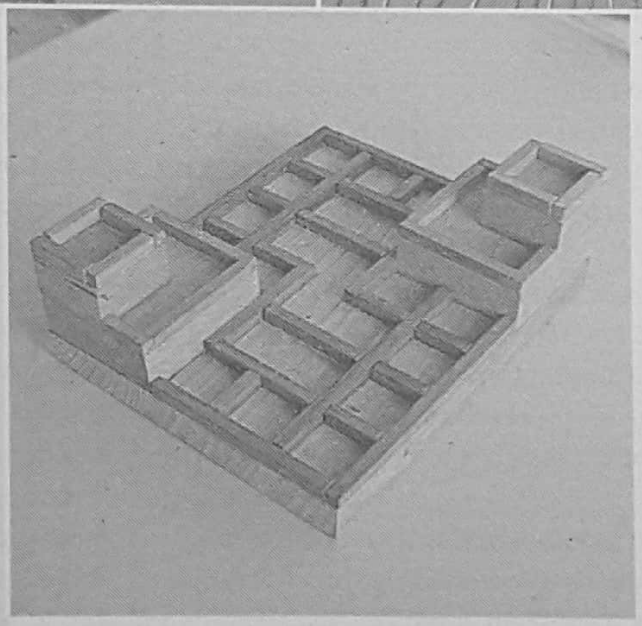
- BOYER, Carl. *Historia de las matemáticas.* Alianza Editorial, 2001.
- REY PASTOR, J. y BABINI, J. *Historia de las matemáticas.* Gedisa, 2000.
- DURÁN GUARDEÑO, A. *El legado de las matemáticas* SAEM Thales.

Tomado y adaptado de *I+E Revista digital Investigación y Educación*. Número 27, diciembre de 2006.

Capítulo

1





Nociones preliminares

CAPÍTULO I

NOCIONES PRELIMINARES

Objetivos

- Realizar operaciones algebraicas elementales (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación).
- Conocer y utilizar el lenguaje algebraico desarrollado en el presente capítulo.

Introducción

Hemos considerado este capítulo preliminar porque somos conscientes de que el lector necesita conocer previamente algunos aspectos básicos del álgebra. Así, estará mejor preparado para comprender con mayor eficiencia el desarrollo de los temas.

Para empezar, recordaremos brevemente a los antiguos peruanos y su conocimiento de las matemáticas. Los quipus y las *yupanas* fueron instrumentos importantes para la matemática en la administración incaica. Esto les permitió conocer a los incas una aritmética sencilla pero efectiva, para fines contables, basada en el sistema decimal; si bien desconocieron el cero, dominaron las cuatro operaciones básicas, que son las que en este capítulo repasaremos.

Los quipus fueron un sistema de asociación mental de cuerdas anudadas mediante las cuales se registraban todo tipo de información; si se trataban de resultados de operaciones matemáticas, solo se anudaban las realizadas anteriormente en los "ábacos incas" o *yupanas*. También era utilizado para guardar información de noticias censales, de montos de productos y de subsistencias conservadas en los depósitos. Algunos cronistas mencionan el uso de quipus para guardar noticias históricas, sin embargo, no se ha descubierto cómo funcionaba ese sistema.

En el caso de la información numérica, las operaciones matemáticas eran realizadas previamente en las *yupanas*, de piedra tallada o de barro; tenían compartimentos que correspondían a las unidades decimales y se contaba con la ayuda de piedrecitas o granos de maíz o quinua. Se podían indicar unidades, decenas, centenas, etc., de acuerdo a si estaban implícitas en cada operación. Recientes investigaciones respecto a estos ábacos incaicos sugieren que en ellos se podían calcular cifras considerables basándose en un sistema probablemente no decimal, sino basado en el número 40.

En el Tahuantinsuyo, el *quipucamayoc* era el personal especializado en manejar las cuerdas y podía tener a su cargo las de toda una región o *suyu*. En algunos poblados indígenas todavía sirven para registrar los productos de las cosechas y los animales de las comunidades, aunque la tradición está perdiéndose.

▸ ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Para definir las operaciones algebraicas partiremos de algunos ejemplos prácticos.

1. Juan tiene 7 caramelos y Ana, 5 caramelos. Si los juntáramos en una sola bolsa tendríamos 12 caramelos en total. Esto se puede simbolizar de la siguiente manera:

   $$5car+7car=12car$$

   o también se puede expresar así:

   $$5c+7c=12c$$

2. Si tuviéramos 6 caramelos y 7 panes y quisiéramos juntarlos en una sola bolsa, solo diríamos: "se tienen 6 caramelos y 7 panes"; es decir, no podría efectuarse operación aritmética alguna.

> **▸▸ Nota**
>
> En el mundo en que vivimos encontramos diversos componentes, como las frutas; por ello, si tenemos 5 naranjas y 7 manzanas no podemos decir que tenemos 12 naranjas ni decir 12 manzanas, pues no se pueden sumar manzanas con naranjas; de ahí viene la idea de definir términos semejantes.

El primer ejemplo también se puede expresar de la siguiente forma:

$$7x+5x=12x$$

o en otras circunstancias se tendrá:

$$7xy^3+5xy^3=12xy^3$$

Donde

I. Elementos del mismo conjunto como $7xy^3$ y $5xy^3$ se llaman términos semejantes.

II. A la forma de representar mediante una generalización de $7xy^3$ y $5xy^3$ se le llama expresión algebraica; en el capítulo III se verá detalladamente.

III. Para reducir dos o más expresiones, estas deben ser semejantes.

Se dice que dos términos son semejantes en x si y solo si x tiene el mismo exponente en ambos términos de coeficientes no nulos. Los términos semejantes se pueden reducir por la ley distributiva de multiplicación respecto a la adición, por la izquierda o derecha.

$$(a+b)x=ax+bx \text{ y } x(m+n)=xm+xn$$

Ejemplos

1. $3x^5+8x^5=(3+8)x^5=11x^5$
2. $35x^7-22x^7=(35-22)x^7=13x^7$
3. $-16x^2+11x^2=(-16+11)x^2=-5x^2$

   Luego, diremos que $3x^3y^5$ y $-2x^3y^5$ son semejantes puesto que tienen los mismos exponentes para x y para y, respectivamente.

4. Adicione $3x^2-8x+1$ con $-2x^2+5x$.

   Resolución

   Ordenando de acuerdo a sus términos semejantes:

   $$\left.\begin{array}{r} 3x^2-8x+1 \\ -2x^2+5x \end{array}\right\}(+)$$
   $$\overline{(3-2)x^2+(-8+5)x+1}$$

   La suma es equivalente a x^2-3x+1.

5. Reste $3x+5$ de $2x^2-8x+3$.

   Resolución

   Ordenando y reduciendo los términos semejantes:

   $$\left.\begin{array}{r} 2x^2-8x+3 \\ 3x+5 \end{array}\right\}(-)$$
   $$\overline{2x^2+(-8-3)x+(3-5)}$$

   La diferencia es equivalente a $2x^2-11x-2$.

6. Dadas las expresiones

$A=4x^3-7xy-5xy^5$;

$B=-6x^3+9xy-3xy^5$;

halle el equivalente de:

I. $A+B$

II. $A-B$

III. $2A+3B$

Resolución

I.
$$\left.\begin{array}{r} A=4x^3-7xy-5xy^5 \\ B=-6x^3+9xy-3xy^5 \end{array}\right\}(+)$$
$$A+B=(4-6)x^3+(-7+9)xy+(-5-3)xy^5$$
$$\rightarrow\ A+B=-2x^3+2xy-8xy^5$$

II.
$$\left.\begin{array}{r} A=4x^3-7xy-5xy^5 \\ B=-6x^3+9xy-3xy^5 \end{array}\right\}(-)$$
$$A-B=(4-(-6))x^3+(-7-9)xy+(-5-(-3))xy^5$$
$$\rightarrow\ A-B=10x^3-16xy-2xy^5$$

III. $2A=2(4x^3-7xy-5y^5)=8x^3-14xy-10xy^5$

$3B=3(-6x^3+9xy-3xy^5)=-18x^3+27xy-9xy^5$

$\rightarrow 2A+3B=(8-18)x^3+(-14+27)xy+(-10-9)xy^5$

$\rightarrow 2A+3B=-10x^3+13xy-19xy^5$

7. Dados

$P=(c-1)x^2+3x+3y$;

$Q=5x^2-3(x+y)$;

si $P-Q$ se reduce a $6(x+y)$, halle el valor de c.

Resolución

Ordenando:

$$\left.\begin{array}{rl} P= & (c-1)x^2+3x+3y \\ Q= & 5x^2-3x-3y \end{array}\right\}(-)$$
$$P-Q=(c-1-5)x^2+6(x+y)$$

De donde: $c-1-5=0 \quad\rightarrow\quad c=6$.

8. Efectúe

$-8y-\{-7y-[(3y-7x)-(2y-8x)]+5x\}$

Resolución

Efectuando por partes desde la parte interna

$$-8y-\{-7y-\underbrace{[(3y-7x)-(2y-8x)]}_{\substack{3y-7x-2y+8x \\ (x+y)}}+5x\}$$
$$=-8y-\{-7y-[y+x]+5x\}$$
$$=-8y-\{-7y-y-x+5x\}$$
$$=-8y-\{-8y+4x\}$$
$$=\cancel{-8y}+\cancel{8y}-4x$$
$$=-4x$$

9. De a^2, sustraiga la suma de $3ab-6$ y $3a^2-8ab+5$.

Resolución

I. Primero sumamos

$$(3ab-6)+(3a^2-8ab+5)$$

Así:

$$\left.\begin{array}{r} 3ab-6 \\ 3a^2-8ab+5 \end{array}\right\}(+)$$
$$3a^2-5ab-1$$

II. La suma: $3a^2-5ab-1$ será el sustraendo que debemos restar de a^2.

$$\left.\begin{array}{r} a^2 \\ 3a^2-5ab-1 \end{array}\right\}(-)$$
$$-2a^2+5ab+1$$

III. Obtenemos como respuesta:

$$-2a^2+5ab+1$$

Otro método

Del enunciado se tiene:

$$a^2-[(3ab-6)+(3a^2-8ab+5)]$$

Resolviendo

$$=a^2-[3ab-6+3a^2-8ab+5]$$
$$=a^2-[-5ab-1+3a^2]$$
$$=a^2+5ab+1-3a^2$$
$$=-2a^2+5ab+1$$

10. Simplifique la expresión

$$-[-3a-\{b+[-a+(2a-b)-(-a+b)]+3b\}+4a]$$

Resolución

Empezaremos simplificando los términos semejantes más internos, es decir, los afectados por los paréntesis.

$$-[-3a-\{b+\underbrace{[-a+(2a-b)-(-a+b)]}_{\underbrace{-a+2a-b+a-b}_{2a-2b}}+3b\}+4a]$$

Luego

$$-[-3a-\underbrace{\{b+[2a-2b]+3b\}}_{\underbrace{b+2a-2b+3b}_{2a+2b}}+4a]$$

$$=-[-3a-(2a+2b)+4a]$$
$$=-[-3a-2a-2b+4a]$$
$$=-[-a-2b]=a+2b$$

Finalmente, se tiene $a+2b$.

Ejercicio para el lector

Simplifique

$$[-15a+(2a-6b)-(a+9b)-[1-3(a-b)]]$$

▸ MULTIPLICACIÓN

Es necesario recordar aspectos esenciales de la multiplicación, como:

LEY DE LOS SIGNOS

- $(+)\ (+)=(+)$
- $(-)\ (-)=(+)$
- $(-)\ (+)=(-)$
- $(+)\ (-)=(-)$

PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES

- $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$
- $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$
- $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$
- $(a^\alpha\cdot b^\beta)^n=a^{\alpha\cdot n}\cdot b^{\beta\cdot n}$

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

$$\boxed{a(b+c)=ab+ac}$$

Ejemplos

1. Efectúe $(3x^4+5xy^3)(2xy^3-y)$

Resolución

Efectuando conforme se indica

$$(3x^4+5xy^3)(2xy^3-y)$$

$$=3x^4\cdot 2xy^3-3x^4\cdot y+5xy^3\cdot 2xy^3-5xy^3\cdot y$$
$$=6x^5y^3-3x^4y+10x^2y^6-5xy^4$$

2. Efectúe

$$(a^2m+bn^3)(a^3b+mn+abmn^2)$$

Resolución

Distribuyendo como se indica

$$(a^2m+bn^3)(a^3b+mn+abmn^2)$$

$$=a^2m\cdot a^3b+a^2m\cdot mn+a^2m\cdot abmn^2+$$
$$+bn^3\cdot a^3b+bn^3\cdot mn+bn^3\cdot abmn^2$$

$$=a^5bm+a^2m^2n+a^3bm^2n^2+a^3b^2n^3+$$
$$+bmn^4+ab^2mn^5$$

PROPIEDAD ASOCIATIVA

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$$

Ejemplos

1. Multiplique $2a^2$ por $3a^3$.

   Resolución

   $$2a^2\cdot 3a^3=2\cdot 3\cdot a^2\cdot a^3=6a^{2+3}=6a^5$$

2. Efectúe la multiplicación de

   $$\left(-x^2y\right)\left(-\frac{2}{3}x^m\right)\left(-\frac{3}{4}a^2y^n\right).$$

   Resolución

   $$=(-)(-)(-)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)x^2yx^ma^2y^n$$

   $$=-\frac{1}{2}x^{2+m}y^{1+n}a^2$$

3. Multiplique $3x^2-5xy+y^3$ por $-2x^3y^4$

   Resolución

   $$(3x^2-5xy+y^3)(-2x^3y^4)$$

   Aplicando la propiedad distributiva

   $$=-3\cdot 2x^2\cdot x^3y^4+5\cdot 2xy\cdot x^3y^4-2y^3\cdot x^3y^4$$

   $$=-6x^5y^4+10x^4y^5-2x^3y^7$$

4. Multiplique $(2x+3y^4)$ por $(5x^2-y)$

   Resolución

   Aplicando la propiedad distributiva conforme se indica:

   $$(2x+3y^4)\,(5x^2-y)$$

   $$=2x\cdot 5x^2-2x\cdot y+3y^4\cdot 5x^2-3y^4\cdot y$$

   $$=10x^3-2xy+15x^2y^4-3y^5$$

5. Multiplique

   $a^{m+2}-4a^m-2a^{m+1}$ por a^2-2a

   Resolución

   Análogamente conforme se indica:

   $$(a^{m+2}-4a^m-2a^{m+1})(a^2-2a)$$

   $$=a^{m+2}\cdot a^2-4a^m\cdot a^2-2a^{m+1}\cdot a^2-a^{m+2}\cdot 2a+$$
   $$+4a^m\cdot 2a+2a^{m+1}\cdot 2a$$

   $$=a^{m+4}-\cancel{4a^{m+2}}-2a^{m+3}-2a^{m+3}+$$
   $$+8a^{m+1}+\cancel{4a^{m+2}}$$

   $$=a^{m+4}-4a^{m+3}+8a^{m+1}$$

6. Efectúe

   $3x(x+3)(x-2)(x+1)$

   Resolución

   Efectuando por partes:

   I. $3x(x+3)=3x^2+9x$

   II. $3x(x+3)\,(x-2)$

   $$(3x^2+9x)(x-2)$$

   $$=3x^3-6x^2+9x^2-18x$$

   $$=3x^3+3x^2-18x$$

   III. $(3x^3+3x^2-18x)(x+1)$

   $$=3x^4+3x^3+3x^3+3x^2-18x^2-18x$$

   $$=3x^4+6x^3-15x^2-18x$$

7. Reduzca

$(x+5)(2x-3)-(2x+1)(x-4)$

Resolución

Aplicando la propiedad distributiva:

$$(x+5)(2x-3)-(2x+1)(x-4)$$

$$=(2x^2-3x+10x-15)-(2x^2-8x+x-4)$$

$$=2x^2+7x-15-(2x^2-7x-4)$$

$$=\cancel{2x^2}+7x-15-\cancel{2x^2}+7x+4$$

$$=14x-11$$

De donde lo reducido es $14x-11$.

8. Reduzca $(2x^3+5xy)(x-y)-(x^3+xy)(2x-5y)$.

Resolución

Aplicando la propiedad distributiva:

$$(2x^3+5xy)(x-y)-(x^3+xy)(2x-5y)$$

$$=(2x^4-2x^3y+5x^2y-5xy^2)-(2x^4-5x^3y+$$
$$+2x^2y-5xy^2)$$

$$=\cancel{2x^4}-2x^3y+5x^2y-\cancel{5xy^2}-\cancel{2x^4}+5x^3y-$$
$$-2x^2y+\cancel{5xy^2}$$

$$=3x^3y+3x^2y$$

EQUIVALENCIAS NOTABLES

- $(a\pm b)^2\equiv a^2\pm 2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b)\equiv a^2-b^2$
- $(x+a)(x+b)\equiv x^2+(a+b)x+ab$

Ejemplos

Efectúe

1. $(2x+3y)^2$
2. $(3x^2-5y^4)^2$
3. $(4x+3y)(4x-3y)$
4. $(x^3+5y^4)(x^3-5y^4)$
5. $(x+5)(x+3)$
6. $(2x+1)(2x+5)$
7. $(x-7)(x+5)$

Resolución

Aplicando las equivalencias notables:

1. $(2x+3y)^2=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2$
$=4x^2+12xy+9y^2$

2. $(3x^2-5y^4)^2=(3x^2)^2-2(3x^2)(5y^4)+(5y^4)^2$
$=9x^4-30x^2y^4+25y^8$

3. $(4x+3y)(4x-3y)=(4x)^2-(3y)^2=16x^2-9y^2$

4. $(x^3+5y^4)(x^3-5y^4)=(x^3)^2-(5y^4)^2=x^6-25y^8$

5. $(x+5)(x+3)=x^2+(5+3)x+5\cdot 3=x^2+8x+15$

6. $(2x+1)(2x+5)=(2x)^2+(1+5)2x+1\cdot 5$
$=4x^2+12x+5$

7. $(x-7)(x+5)=x^2+(-7+5)x+(-7)(5)$
$=x^2-2x-35$

▸ DIVISIÓN

Recordando aspectos básicos:

LEY DE LOS SIGNOS

- $\dfrac{(+)}{(+)}=(+)$
- $\dfrac{(-)}{(+)}=(-)$
- $\dfrac{(-)}{(-)}=(+)$
- $\dfrac{(+)}{(-)}=(-)$

PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES

- $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$
- $\left(\dfrac{a^\alpha}{b^\beta}\right)^n=\dfrac{a^{\alpha n}}{b^{\beta n}}$
- $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n};\ a\neq 0$

Ejemplos

1. Divida $8x^5y^{10}$ entre $-2x^3y^2$.

Resolución

$$\frac{8x^5y^{10}}{-2x^3y^2}=\left(\frac{8}{-2}\right)x^{5-3}\cdot y^{10-2}=-4x^2y^8$$

2. Divida $64x^5y^8$ entre $4y^{-2}x$.

Resolución

$$\frac{64x^5y^8}{4y^{-2}x}=\left(\frac{64}{4}\right)x^{5-1}\cdot y^{8-(-2)}$$

$$=16x^4y^{8+2}=16x^4y^{10}$$

Propiedades

I. $\frac{x}{y}=x\left(\frac{1}{y}\right)$

II. $\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{w}{k}\right)=\frac{x\cdot w}{y\cdot k}$

III. $\frac{x\cdot y}{w\cdot x}=\frac{y}{w}$

IV. $\frac{x}{y}+\frac{z}{y}=\frac{x+z}{y}$

V. $\frac{x}{y}+\frac{w}{z}=\frac{xz+yw}{yz}$

VI. $\frac{x}{y}\div\frac{w}{z}=\frac{xz}{yw}$

VII. $x\pm\frac{y}{w}=\frac{xw\pm y}{w}$

3. Divida $3a^5+6a^4b+9a^3b^2$ entre $3a^2$.

Resolución

Aplicando la propiedad distributiva de la división

$$\frac{3a^5+6a^4+9a^3b^2}{3a^2}=\frac{3a^5}{3a^2}+\frac{6a^4b}{3a^2}+\frac{9a^3b^2}{3a^2};\ a\neq 0$$

$$=a^3+2a^2b+3ab^2$$

4. Simplifique $\frac{x^2-4}{6x^2+12x}$, si $x\neq -2 \rightarrow x\neq 0$.

Resolución

Como $6x^2+12x=6x(x+2)$, entonces

$$\frac{x^2-4}{6x^2+12x}=\frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{6x\cancel{(x+2)}}=\frac{x-2}{6x}$$

5. Reduzca

$$\frac{x^2-9}{3x^2+11x-4}\cdot\frac{5x+20}{x^2-4x+3}$$

Resolución

Observamos que

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

$$3x^2+11x-4=(3x-1)(x+4)$$

Entonces, escribimos sus equivalentes

$$\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{(3x-1)\cancel{(x+4)}}\cdot\frac{5\cancel{(x+4)}}{(x-1)\cancel{(x-3)}}=$$

$$=\frac{5(x+3)}{(3x-1)(x-1)}$$

6. Efectúe

$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{y-1}{y+1}+\frac{-2xy}{(x-1)(y+1)}$$

Resolución

Sumamos las dos primeras fracciones y aplicamos la propiedad (V)

$$\frac{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)}{(x-1)(y+1)}+\frac{-2xy}{(x-1)(y+1)}$$

Aplicando la propiedad (IV) y efectuando

$$\frac{xy+x+y+1+xy-x-y+1-2xy}{(x-1)(y+1)}=$$

$$=\frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

7. Reduzca $(x+1)-\dfrac{x^3+5x^2-18}{x^2+5x+6}$.

Resolución

Aplicando la propiedad (VII) se tiene

$$\frac{(x+1)(x^2+5x+6)-(x^3+5x^2-18)}{x^2+5x+6}$$

Efectuando las multiplicaciones obtendremos:

$$\frac{x^3+5x^2+6x+x^2+5x+6-x^3-5x^2+18}{x^2+5x+6},$$

cuyo equivalente simplificado es

$$\frac{x^2+11x+24}{x^2+5x+6}=\frac{(x+3)(x+8)}{(x+3)(x+2)}=\frac{x+8}{x+2}.$$

8. Simplifique $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{x+5}{1-x^2}$.

Resolución

Equivalente escribimos

$$\underbrace{\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}}+\frac{x+5}{x^2-1}$$

$$\frac{2(x-1)+3(x+1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{x+5}{x^2-1}$$

$$\frac{2x-2+3x+3}{x^2-1}+\frac{x+5}{x^2-1}$$

$$\frac{5x+1+x+5}{x^2-1}=\frac{6x+6}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{6(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{6}{x-1}$$

9. Efectúe y simplifique la expresión.

$$S=\frac{1+\dfrac{2xy}{x^2+y^2}}{1+\dfrac{x}{y}}$$

Resolución

Aplicando la propiedad (VII) en el numerador y el denominador, luego multiplicamos extremos y medios.

$$S=\frac{\dfrac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2}}{\dfrac{y+x}{y}}=\frac{(x^2+y^2+2xy)y}{(x^2+y^2)(x+y)}$$

$$S=\frac{(x+y)^2y}{(x^2+y^2)(x+y)}=\frac{(x+y)y}{x^2+y^2}=\frac{xy+y^2}{x^2+y^2}$$

10. Simplifique la expresión M.

$$M=\frac{x-2}{x-\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{x+2}}}$$

Resolución

Esta forma de fracciones se llaman continuas y se simplifican efectuando las operaciones de abajo hacia arriba.

Para el ejemplo, se tiene en el denominador

$$1-\frac{2}{x+2}=\frac{x+2-2}{x+2}=\frac{x}{x+2}$$

Luego

$$M=\frac{x-2}{x-\dfrac{1}{\dfrac{x}{x+2}}}=\frac{x-2}{x-\dfrac{x+2}{x}}$$

$$M=\frac{x-2}{\dfrac{x^2-x-2}{x}}=\frac{x(x-2)}{x^2-x-2}$$

como $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ entonces

$$M=\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{x}{x+1}$$

11. Efectúe

$$\left(\frac{1}{x-a}\right)\left(\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2-b^2}\right)\left(\frac{x^2-c^2}{x^2-(a+c)x+ac}\right)(x-a)$$

$x \neq \pm a;\ x \neq b;\ x \neq \pm c.$

Resolución

Recuerde

$x^2-b^2=(x+b)(x-b)$

$x^2-c^2=(x+c)(x-c)$

$x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$

Luego la expresión es equivalente a

$$\left(\frac{1}{\cancel{x-a}}\right)\frac{\cancel{(x-a)}\,\cancel{(x-b)}}{(x+b)\cancel{(x-b)}}\cdot\frac{(x+c)\cancel{(x-c)}}{\cancel{(x-a)}\,\cancel{(x-c)}}\cdot\cancel{(x-a)}$$

$$=\frac{x+c}{x+b}$$

12. Efectúe

$$\left(\frac{n}{p}+1\right)-\left[1+\frac{\frac{m+n}{p}+1}{\frac{m+p}{n}+1}\right]+10.$$

Resolución

Efectuando convenientemente

$$\frac{n}{p}\cancel{+1}\cancel{-1}-\frac{\cancel{\frac{m+n+p}{p}}}{\cancel{\frac{m+n+p}{n}}}+10$$

$$=\frac{\cancel{n}}{\cancel{p}}-\frac{\cancel{n}}{\cancel{p}}+10=10$$

13. Efectúe

$$\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

Resolución

Como

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}=\frac{b+c+a}{a(b+c)} \text{ y}$$

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}=\frac{b+c-a}{a(b+c)}$$

operamos dentro de los paréntesis, así:

$$\left(\frac{\frac{b+c+a}{a(b+c)}}{\frac{b+c-a}{a(b+c)}}\right)\left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=\left(\frac{b+c+a}{b+c-a}\right)\left(\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=\left(\frac{b+c+a}{b+c-a}\right)\cdot\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$$

ECUACIONES Y DESPEJE DE INCÓGNITAS

Se expondrá mediante ejemplos prácticos, utilizando expresiones que se considerarán bien definidas, en las cuales se aplicarán las siguientes propiedades.

1. $a=b$ si y solo si $a+c=b+c$
2. $a=b$ si y solo si $a\cdot c=b\cdot c;\ c\neq 0$

Ejemplos

1. Halle x en $\frac{x}{2}=\frac{x}{6}-\frac{1}{4}$.

Resolución

Multiplicando todo por 12 (12 es el mínimo común múltiplo de 2, 6 y 4) para eliminar denominadores

$$\rightarrow\ 12\left(\frac{x}{2}\right)=12\left(\frac{x}{6}\right)-12\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$6x=2x-3$$

$$6x-2x=-3$$

$$4x=-3$$

$$\therefore\ x=-\frac{3}{4}$$

2. De $u=a+(n-1)r$, despeje n.

Resolución

De $u=a+(n-1)r$

$$\rightarrow\ (n-1)r=u-a$$

(dividiendo ambos miembros entre r)

$$\rightarrow\ n-1=\frac{u-a}{r}$$

Trasponiendo términos

$$n=1+\frac{u-a}{r}$$

$$\rightarrow\ n=\frac{r+u-a}{r}$$

También se puede despejar n de la siguiente forma

$$u=a+nr-r$$

$$\leftrightarrow\ u-a+r=nr$$

$$\leftrightarrow\ nr=u-a+r$$

$$\leftrightarrow\ n=\frac{u-a+r}{r}=\frac{r+u-a}{r}$$

3. De $\frac{t^2}{f}=\frac{2}{p'}-\frac{3}{p}$, despeje p'.

Resolución

Como queremos despejar p' transponemos $-\frac{3}{p}$ al primer miembro y queda solo p' en el segundo miembro. Así:

$$\frac{t^2}{f}=\frac{2}{p'}-\frac{3}{p}\ \rightarrow\ \frac{t^2}{f}+\frac{3}{p}=\frac{2}{p'}$$

Luego

$$\frac{t^2p+3f}{fp}=\frac{2}{p'}\ \rightarrow\ \frac{fp}{t^2p+3f}=\frac{p'}{2}$$

$$\rightarrow\ p'=\frac{2fp}{t^2p+3f}$$

4. De la expresión $e=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$, despeje:

I. g II. v_0

Resolución

I. Para despejar g se transpone v_0t al primer miembro y se deja solo $\frac{1}{2}gt^2$ en el segundo miembro. Así:

$$e=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$$

$$\rightarrow\ e-v_0t=\frac{1}{2}gt^2$$

Luego

$$2(e-v_0t)=gt^2$$

$$\rightarrow\ g=\frac{2(e-v_0t)}{t^2}$$

II. Despejando v_0, multiplicamos por 2

$$2e=2v_0t+gt^2\ \rightarrow\ 2v_0t=2e-gt^2$$

$$v_0=\frac{2e-gt^2}{2t}$$

5. De $\frac{1}{x}+\frac{a}{x}=\frac{ab}{x+b}$, despeje:

I. b II. x

Resolución

I. Escribimos la ecuación así:

$$\frac{1+a}{x}=\frac{ab}{x+b} \rightarrow (1+a)(x+b)=xab$$

efectuando

$$(1+a)(x+b)=xab$$

$$\rightarrow x+b+ax+ab=x\,ab$$

Luego

$$x+ax=xab-ab-b$$

$$\rightarrow x(1+a)=b(ax-a-1)$$

$$\therefore\ b=\frac{x(a+1)}{ax-a-1};\quad \forall\, ax\neq a+1$$

II. De $\frac{1+a}{x}=\frac{ab}{x+b}$

$$\rightarrow (1+a)(x+b)=xab$$

$$\rightarrow x+b+ax+ab=xab$$

$$b+ab=xab-x-ax$$

$$\rightarrow b+ab=x(ab-a-1)$$

De donde $x=\frac{b(a+1)}{ab-a-1}$

6. Despeje $\frac{r+q}{q-x}$ de la igualdad

$$K=\frac{a-1}{1+\sqrt[a-1]{\frac{r+q}{q-x}}}$$

Resolución

La igualdad es equivalente a

$$1+\sqrt[a-1]{\frac{r+q}{q-x}}=\frac{a-1}{K}$$

Luego

$$\sqrt[a-1]{\frac{r+q}{q-x}}=\frac{a-1}{K}-1$$

de donde $\sqrt[a-1]{\frac{r+q}{q-x}}=\frac{a-1-K}{K}$,

elevando a la $(a-1)$ resulta

$$\frac{r+q}{q-x}=\left(\frac{a-1-K}{K}\right)^{a-1}$$

7. Despeje

$f_{(x)}$ de $f^2_{(x)}-4f_{(x)}x+4x^2=0$.

Resolución

De la ecuación podemos identificar que se trata de una equivalencia notable.

$$\boxed{a^2-2ab+b^2\equiv(a-b)^2}$$

Como $f^2_{(x)}-4f_{(x)}\cdot x+4x^2\equiv(f_{(x)}-2x)^2$

Entonces $(f_{(x)}-2x)^2=0$,

$$\rightarrow f_{(x)}-2x=0 \rightarrow f_{(x)}=2x$$

8. Despeje $P_{(x)}$ de $P^2_{(x)}+x+3=4-6x^2-5xP_{(x)}$.

Resolución

Transponiendo los términos al primer miembro

$$P^2_{(x)}+5xP_{(x)}+6x^2+x-1=0$$

$$\begin{array}{ll} P_{(x)} & (3x \quad -1) \\ P_{(x)} & (2x \quad 1) \end{array}$$

Note que

$$6x^2+x-1=(3x-1)(2x+1)$$

Por el método del aspa simple

$$\left[P_{(x)}+(3x-1)\right]\left[P_{(x)}+(2x+1)\right]=0$$

de donde $P_{(x)}=-3x+1$ o $P_{(x)}=-2x-1$

9. Despeje x de $m=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+9}$.

Resolución

Como $m=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+9}$

$\rightarrow\ m\sqrt{x}+9m=\sqrt{x}-1$

$\rightarrow\ (m-1)\sqrt{x}=-1-9m$

$\rightarrow\ \sqrt{x}=-\dfrac{1+9m}{m-1}=\dfrac{1+9m}{1-m}$

Luego, elevamos al cuadrado

$\therefore\ x=\left(\dfrac{1+9m}{1-m}\right)^2$

10. Despeje x en $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{m-1}{m+1}$.

Resolución

Una propiedad de la aritmética (proporciones) es:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ \rightarrow\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}}$$

Aplicando esta propiedad tenemos

$$\frac{x+1+x-1}{(x+1)-(x-1)}=\frac{(m-1)+(m+1)}{(m-1)-(m+1)}$$

$$\frac{2x}{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}=\frac{2m}{\cancel{m}-1-\cancel{m}-1}\ \rightarrow\ \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=\frac{\cancel{2}m}{\cancel{-2}}$$

Luego

$$x=-m$$

Otro método

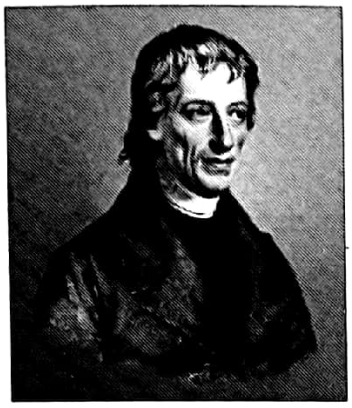
Por simple inspección en el segundo miembro, multiplicando por -1 tanto al numerador como al denominador.

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{-(m-1)}{-(m+1)}=\frac{(-m)+1}{(-m)-1}$$

De donde se observa $x=-m$.

Biografía

Bernard Bolzano



Nació en Praga, Bohemia, el 5 de octubre de 1781 y murió en la misma ciudad el 18 de diciembre de 1848. Fue matemático, lógico, filósofo y teólogo, y desarrolló importantes aportes en los campos de las matemáticas y de la teoría del conocimiento.

A los dieciséis años se inscribió en la Facultad de Filosofía de la Universidad de Praga; influenciado por la lectura de la obra de Kaestner *Mathematische Anfangsgründe* (Fundamentos matemáticos), demostró especial predilección por la filosofía de las matemáticas. Al respecto, escribió en sus años universitarios que esta preferencia se centraba en los aspectos especulativos de la ciencia matemática. Luego de cuatro años comenzó sus estudios de teología a la par que preparaba su tesis doctoral en geometría, grado académico que consiguió en 1804, tras haber puesto énfasis en su investigación sobre las características de una correcta demostración matemática.

En 1805, Bolzano se ordenó como sacerdote católico romano y obtuvo la cátedra de Filosofía y Religión de su alma máter. En relación con esta cátedra, se debe mencionar que con el paso de los años tuvo dificultades en su relación con las autoridades universitarias, pues en la coyuntura política de la época una asignatura como aquella estaba destinada a contrarrestar las ideas nacionalistas, influencia de la Revolución francesa, contrarias también a las ideas conservadoras de la Iglesia católica. Sin embargo, las enseñanzas de Bolzano no tuvieron el éxito esperado ya que eran pacifistas, más bien instaba a una reforma total de los sistemas educativos, sociales y económicos que dirigiera los intereses de la nación hacia la paz en lugar de hacia el conflicto armado entre naciones; además, sus ideas estaban impregnadas por una fuerte exigencia de justicia política. A esto hay que sumarle que era muy respetado entre colegas y discípulos por sus cualidades intelectuales, lo que finalmente provocó su destitución de la cátedra en 1819, luego de recibir algunas presiones del gobierno. Tras ser acusado de herejía, fue puesto bajo arresto domiciliario y se le prohibió publicar al manifestar su disconformidad con la decisión de la universidad. A pesar de esto, su obra se publicó fuera del imperio austriaco de los Habsburgo sin afectar su producción intelectual, tan importante para el posterior desarrollo de la ciencia.

En el terreno de sus escritos, Bolzano redactó una serie de textos sobre los fundamentos de las matemáticas: en 1810, *Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Erste Lieferung* (Contribuciones a una visión fundamentada de las matemáticas. Primera entrega); en 1816, *Der binomische Lehrsatzln* (El teorema binomial), en cuyo prólogo declara que su trabajo

es un ejemplo del nuevo modo de desarrollar el análisis; y en 1817, *Rein analytischer Beweis* (Prueba puramente analítica) donde liberaba los conceptos de límite, convergencia y derivada de nociones geométricas, sustituyéndolos por criterios puramente aritméticos y numéricos.

A pesar de que consiguió demostrar todo lo que afirmaba, sus teorías se entendieron después de su muerte. Bolzano sabía que había un problema de base que resolver: refinar y enriquecer el concepto de número. De ahí su demostración del teorema del valor intermedio o Teorema de Bolzano, que también fue llamado serie de Cauchy, debido a un trabajo del matemático francés Augustin Louis Cauchy publicado unos años después. Otro aporte importante es el Teorema de Bolzano-Weierstrass o teorema de la sucesión convergente.

Después de veinte años, en 1837, redacta *Wissenschaftslehren* (Teoría de la ciencia) en cuatro volúmenes; para muchos –entre los que se encuentra Edmund Husserl– era la segunda obra importante sobre lógica y problemas del conocimiento después de la de Leibnitz. Bolzano intentó proporcionar fundamentos lógicos a todas las ciencias, construidos a partir de abstracciones, de atributos, de construcciones, de demostraciones y de vínculos, con lo cual se acerca a la filosofía de las matemáticas. Para él, no hay ninguna certeza en relación con las verdades, o a las supuestas verdades de la naturaleza o de las matemáticas, y el papel de las ciencias, tanto puras como aplicadas, es encontrar una justificación de las verdades (o de las leyes) fundamentales, que usualmente contradicen nuestras intuiciones.

En la década de 1830, trabajó en una gran obra de la cual solo se llegó a publicar una parte, *Grössenlehre*, donde intenta poner toda la matemática bajo un fundamento lógico. Luego de su muerte, en 1851, un alumno suyo publicó *Paradoxien des Unendlichen* (Paradojas del infinito), donde parece por primera vez el término "conjunto", en la forma alemana *Menge*. En este trabajo Bolzano aporta ejemplos de correspondencia biunívoca entre los elementos de un conjunto infinito y los elementos de un subconjunto propio.

Bolzano, a su vez, fue un importante filósofo y lógico que acogió opiniones nuevas acerca de las variables matemáticas, los límites y la continuidad. En sus estudios sobre los aspectos físicos de la fuerza, el espacio y el tiempo propone teorías contrarias a las sugeridas por el filósofo alemán Immanuel Kant; afirmaba que los números, las ideas y las verdades existen de modo independiente a las personas que los piensen.

Muchas de sus obras permanecieron como manuscritos, y fueron publicadas recién a partir de 1862. Debido a esto sus teorías no tuvieron la influencia debida en el desarrollo de la materia. Asimismo, sus teorías acerca del infinito matemático anticiparon a las de Georg Cantor sobre el tema de conjuntos infinitos.

Fuente:

http://es.wikipedia.org/wiki/Bernard_Bolzano

http://www.britannica.com/EBchecked/topic/72451/Bernhard-Bolzano

http://www.maristasmalaga.com/docs/alumnos/matematicas/bio/b_bolzano.pdf

Test 1

1. Simplifique la expresión.
$3(4-5)-5(5+2-8)-(5-6)+19$

A) 19 B) 23 C) 20
D) 22 E) 18

2. Calcule el valor simplificado de
$\underbrace{(5+5+...+5)}_{38\text{ veces}}-\underbrace{(3+3+...+3)}_{51\text{ veces}}$.

A) 73 B) 28 C) 37
D) 46 E) 36

3. El cociente en una división es 7. Calcule el divisor, si la diferencia entre el dividendo y el residuo es 42.

A) 2 B) 3 C) 1
D) 5 E) 6

4. Al efectuar
$A=5^2\cdot 2+3-4\cdot 7$;
$B=18\div 6-2+5^2$;
¿cuál es el valor de $B-A$?

A) -2 B) 2 C) -1
D) 1 E) 3

5. Si $2x=-5$, ¿cuál es el valor de M?
Donde $M=(2x+3)-(5-2x)-3(2x)$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

6. El doble de la edad de Ana más la edad de Claudia es 38 años, y el doble de la edad de Claudia más la edad de Ana es 49. ¿Cuánto suman ambas edades?

A) 30 B) 29 C) 44
D) 53 E) 41

7. Efectúe y simplifique
$$\frac{(-1)(-1)(-5)+2(-1)(-5)}{[24+3]+(-4)+(24\div 4)\div 2}.$$

A) 10 B) 4 C) 3
D) -3 E) 5

8. Calcule el valor de
$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{6}}{\frac{5}{3}-\frac{7}{4}}.$$

A) -1 B) 3 C) 4
D) 2 E) -2

9. Efectúe
$$\left(\frac{20}{3}\div\frac{5}{6}\right)\left(\frac{7}{8}\div\frac{21}{2}\right)\div\frac{2}{9}.$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
D) 3 E) 4

10. Despeje x de la siguiente ecuación
$$\left(\frac{x-2}{2}\right)+\left(\frac{x+3}{3}\right)+\left(\frac{x-6}{6}\right)-3=10.$$

A) 13
B) 14
C) -8
D) 2
E) 5

11. Efectúe

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+1\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+4\right)\right]\frac{10}{9}.$$

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{29}{9}$ C) $\frac{3}{8}$

D) $\frac{27}{2}$ E) 1

12. Despeje x de la ecuación

$(3x-1)-(x+2)=15-x.$

A) 15
B) 12
C) 8
D) 6
E) 20

Claves

1 D	3 E	5 C	7 E	9 D	11 A
2 C	4 D	6 B	8 E	10 B	12 D

Problemas PROPUESTOS

Halle la suma

1. a. $3a+2b-c;\ 2a+3b+c$
   b. $a+b-c;\ 2a+2b-3c;\ -3a-b+3c$

2. a. $x+y+z;\ 2x-3y+z;\ -4x+5y-2z$
   b. $x^2-5x+8;\ -x^2+10x-30;\ -6x^2+5x-50$

3. a. $x^3y-xy^3+5;\ x^4-x^2y^2+5x^3y-6;\ -6xy^3+x^2y^2+2$
   b. $(x^2+y^2-3xy)-(-y^2+3x^2-4xy)$

4. a. $3x-[x+y-\overline{2x+y}]$
   b. $4x^2+[-(x^2-xy)+(-3y^2+2xy)-(-3x^2+y^2)]$

5. a. $-[-a+\{-a+(a-b)-\overline{a-b+c}-[-(-a)+b]\}]$
   b. $-[x+\{-(x+y)-[-x+(y-z)-(-x+y)]-y\}]$

6. a. $2x-\overline{x-2y+\overline{(5x-2y)-\overline{x-y}}}$
   b. $-[3m+\{-m-(n-\overline{m+4})\}+\{-(m+n)+$
   $+(-2n+3)\}]$

> **Nota**
>
> $\overline{}$ es el símbolo de agrupación llamado barra o vínculo.

Halle el producto de multiplicar

7. a. $(a^{x-1}-b^{n-1})\cdot(a-b)$
   b. $(3a^{x-1}+a^x-2a^{x-2})\cdot(a^x-a^{x-1}+a^{x-2})$

8. a. $(3xy^2+2x-y)\cdot(x-4xy+1)$
   b. $(x^my^{n-1}+x^{m-1}y^n-xy)\cdot(2+xy+x^2y^2)$

Efectúe

9. a. $(2x+3y-4z)(2x-3y+4z)$
   b. $(x+1)(x-2)(4x-1)(3x+5)+11(x-3)(x+7)$

10. a. $(3x-1)^2-3(2x+3)^2-2x(-x-5)+(x-1)^2$
    b. $5(1-x)^2-6(x^2-3x-7)-x(x-3)+2x(x+5)$

11. a. $3(x-2)+2(1-x)$
    b. $2x-5[7-(x-6)+3x]-21$
    c. $\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}(x-1)$

12. a. $\frac{0{,}75-x}{3}-\frac{2x+4}{1{,}5}-x-4\frac{1}{3}$
    b. $2x-4[5x-(11y-3x)]-3[5y-2(3x-64)]$

Simplifique

13. $\frac{1}{4}[c-4(b-c)-2b]-1\frac{1}{2}\left\{0{,}5\left(b-\frac{c}{3}\right)\right.$
    $\left.-\frac{2}{3}\left[2c-0{,}75\left(b-\frac{4c}{5}\right)\right]\right\}$

14. a. $\frac{a}{a+2}+\frac{a^2+3a}{4-a^2}-\frac{a+1}{3a-6}$
    b. $\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)$

15. a. $\frac{a^2-9}{5a^3b^3}\div\left[\frac{a+3}{10a^4}\cdot\frac{2a-6}{ab^4}\right]$
    b. $\frac{(x-y)^4-xy(x-y)^2-2x^2y^2+6xy}{(x-y)(x^3-y^3)+2x^2y^2}$

16. a. $\dfrac{\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2+5ab}{3ab}}{\dfrac{(a-b)^2+(b-a)^2+4ab}{a^2+b^2}}$

b. $\left[\dfrac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2-(a+c)x+ac}\right]\left\{\dfrac{x^2-c^2}{x^2-b^2}\right\}$

17. a. $\left(x-3+\dfrac{5x}{2x-6}\right)\div\left(2x-1+\dfrac{15}{x-3}\right)$

b. $\left(\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}\right)\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

18. a. $\dfrac{\left(\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x}+1\right)\left(\dfrac{x}{x^3-8}\right)}{\dfrac{1}{x^2-2x}}$

b. $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{2}{a^2+1}+\dfrac{4}{a^4+1}+\dfrac{8}{a^8-1}$

19. a. $\dfrac{(a-1)\left(1+a-\sqrt[3]{a^2}\right)}{1+\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{a^2}}$

b. $\dfrac{n}{p}+1-\left[1+\dfrac{\dfrac{m+n}{p}+1}{\dfrac{m+p}{n}+1}\right]+2$

20. $\dfrac{[m^2+n^2+1+2mn][m^2+n^2+2mn-1]+1}{(m^2+n^2+2mn)^2}$

De las igualdades siguientes, despeje la incógnita x

21. a. $\dfrac{[2a+x(n-1)]n}{2}=5$

b. $3\{10-2[3x-2(x-5)]+7x\}=3x-4$

22. a. $t=\sqrt{\dfrac{k^2+n^2+m^2x}{a+x}}$

b. $1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^x\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}$

23. a. $W=\dfrac{60vd}{60d+v(t-x)}$

b. $\dfrac{n}{m}[a(m-x)+bx]=b(n-x)+ax$

24. a. $y=\dfrac{1}{2}\left[(b+c)-\sqrt{(b-c)^2-4hcx}\right]$

b. $V=\dfrac{\pi R}{T}\left(\sqrt{1+\dfrac{47}{x}}-1\right)$

25. a. $v=\dfrac{a}{\sqrt{\dfrac{r-x}{p-x}}}$

b. $\sqrt{\dfrac{x^2-4h^2}{x^2-4b^2}}=\dfrac{h}{b}$

26. a. $\dfrac{3x+5y-z}{3x+5y+z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$

b. $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x+b}=\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x-b}$

27. a. $L=\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}-\dfrac{x-a}{x+a}}$; $a>0$

b. $V_0x+\dfrac{1}{2}gx^2=h$

28. a. $\sqrt[3]{a}x+\sqrt[3]{b}x=(a+b)(a-b)$

b. $(3x^4+a)^2-(3x^4-a)^2=48a^5b^4$; $x;a;b\in\mathbb{R}^+$

29. a. $(x-3)(x-5)(x+2)(x+4)-(x^2-x-13)^2+2x=50$

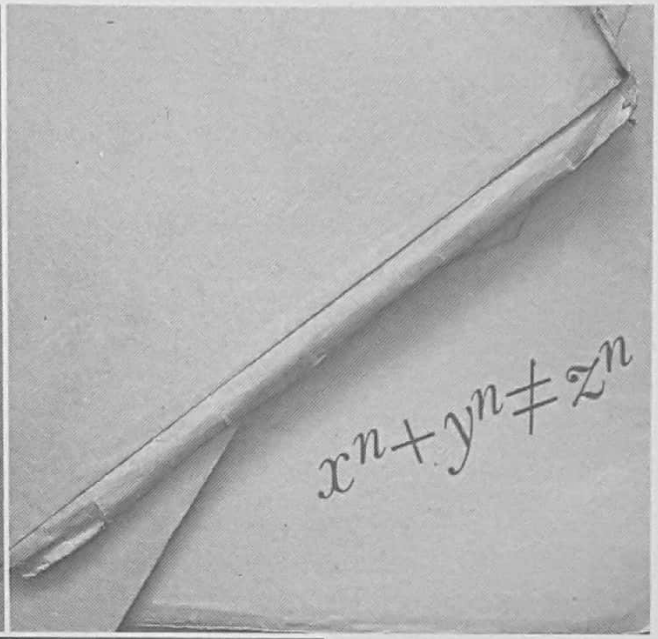
b. $x^2+2y^2+2z^2=2xy+2xz$; $\{x;y;z\}\subset\mathbb{R}$

30. a. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{x+a+b}$; $a\neq-b$

b. $(x-y+z)^2=2+x^2+y^2+z^2$

Capítulo

11



Leyes de exponentes

CAPÍTULO II

LEYES DE EXPONENTES

Objetivos

- Buscar la relación entre las definiciones y los teoremas correspondientes a los exponentes de una expresión matemática.
- Aplicar con criterio la notación científica en el cálculo con cantidades muy pequeñas o muy grandes.
- Reconocer los exponentes mayores de cocientes, productos, potencias o raíces *n*-ésimas.
- Aplicar la relación de base a base y exponente a exponente en la resolución de las ecuaciones exponenciales.

Introducción

Veamos la necesidad e importancia de este capítulo a través de algunos ejemplos.

Los números 10; 100; 1000; etc., juegan un papel importante en la notación decimal y se llaman potencias de 10. Un modo conveniente de indicar estas potencias es mediante el uso de exponentes:

- $10^1 = 10$
- $10^2 = 10 \times 10 = 100$
- $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$
- $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$
- $10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$

y así sucesivamente; leemos 10^5 como "diez a la quinta potencia". El numeral 5 en 10^5 se llama exponente.

La mayor utilidad de estas formas exponenciales está en el trabajo científico, debido a la necesidad de simplificar los cálculos con números muy grandes o muy pequeños.

Citamos los siguientes ejemplos:

I. La estrella más cercana, Alfa Centauri, está a 25 000 000 000 000 millas de la Tierra. Esta expresión la podemos simplificar diciendo que Alfa Centauri está a 25×10^{12} millas de la Tierra.

II. Entre los años 1908 y 1917, el físico norteamericano Robert Andrews Millikan dedujo que la carga negativa del electrón es $-1{,}60 \times 10^{-19}$ C y su masa es $9{,}11 \times 10^{-28}$ g. ¿Cómo sería sin la representación exponencial?

III. En la teoría molecular de la materia, Amadeo Avogadro determina una constante llamándola el número de Avogadro, cuyo valor es $6{,}02 \times 10^{23}$ (602 seguido de 21 ceros).

IV. El radio del núcleo del uranio-235 es aproximadamente $7{,}0 \times 10^{-5}$ Å, siendo cada Å equivalente a 10^{-8} cm.

Vemos la gran utilidad de esta forma exponencial en el trabajo científico.

Para finalizar, planteamos el siguiente problema de astronomía. Se acostumbra describir las distancias entre las estrellas mediante unidades llamadas años luz. Por definición, un año luz es la distancia que recorre la luz en un año (365 días). Si la luz viaja con una velocidad de $3{,}1 \times 10^5$ km/s, aproximadamente, ¿cuántos kilómetros hay en un año luz?

DEFINICIONES PREVIAS

EXPONENTE NATURAL

Es el exponente entero y positivo que nos indica el número de veces que se repite una expresión como factor.

En general

$$a^n = \begin{cases} a & \text{si } n=1 \\ \underbrace{a\cdot a\ldots a}_{n \text{ veces}}, & \text{si } n\in\mathbb{N};\ n\geq 2 \end{cases}$$

$\mathbb{N}$ es el conjunto de números naturales.
$\mathbb{R}$ es el conjunto de números reales.

Ejemplos

1. $5^6 = \underbrace{5\cdot 5\ldots 5}_{6 \text{ veces}}$

2. $\underbrace{\left(-\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y}\right)\ldots\left(-\frac{x}{y}\right)}_{72 \text{ veces}} = \left(-\frac{x}{y}\right)^{72}$

3. $\underbrace{\sqrt[3]{xy}\cdot\sqrt[3]{xy}\ldots\sqrt[3]{xy}}_{4n-1 \text{ veces}} = \left(\sqrt[3]{xy}\right)^{4n-1}$; $4n-1\in\mathbb{N}$

4. $\underbrace{\sqrt[4]{\frac{x}{\sqrt{y}}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{\sqrt{y}}}\ldots\sqrt[4]{\frac{x}{\sqrt{y}}}}_{43 \text{ veces}} = \left(\sqrt[4]{\frac{x}{\sqrt{y}}}\right)^{43}$

5. $\underbrace{\left(\frac{x^3}{p}\right)\left(\frac{x^3}{p}\right)\ldots\left(\frac{x^3}{p}\right)}_{(2p+3q-7) \text{ veces}} = \left(\frac{x^3}{p}\right)^{2p+3q-7}$;

$(2p+3q-7)\in\mathbb{N}$

Nota

$\underbrace{\left(\sqrt{xy}\right)\left(\sqrt{xy}\right)\ldots\left(\sqrt{xy}\right)}_{(\sqrt{7}+\sqrt{2}) \text{ veces}} \neq \left(\sqrt{xy}\right)^{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$

No tiene sentido, ya que $(\sqrt{7}+\sqrt{2})$ no es un número natural.

EXPONENTE CERO

Todo número diferente de cero elevado al exponente cero es la unidad.

$$a^0=1;\ \forall a\in\mathbb{R}\ \wedge\ a\neq 0$$

Ejemplos

1. $(-4+\sqrt{2})^0=1$
2. $(\pi+\sqrt{2})^0=1$
3. $(x^2+y^2+15)^0=1$
4. $(425)^0=1$
5. $(-425)^0=1$
6. $-(425)^0=-1$
7. $-(-425)^0=-1$

Nota

0^0 es indefinido

Ejemplo

$(4-\sqrt{16})^{\sqrt[3]{-8}+2} = (4-4)^{-2+2} = 0^0$

Dicha expresión no está definida.

EXPONENTE NEGATIVO

Nos indica que la base diferente de cero se invierte (inverso multiplicativo) cuando el exponente es negativo. Así:

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n};\ \forall a\neq 0\ \wedge\ n\in\mathbb{N}$$

Ejemplos

1. $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$

2. $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}=8^2=64$

3. $(-4)^{-3}=\frac{1}{(-4)^3}=\frac{1}{-64}=-\frac{1}{64}$

4. $5^{-2^{-3}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$

> **Nota**
> 0^{-n} no está definido ($\forall n \in \mathbb{N}$)

EXPONENTE FRACCIONARIO

El exponente fraccionario se expresa equivalentemente como los radicales, donde el denominador de dicho exponente representa el índice del radical.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^m$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2;\ \sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$$

Ejemplos

1. $4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$
2. $8^{10/3} = \sqrt[3]{8^{10}} = \sqrt[3]{8}^{10} = 2^{10} = 1024$
3. $81^{3/4} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{81}^3 = 3^3 = 27$
4. Calcule $4^{-2^{-1}}$.

   Resolución

   Usando las definiciones de exponente negativo y fraccionario, se tiene

   $$4^{-2^{-1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

5. Reduzca $27^{9^{-16^{-2^{-2}}}}$.

   Resolución

   Observamos que cada signo (–) invierte a la base correspondiente. Así esta expresión es equivalente a

   $$27^{\left(\frac{1}{9}\right)^{\left(\frac{1}{16}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}}}$$

   Se reduce de dos en dos de arriba hacia abajo, como sigue:

   - $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
   - $\left(\frac{1}{16}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$
   - $\left(\frac{1}{9}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

   Finalmente: $27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$

POTENCIACIÓN

Es una operación matemática que consiste en hallar una expresión llamada potencia, partiendo de otras dos llamadas base y exponente, respectivamente.

Identidad fundamental

$$p = a^n;\ a \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N};\ p \in \mathbb{R}$$

Donde

a: base
n: exponente natural
p: potencia

TEOREMAS DE LA POTENCIACIÓN

Teorema 1

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n};\ x \in \mathbb{R}$$

Demostración

$$x^m \cdot x^n = \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{m \text{ veces}} \cdot \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{n \text{ veces}}$$

$$\rightarrow\ x^m \cdot x^n = \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{(m+n) \text{ veces}} = x^{m+n}$$

Ejemplos

1. $a^5 \cdot a^6 \cdot a^7 = a^{5+6+7} = a^{18}$

2. Reduzca $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 \cdot 3^5$.

   Usando el teorema 1 se tiene $3^{1+2+3+4+5} = 3^{15}$

3. $x \cdot x^2 \cdot x^3 \ldots x^n$

   Resolviendo $x^{1+2+3+\ldots+n}$

   Pero $1+2+3+\ \ldots\ +n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

   $\rightarrow\ x \cdot x^2 \cdot x^3 \ldots x^n = x^{\frac{n(n+1)}{2}}$

4. La siguiente relación no es correcta.

   $x^{\sqrt{2}+1} = \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{(\sqrt{2}+1)\text{ veces}}$

   pues el exponente $(\sqrt{2}+1) \notin \mathbb{Z}$

Teorema 2

$(x^m)^n = x^{m \cdot n};\ x \in \mathbb{R} \wedge m, n \in \mathbb{N}$

Demostración

$$(x^m)^n = \underbrace{x^m \cdot x^m \cdot x^m \ldots x^m}_{n\text{ veces}}$$

$$(x^m)^n = x^{\underbrace{m+m+\ldots+m}_{n\text{ veces}}}$$

$$\rightarrow\ (x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

Ejemplos

1. $(x^3)^4 (x^3)^5 = x^{3 \cdot 4} \cdot x^{3 \cdot 5} = x^{12} \cdot x^{15} = x^{27}$

2. Reduzca $(a^3 \cdot a^2)^4 \cdot (a^4 \cdot a)^2$.

   Del teorema 1:

   $(a^{3+2})^4 \cdot (a^{4+1})^2 = (a^5)^4 \cdot (a^5)^2 = (a^5)^{4+2} = (a^5)^6$

   Del teorema 2: $a^{5 \times 6} = a^{30}$

3. $(\ldots((x^2)^3)^4 \ldots)^{50} = x^{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 50} = x^{50!}$

> **Nota**
> $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 50 = 50!$
> Se llama factorial de 50.

4. $((\ldots((x^{-15})^{-14})^{-13} \ldots)^{14})^{15} =$

   $= x^{(-15)(-14)\ldots(0)\ldots(14)(15)} = x^0 = 1;\ \forall\, x \neq 0$

> **Nota**
> $(-15)(-14)\ldots(-1)(0)(1)\ldots(15) = 0$

Teorema 3

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n;$
$a, b \in \mathbb{R}\ \wedge\ n \in \mathbb{N}$

Demostración

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(ab)(ab)(ab)\ldots(ab)}_{n\text{ veces}}$$

$$\rightarrow\ (a \cdot b)^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n\text{ veces}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots b}_{n\text{ veces}}$$

$$\rightarrow\ (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ejemplos

1. $(x \cdot y)^5 = x^5 y^5$

2. $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216$

3. $(\sqrt{x} y^7 z^8)^{16} = (\sqrt{x})^{16} (y^7)^{16} (z^8)^{16}$

4. $\left(\left(\dfrac{a}{b}\right) c^n\right)^4 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^4 (c^n)^4$

5. $m^2 n^2 p^2 = (mnp)^2$

6. $(abc)^3 = a^3 b^3 c^3$

7. $(x^{-1} y)^2 = (x^{-1})^2 y^2$

Teorema 4

$$(x^a \cdot y^b)^n = x^{a \cdot n} \cdot y^{b \cdot n}$$

Ejemplos

1. $(x^5 \cdot y^4)^7 = (x^5)^7 (y^4)^7 = x^{35} y^{28}$
2. $(x^4 a^3 c^2)^2 = x^{4 \cdot 2} \cdot a^{3 \cdot 2} \cdot c^{2 \cdot 2} = x^8 a^6 c^4$
3. $(x^{-2} y^3)^5 = x^{-10} y^{15}$
4. $x^6 y^{10} = (x^3 y^5)^2$
5. $x^8 y^{16} z^{24} = (x y^2 z^3)^8$

Teorema 5

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};\ m, n \in \mathbb{N} \wedge m \geq n;\ a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Demostración

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{(m-n)+n}}{a^n} = \frac{a^{m-n} \cdot a^n}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplos

1. $\dfrac{2^{20}}{2^{16}} = 2^{20-16} = 2^4 = 16$
2. $\dfrac{a^{3+5x}}{a^{3-5x}} = a^{(3+5x)-(3-5x)} = a^{10x}$
3. ¿Cuál es el equivalente reducido $\dfrac{\left((5^2)^6\right)^3}{(5^5)^6 \cdot 5^3}$?

Resolución

Del teorema 2 y 4:

$$\frac{5^{2 \cdot 6 \cdot 3}}{5^{5 \cdot 6} \cdot 5^3} = \frac{5^{36}}{5^{30} \cdot 5^3} = \frac{5^{36}}{5^{33}}$$

Del teorema 5:

$$5^{36-33} = 5^3 = 125$$

Por lo tanto, el equivalente reducido es 125.

Teorema 6

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};\ n \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Ejemplos

1. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{2^2}{3^2} = \dfrac{4}{9}$
2. $\dfrac{15^5}{5^5} = \left(\dfrac{15}{5}\right)^5 = 3^5 = 243$
3. $\left(\dfrac{2^{30}}{2^{-20}}\right)^2 = \dfrac{2^{60}}{2^{-40}} = 2^{100}$
4. $\left(\dfrac{a^\alpha}{b^\beta}\right)^n = \dfrac{(a^\alpha)^n}{(b^\beta)^n} = \dfrac{a^{\alpha n}}{b^{\beta n}}$
5. $\left(\dfrac{(a^2)^x}{(b^3)^y}\right)^{-2} = \dfrac{(a^{2x})^{-2}}{(b^{3y})^{-2}} = \dfrac{a^{-4x}}{b^{-6y}} = \dfrac{b^{6y}}{a^{4x}}$

Corolario

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n};\ \forall\ a \cdot b \neq 0$$

▸ RADICACIÓN EN $\mathbb{R}$

DEFINICIÓN

Dados un número real a y un número natural n mayor que 1, b se llama raíz n-ésima principal de a y se denota por $b = \sqrt[n]{a}$ si y solo si $b^n = a$. Además, a y b son del mismo signo, donde a, $b \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N} - \{1\}$ bajo la condición de que si n es par entonces $a, b \in \mathbb{R}_0^+$.

Así

- $\sqrt[4]{16} = 2$ ya que $2^4 = 16$ (2 es la raíz principal)
- $\sqrt[3]{-8} = -2$ puesto que $(-2)^3 = -8$ (única en $\mathbb{R}$)

Identidad fundamental

$$b=\sqrt[n]{a} \leftrightarrow b^n=a;\ n\in\mathbb{N};\ n\geq 2$$

TEOREMAS DE RADICACIÓN

Teorema 1

$$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \text{ en } \mathbb{R}$$

Si n es par, entonces $a\geq 0 \wedge b\geq 0$

Ejemplos

1. $\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}=4(1{,}41)=5{,}64$ aproximadamente

2. $\sqrt[3]{a^5\cdot b^7}=\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[3]{b^7}$

3. Indique si la siguiente relación es correcta.
$\sqrt{(-3)(-2)}=\sqrt{-3}\sqrt{-2}$
Fundamente.

Teorema 2

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\ b\neq 0$$

Si n es par, entonces $a\geq 0 \wedge b\geq 0$

Ejemplos

1. $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}}=\frac{3}{2}$

2. $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{16}{2}}=\sqrt[3]{8}=2$

3. $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{9}}+\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}=\sqrt{\frac{125}{5}}+\sqrt[3]{\frac{72}{9}}+\sqrt[5]{\frac{96}{3}}$
$=\sqrt{25}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[5]{32}=5+2+2=9$

4. Indique si la siguiente relación es correcta.
$\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3}{-2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$
Fundamente.

Teorema 3

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}\quad m,n\in\mathbb{N}$$

Si $m\cdot n$ es par, entonces $a\geq 0$

Ejemplos

1. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{x}}}=\sqrt[3\cdot 4\cdot 2]{x}=\sqrt[24]{x}$

2. Indique si la siguiente relación es correcta.
$\sqrt[3]{\sqrt[2]{\sqrt[4]{-5}}}=\sqrt[24]{-5}$
Fundamente.

RADICALES SUCESIVOS

$$\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b\sqrt[p]{c}}}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n\cdot m]{b}\cdot\sqrt[n\cdot m\cdot p]{c}$$

Ejemplos

1. $\sqrt[4]{5\sqrt[3]{2\sqrt[5]{7}}}=\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4\cdot 3]{2}\cdot\sqrt[4\cdot 3\cdot 5]{7}=\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[12]{2}\cdot\sqrt[60]{7}$

2. $\sqrt[7]{3\sqrt[4]{2\sqrt[5]{5}}}=\sqrt[7]{3}\cdot\sqrt[7\cdot 4]{2}\cdot\sqrt[7\cdot 4\cdot 5]{5}=\sqrt[7]{3}\cdot\sqrt[28]{2}\cdot\sqrt[140]{5}$

Reglas prácticas

I.

$$\sqrt[n]{x^{\alpha}\ \sqrt[m]{x^{\beta}\cdot\sqrt[p]{+x^{\gamma}}}}$$

$$(\times + \times + \times + \cdots)$$

$$=\sqrt[n\cdot m\cdot p]{x^{(\alpha m+\beta)p+\gamma}}$$

Ejemplos

1. $\sqrt[4]{x^1 \sqrt[3]{x^5}} = \sqrt[4\cdot 3]{x^{1\cdot 3+5}} = \sqrt[12]{x^8}$

2. $\sqrt[3]{x^5 \sqrt[2]{x^3}} = \sqrt[3\cdot 2]{x^{5\cdot 2+3}} = \sqrt[6]{x^{13}}$

3. $\sqrt[5]{x^2 \sqrt[3]{x^5 \sqrt[4]{x^1}}} = \sqrt[5\cdot 3\cdot 4]{x^{(2\cdot 3+5)4+1}} = \sqrt[60]{x^{45}}$

4. $\sqrt{2\sqrt[4]{8\sqrt[3]{16}}} = \sqrt{2^1 \sqrt[4]{2^3 \sqrt[3]{2^4}}}$

$= \sqrt[2\cdot 4\cdot 3]{x^{(1\cdot 4+3)3+4}} = \sqrt[24]{2^{25}}$

5. $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}} = \sqrt[32]{x^{31}}$

II.

$\sqrt[n]{x^\alpha \div \sqrt[m]{x^\beta \div \sqrt[p]{x^\gamma}}}$

$(\times - \times + \times - \ldots)$

$= \sqrt[n\cdot m\cdot p]{x^{(\alpha m-\beta)p+\gamma}}$

En los exponentes, los signos se alternan.

Ejemplos

1. $\sqrt[4]{x^3 \div \sqrt[2]{x^1}} = \sqrt[4\cdot 2]{x^{3\cdot 2-1}} = \sqrt[8]{x^5}$

2. $\sqrt{2 \div \sqrt{2 \div \sqrt{2 \div \sqrt{2 \div \sqrt{2}}}}}$

$= \sqrt[32]{2^{(((1\times 2-1)2+1)2-1)2+1}} = \sqrt[32]{2^{11}}$

3. $\sqrt[3]{x^4 \div \sqrt{x^1 \div \sqrt[4]{x^1}}} = \sqrt[3\cdot 2\cdot 4]{x^{(4\cdot 2-1)4+1}} = \sqrt[24]{x^{29}}$

4. $\sqrt{x^1 \div \sqrt{x^1 \div \sqrt{x^1 \div \sqrt{x^1 \div \sqrt{x^1}}}}}$

$= \sqrt[2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2]{x^{\{[(1\cdot 2-1)2+1]2-1\}2+1}} = \sqrt[32]{x^{11}}$

Corolario

$\sqrt[a\cdot b]{x^{ac}} = \sqrt[b]{x^c}$

Si ab es par $\rightarrow$ $x \in \mathbb{R}_0^+$

Ejemplos

1. $\sqrt[3\cdot 5]{x^{3\cdot 4}} = \sqrt[5]{x^4}$

2. $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt[3\cdot 2]{2^2}\cdot\sqrt[2\cdot 3]{3^3}$

$= \sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{4\cdot 27} = \sqrt[6]{108}$

Ejercicios para el lector

1. Indique si la siguiente relación es correcta.

$\sqrt[2\cdot 7]{(-5)^{2\cdot 3}} = \sqrt[7]{(-5)^3}$

Fundamente.

2. Indique si la siguiente relación es correcta.

$(-16)^{3/4} = \left(\sqrt[4]{-16}\right)^3$

Fundamente.

3. Indique si la siguiente relación es correcta.

$(-27)^{4/3} = \left(\sqrt[3]{-27}\right)^4 = (-3)^4 = 81$

Fundamente.

4. Indique si la siguiente relación es correcta.

$(-8)^{1/3} = (-8)^{2/6}$

Fundamente.

Ejemplos aplicativos

1. Reduzca la expresión $\sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt[4]{x}}$ e indique el exponente de x^2.

Resolución

Aplicando la regla práctica I se tiene:

$$\sqrt[3\cdot 4]{x^{2\cdot 4+1}} = \sqrt[\cancel{12}\,4]{x^{\cancel{9}\,3}} = x^{\frac{3}{4}}$$

Como buscamos el exponente de x^2

$$\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{2}} = x^{2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}} = (x^2)^{\frac{3}{8}}$$

Luego, el exponente de x^2 es $\frac{3}{8}$.

2. Simplifique e indique el exponente de x.

$$\sqrt{x^3 \div \sqrt[4]{x^5}}$$

Resolución

Aplicando la regla práctica (II) se tiene:

$$\sqrt[2\cdot 4]{x^{3\cdot 4-5}} = \sqrt[8]{x^7} = x^{\frac{7}{8}}$$

Luego, el exponente de x es 7/8.

3. Halle el exponente de x, luego de simplificar M.

$$M = \left\{\frac{\sqrt{x^3 \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}} \cdot x^2}{\sqrt[4]{x^3 \cdot \sqrt[3]{x}}}\right\}^{24} \quad ; x > 0$$

Resolución

Usando la regla práctica (I)

$$M = \left\{\frac{\sqrt[2\cdot 2\cdot 3]{x^{(3\cdot 2+1)\cdot 3+1}} \cdot x^2}{\sqrt[4\cdot 3]{x^{3\cdot 3+1}}}\right\}^{24} = \left(\frac{\sqrt[12]{x^{22}} \cdot x^2}{\sqrt[12]{x^{10}}}\right)^{24}$$

$$\rightarrow \quad M = \left(\sqrt[12]{\frac{x^{22}}{x^{10}}} \cdot x^2\right)^{24} \quad \rightarrow \quad M = \left(\sqrt[12]{x^{12}} \cdot x^2\right)^{24}$$

$$\rightarrow \quad M = (x \cdot x^2)^{24} = x^{72}$$

Luego, el exponente final de x es 72.

4. Reduzca

$$\frac{\sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x^3 \cdot \sqrt{x}}} \cdot (x^{0,5})^4}{\sqrt{x \div \sqrt{x \div \sqrt{x \div \sqrt{x}}}}}$$

Resolución

Aplicando las reglas prácticas I y II se tendrá:

$$\frac{\sqrt[3\cdot 4\cdot 2]{x^{(1\cdot 4+3)2+1}} \cdot x^{(0,5)(4)}}{\sqrt[2\cdot 2\cdot 2\cdot 2]{x^{((1\cdot 2-1)2+1)2-1}}}$$

$$= \frac{\sqrt[24]{x^{15}} \cdot x^2}{\sqrt[16]{x^5}} = \frac{x^{\frac{5}{8}} \cdot x^2}{x^{\frac{5}{16}}} = x^{\frac{5}{8}+2-\frac{5}{16}} = x^{\frac{37}{16}}$$

Luego, el exponente de x es $\frac{37}{16}$.

▸ ECUACIONES EXPONENCIALES

Solo se trabajará para expresiones algebraicas; es decir, no se utilizarán operadores desconocidos (logaritmos, trigonométricos, etc.).

Criterio I

"A bases iguales, exponentes iguales".

$$a^x = a^y \quad \rightarrow \quad x = y$$

donde

$$a > 0 \wedge a \neq 1, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Ejemplos

1. Si $4^x = 8^{x-1}$, ¿cuál es el valor de x^2-1?

Resolución

De la ecuación $4^x = 8^{x-1}$

$$(22)^x = (23)x-1 \quad \rightarrow \quad 22x = 23(x-1)$$

Como las bases son iguales, los exponentes también serán iguales

$$2x = 3(x-1) \quad \rightarrow \quad 2x = 3x-3 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

Por lo tanto, el valor de x^2-1 será 3^2-1, es decir 8.

2. Si se divide 4^{x+3} entre 8^{x-1} se obtiene 16, ¿cuál es el valor de x?

Resolución

Del enunciado se tiene:

$$\frac{4^{x+3}}{8^{x-1}}=16$$

$$\frac{(2^2)^{x+3}}{(2^3)^{x-1}}=2^4 \rightarrow \frac{2^{2x+6}}{2^{3(x-1)}}=2^4$$

$$2^{(2x+6)-3(x-1)}=2^4$$

A bases iguales, exponentes iguales.

$$2x+6-3x+3=4 \rightarrow 9-x=4$$

De donde $x=5$

3. ¿Cuál es el valor de n que verifica la igualdad $8^n-8^{n-1}=14$?

Resolución

Como $8^n=(8^{n-1})\cdot 8$ en la ecuación se tiene

$$8^{n-1}\cdot 8-8^{n-1}=14 \rightarrow 8^{n-1}(8-1)=14$$

$$8^{n-1}\cdot \cancel{7}=2\cdot \cancel{7} \rightarrow 8^{n-1}=2 \rightarrow (2^3)^{n-1}=2$$

$$\rightarrow 2^{3n-3}=2^1$$

A bases iguales, exponentes iguales.

$$3n-3=1 \rightarrow n=\frac{4}{3}$$

Por lo tanto, el valor de n que verifica la igualdad es $\frac{4}{3}$.

Criterio II

"A exponentes iguales bases iguales".

$$x^n=y^n \rightarrow x=y;$$

donde $n\neq 0 \wedge x, y\in \mathbf{R}^+$

Ejemplos

1. Si $x^4=y^8$, ¿cuál es el valor de $\frac{x+2y^2}{3x-y^2}$; $x>0$?

Resolución

De la condición $x^4=y^8$ se tiene $(x)^4=(y^2)^4$

Como $x>0 \rightarrow x=y^2$

Luego, lo pedido

$$\frac{x+2y^2}{3x-y^2}=\frac{y^2+2y^2}{3y^2-y^2}=\frac{3y^2}{2y^2}=\frac{3}{2}$$

2. De la igualdad $\frac{4^n}{a}=\frac{a^n}{4}$; $n\neq -1$, calcule el valor de $\frac{a}{2}$.

Resolución

De la igualdad $\frac{4^n}{a}=\frac{a^n}{4}$ se tiene $4^n\cdot 4=a^n\cdot a$

entonces $4^{n+1}=a^{n+1}$, con $n+1\neq 0$

Luego, por el criterio II: $4=a$

$$\therefore \frac{a}{2}=2$$

Criterio III

(criterio de comparación)

$$x^x=y^y \rightarrow x=y$$

Este criterio tiene algunas excepciones.

Ejemplos

1. Si $x^x=4 \rightarrow y^y=27$, calcule $\frac{x+y}{x-y}$.

Resolución

Si $x^x=4 \rightarrow x^x=2^2 \rightarrow x=2$

$y^y=27 \rightarrow y^y=3^3 \rightarrow y=3$

Luego

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{2+3}{2-3}=\frac{5}{-1}=-5$$

Importante

Según la propiedad $x^x = y^y$ una posibilidad es $x = y$, pero también se puede cumplir otra afirmación, para ello veamos el ejemplo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}, \text{ pero } \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}.$$

2. Si $x^{\frac{1}{x+1}} = \sqrt[4]{3}$, ¿cuál es el valor de $(x+1)^2$?

Resolución

De la ecuación $x^{\frac{1}{x+1}} = 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{3+1}}$

Luego, por comparación $x=3$

$\therefore\ (x+1)^2=(3+1)^2=4^2=16$

3. Sean a y n que cumplen las siguientes condiciones:

I. $9^n - 9^{n-1} = 24$

II. $(2n)^n = a \cdot a^{\frac{1}{a-1}}$

Con ello, calcule el valor de $\frac{a}{n}$.

Resolución

En I

como $9^n = 9^{n-1} \cdot 9^1$, escribimos

$9^{n-1} \cdot 9 - 9^{n-1} = 24$

$9^{n-1}(9-1) = 24 \rightarrow 9^{n-1} \cdot \cancel{8} = 3 \cdot \cancel{8}$

$(3^2)^{n-1} = 3^1 \rightarrow 2n-2=1 \rightarrow 2n=3$

donde $n = \frac{3}{2}$

En II

$(2n)^n = a \cdot a^{\frac{1}{a-1}}$

$\rightarrow \left(\cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}}\right)^{\frac{3}{2}} = a^{1+\frac{1}{a-1}} \rightarrow 3^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{a}{a-1}}$

Por el criterio de comparación $a=3$

Luego $\frac{a}{n} = \frac{\cancel{3}}{\frac{\cancel{3}}{2}} = 2$

4. Si $\underbrace{x \cdot x \ldots x}_{5n \text{ veces}} = \underbrace{x^{n-3} \cdot x^{n-3} \ldots x^{n-3}}_{10 \text{ veces}}$, ¿cuál es el valor de n?

Resolución

De la ecuación, utilizando el exponente natural, se tiene

$x^{5n} = (x^{n-3})^{10} \rightarrow x^{5n} = x^{(n-3)10}$

A bases iguales, exponentes iguales.

$5n = 10(n-3) \rightarrow n = 2(n-3)$

$\rightarrow n = 2n-6$

$\rightarrow n = 6$

5. Si el exponente final de x en $\sqrt{x^n} \cdot \sqrt{x\sqrt{x}}$ es $\frac{9}{4}$, ¿cuál es el valor de n?

Resolución

Como

$$\sqrt{x^n} = x^{n/2} \ \wedge\ \sqrt{x\sqrt{x}} = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x}$$
$$= x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}}$$
$$= x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$$
$$= x^{\frac{3}{4}}$$

La expresión: $\sqrt{x^n} \cdot \sqrt{x\sqrt{x}}$

es equivalente a $x^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}}$

Por dato

$$\frac{n}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{n}{2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow n=3$$

BIOGRAFÍA

Jean-Baptiste Fourier

Nació en Auxerre el 21 de marzo de 1768 y murió en París el 16 de mayo de 1830. Fue un destacado matemático, físico y egiptólogo francés. Sus principales trabajos estudiaron la propagación del calor en los sólidos mediante la descomposición en funciones periódicas en series trigonométricas convergentes (series de Fourier), y el método de eliminación para la solución de un sistema de desigualdades, teoría muy usada actualmente para programación lineal.

A los ocho años quedó huérfano, pero gracias a la intervención de un amigo de la familia ingresó a la Escuela Superior de Auxerre con los benedictinos de Saint-Maur, en donde destaca rápidamente en matemáticas. Participó en la Revolución francesa y luego de esta se incorporó a la Escuela Normal Superior de París. Posteriormente, ocupó la cátedra de análisis en la Escuela Politécnica.

Intervino en la expedición de Napoleón Bonaparte a Egipto en 1798, donde cumplió destacadas funciones políticas como gobernador del Bajo Egipto. Asimismo, llegó a ser secretario del Institut du Caire en 1798, interesándose por la investigación arqueológica. A su regreso a Francia, producido en 1801, es nombrado barón, caballero de la Legión de Honor y prefecto del departamento de Isère.

Una vez establecido en París, en 1817, fue elegido miembro de la Academia de Ciencias Francesa y en 1822 se convirtió en el secretario perpetuo de las secciones de matemáticas y física, junto a Georges Cuvier.

En sus últimos años sucedió a Pierre-Simon Laplace como presidente del consejo de la Escuela Politécnica, en 1827.

En el terreno de su trabajo científico, a partir de 1807 comenzó el estudio de la propagación del calor, que le permite modelar la evolución de la temperatura a través de series trigonométricas, con lo cual contribuye a los fundamentos de la termodinámica; además, logró deducir la ecuación diferencial parcial para el calor, llamada simplemente "ecuación del calor".

En 1812 obtuvo el premio ofrecido por la Academia de Ciencias con una publicación en dos partes: *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*. La primera parte fue reeditada en 1822 bajo el nombre de *Teoría analítica del calor*, y se convirtió en su principal libro ya que, debido a sus nuevos métodos y grandes resultados, hizo época en la historia de la ciencia matemática y física con la introducción de las series de Fourier, series infinitas trigonométricas que causaron gran polémica en el ambiente intelectual pues tuvieron una profunda conexión con la evolución del concepto de función al introducir la representación de una función como una serie de senos y cosenos. De hecho, los avances más relevantes en la matemática del siglo XIX están relacionados a su teoría de las series; también son importantes las aplicaciones de esta materia a la física matemática.

Sus investigaciones también se concentraron en la teoría de las ecuaciones, sin embargo, dejó inacabado su trabajo al respecto. En 1831, Navier completó y publicó el libro póstumo *Análisis de las ecuaciones indeterminadas*, que contenía una demostración de su teorema sobre el cálculo de las raíces de una ecuación algebraica, pero la cuestión de su prioridad en varios puntos se ha discutido profundamente.

Fuente:

http://es.wikipedia.org/wiki/Jean-Baptiste_Joseph_Fourier

http://www.biografiasyvidas.com/biografia/f/fourier.htm

http://pitagora.usach.cl/~calapli/material/biografias/Fourier.pdf

Problemas RESUELTOS

Problema 1

¿Cuál es el equivalente reducido de $\dfrac{4^{10}\cdot 3^7}{2^{20}\cdot 81}$?

Resolución

De

$$\frac{4^{10}\cdot 3^7}{2^{20}\cdot 81}=\frac{(2^2)^{10}\cdot 3^7}{2^{20}\cdot 3^4}=\frac{\cancel{2^{20}}\cdot 3^7}{\cancel{2^{20}}\cdot 3^4}$$

$$=3^{7-4}=3^3=27$$

Problema 2

Sea $n\in\mathbb{N}$ tal que $(n^n)^{3n^{-1}}=27$

¿Cuál es el valor de $\dfrac{n^2+n+1}{n-1}$?

Resolución

De la ecuación $n^{n\cdot 3n^{-1}}=27 \;\rightarrow\; n^{3\cancel{n}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}}=3^3$

$\rightarrow\; n^3=3^3 \;\rightarrow\; n=3.$

$$\rightarrow\; \frac{n^2+n+1}{n-1}=\frac{3^2+3+1}{3-1}=\frac{9+3+1}{2}=\frac{13}{2}$$

Problema 3

Dados los números

$$A=\frac{5^{x+4}-5^{x+2}}{5\cdot 5^{x-1}};\quad B=\frac{3^{y+5}-3^{y+3}}{3^y},$$

calcule el valor de $36\left(\dfrac{A}{B}\right)$.

Resolución

$$A=\frac{5^x\cdot 5^4-5^x\cdot 5^2}{5^x}=\frac{5^x\cdot 5^2(5^2-1)}{5^x}$$

$\rightarrow\; A=5^2\cdot(5^2-1)=25\cdot 24$

$$B=\frac{3^y\cdot 3^5-3^y\cdot 3^3}{3^y}=\frac{\cancel{3^y}\cdot 3^3}{\cancel{3^y}}(3^2-1)$$

$\rightarrow\; B=3^3\cdot(3^2-1)=27\cdot 8$

$$\rightarrow\; 36\left(\frac{A}{B}\right)=\underset{4}{\cancel{36}}\cdot\frac{25\cdot\overset{3}{\cancel{24}}}{\underset{9}{\cancel{27}}\cdot\cancel{8}}=4\cdot 25=100$$

Problema 4

Dada la igualdad $16^{3^{2x}}=8^{4^{2x}}$, ¿cuál es el valor de x?

Resolución

Transformando en sus equivalentes:

$$(2^4)^{3^{2x}}=(2^3)^{4^{2x}} \;\rightarrow\; 2^{4\cdot 3^{2x}}=2^{3\cdot 4^{2x}}$$

A bases iguales, exponentes iguales.

$$4\cdot 3^{2x}=3\cdot 4^{2x} \;\rightarrow\; \frac{4^{2x}}{3^{2x}}=\frac{4}{3}$$

$$\rightarrow\; \left(\frac{4}{3}\right)^{2x}=\left(\frac{4}{3}\right)^1 \;\rightarrow\; 2x=1$$

De donde $x=\dfrac{1}{2}$

Problema 5

Señale el valor de x que verifica la igualdad

$9^{x+1}=27^{x-12}$.

Resolución

$$(3^2)^{x+1}=(3^3)^{x-12} \;\rightarrow\; 3^{2x+2}=3^{3x-36}$$

$\rightarrow\; 2x+2=3x-36 \;\rightarrow\; x=38$

Problema 6

A partir de los datos $U=3^5\cdot 4^7$, $C=5^{10}$, $H=(300)^{-5}$, ¿cuál es el valor de $\sqrt{UCH}$?

Resolución

$$UCH=3^5\cdot 4^7\cdot 5^{10}\cdot (300)^{-5}$$

$$=\frac{3^5\cdot 4^7\cdot 5^{10}}{(300)^5}=\frac{3^5\cdot 4^7\cdot 5^{10}}{(4\cdot 3\cdot 5^2)^5}$$

$$=\frac{\cancel{3^5}\cdot 4^7\cdot \cancel{5^{10}}}{4^5\cdot \cancel{3^5}\cdot \cancel{5^{10}}}=4^2$$

$$\therefore\ \sqrt{UCH}=\sqrt{4^2}=4$$

Problema 7

Reduzca la expresión

$$\frac{\overbrace{5\cdot 5\ldots 5}^{10\text{ veces}}\cdot\overbrace{15\cdot 15\cdot 15\ldots 15}^{7\text{ veces}}}{81^2\cdot 5^{15}}.$$

Resolución

Por exponente natural

$$\frac{5^{10}\cdot 15^7}{81^2\cdot 5^{15}}=\frac{5^{10}\cdot 5^7\cdot 3^7}{(3^4)^2\cdot 5^{15}}$$

$$=5^{10+7-15}\cdot 3^{7-8}$$

$$=5^2\cdot 3^{-1}=\frac{25}{3}$$

Problema 8

Reduzca la expresión

$$\frac{2^5\cdot 4^5\cdot 6^5\cdot 8^5\ldots(2n)^5}{2^5\cdot 3^5\cdot 4^5\ldots n^5};\quad n>10.$$

Resolución

Asociando adecuadamente

$$2^5\cdot\frac{4^5}{2^5}\cdot\frac{6^5}{3^5}\cdot\frac{8^5}{4^5}\cdots\frac{(2n)^5}{n^5}$$

$$\underbrace{2^5\cdot 2^5\cdot 2^5\cdot 2^5\ldots 2^5}_{n\text{ veces}}=(2^5)^n=32^n$$

Problema 9

Si la expresión $\forall\ a\neq 0$

$$\left(\left((a^2)^n\right)^8\right)^{4^0}\left(\frac{a^3}{\underbrace{a\cdot a\ldots a}_{n\text{ veces}}}\right)\cdot a^{99^{0^{88^5}}}$$

se reduce a la unidad, calcule n.

Resolución

Se ve que $n\in\mathbb{N}$, luego

$$a^{2\cdot n\cdot 3\cdot 4^0}\cdot\frac{a^3}{a^n}\cdot a^{99^{0^{88^5}}}=a^{6n}\cdot\frac{a^3}{a^n}\cdot a^1=a^{5n+4}$$

Si reduce a la unidad $(5n+4)=0$;

pero no existe $n\in\mathbb{N}$; $5n+4=0$

Por lo tanto, no existe tal n.

Problema 10

Respecto a la expresión

$$\frac{(x^2)^3\cdot x^{2^3}\cdot x^{(-2)^3}\cdot x^{(-2)^4}}{x^{-2^2}\cdot x^{(-2)^0}\cdot x^{2^0}\cdot x^{-2^0}}$$

indique el valor de verdad de las proposiciones:

I. Se reduce a x^{25} $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

II. Es equivalente a $x^{25}\ \leftrightarrow\ x\neq 0$.

Resolución

Vemos que $x \neq 0$ (por estar en el denominador).

$$\frac{x^{2\cdot 3}\cdot x^{2^3}\cdot x^{(-2)^3}\cdot x^{(-2)^4}}{x^{-2^2}\cdot x^{(-2)^0}\cdot x^{2^0}\cdot x^{-2^0}}=\frac{x^6\cdot x^8\cdot x^{-8}\cdot x^{16}}{x^{-4}\cdot x^1\cdot x^1\cdot x^{-1}}$$

$$\frac{x^6\cdot x^8\cdot x^{-8}\cdot x^{16}}{x^{-4}\cdot x^1\cdot x^1\cdot x^{-1}}=\frac{x^{6+8-8+16}}{x^{-4+1+1-1}}=\frac{x^{22}}{x^{-3}}=x^{25}$$

Luego se cumple $\forall\, x \neq 0$

I. Falsa

II. Verdadera

Problema 11

Indique el valor de verdad de las proposiciones:

I. $\forall\, x \neq 0$

$$\left(\ldots\left(\left(x^{-9}\right)^{-8}\right)^{-7}\ldots\right)^{9}=1$$

II. $4^{-2^{-1}}-3^{-2^{0-1^0}}=6^{-1}$

Resolución

I. **Verdadera**

$x^{-9(-8)(-7)\ldots(-1)(0)\ldots(9)}$; $x^0=1 \quad \forall\, x \neq 0$

II. **Falsa**

0^{-1} no está definido

Problema 12

¿Cuál es el valor de verdad en cada una de las proposiciones con respecto a $m^{n^{p^q}}$?

I. El exponente de n^p es q.

II. El exponente de m^n es n^{p^q-1}.

Resolución

I. De $n^{p^q}=n^{p\cdot p^{q-1}}=(n^p)^{p^{q-1}}$

Luego, el exponente de n^p es p^{q-1}.

II. En $m^{n^{p^q}}=m^{n\cdot n^{p^q-1}}=(m^n)^{n^{p^q-1}}$

Luego, el exponente de m^n es n^{p^q-1}

Entonces

I. Falsa

II. Verdadera

Problema 13

Con respecto a la expresión

$$\left\{\left(2^{-2}\cdot 8^{\frac{1}{3}}\right)^{-n}+\left((-2)^{-2}\cdot(-8)^{\frac{1}{3}}\right)^{-n}\right\}^0;\ n\in\mathbb{N},$$

enuncie el valor de verdad:

I. La expresión se reduce a la unidad.

II. Para n par la expresión es uno.

III. Para n impar la expresión no está definida.

Resolución

Simplificando

$$\left\{\left(\frac{1}{2^2}\cdot\sqrt[3]{8}\right)^{-n}+\left(\frac{1}{2^2}\cdot\sqrt[3]{-8}\right)^{-n}\right\}^0$$

$$=\left\{\left(\frac{2}{4}\right)^{-n}+\left(-\frac{2}{4}\right)^{-n}\right\}^0=\left\{2^n+(-2)^n\right\}^0$$

Si n es par $(2^n+2^n)^0=1$

Si n es impar $(2^n-2^n)^0=0^0$ no definido

Por lo tanto, se concluye que

I. Falsa

II. Verdadera

III. Verdadera

Problema 14

Simplifique

$$\frac{3^{2n+1}+9^{n+1}}{9^{n+1}-3^{2n+1}};\ n\in\mathbb{N}.$$

Resolución

Descomponiendo

$$\frac{3^{2n}\cdot 3+9^{n}\cdot 9}{9^{n}\cdot 9-3^{2n}\cdot 3}=\frac{9^{n}\cdot 3+9^{n}\cdot 9}{9^{n}\cdot 9-9^{n}\cdot 3}$$

y factorizando 9^n se tiene

$$\frac{9^n(3+9)}{9^n(9-3)}=\frac{12}{6}=2$$

Problema 15

Simplifique

$$\sqrt[2n+3]{\frac{(225)^{2n+3}\cdot 225}{5^{2n+3}\cdot 5^2\cdot 4+5^{2n+3}\cdot 5^3}}.$$

Resolución

Descomponiendo adecuadamente

$$\sqrt[2n+3]{\frac{(225)^{2n+3}\cdot \cancel{225}}{5^{2n+3}\cdot \cancel{(5^2\cdot 4+5^3)}}}=\sqrt[2n+3]{\left(\frac{225}{5}\right)^{2n+3}}=45$$

Problema 16

Si $(0,1)^x\cdot(0,2)^y=2^{0,2}\cdot 5^{0,3}$, ¿cuál es el valor de xy?

Resolución

Como

$$\left(\frac{1}{10}\right)^x\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^y=10^{-x}\cdot 5^{-y}=(2\cdot 5)^{-x}\cdot 5^{-y}$$

$$\rightarrow\ 2^{-x}\cdot 5^{-x-y}=2^{0,2}\cdot 5^{0,3}$$

De la igualdad

$$-x=0,2\ \wedge\ -x-y=0,3$$

$$\rightarrow\ -y=0,3+x=0,3-0,2$$

$$\rightarrow\ -y=0,1$$

Luego

$$(-x)(-y)=0,2\cdot 0,1\ \rightarrow\ xy=0,02$$

Problema 17

Si $(2\sqrt[3]{7})^x=3136$, ¿cuál es el valor de x^2+1?

Resolución

Observación

$3136=4^3\cdot 7^2$

Entonces

$$(2\sqrt[3]{7})^x=4^3\cdot 7^2$$

$$\rightarrow\ 2^x\cdot 7^{\frac{x}{3}}=2^{2\cdot 3}\cdot 7^2$$

A bases iguales, exponentes iguales.

$$x=2\cdot 3\ \rightarrow\ x=6$$

$$\therefore\ x^2+1=6^2+1=37$$

Problema 18

Establezca el valor de verdad de cada una de las proposiciones.

La expresión $(\sqrt[x]{y})^z$ y existe en $\mathbb{R}$,

I. si $x\in\mathbb{N}$.

II. si $x>0\ \wedge\ y>0$.

III. si $x\in\mathbb{N}\ \wedge\ y>0$.

IV. si $\{x, y, z\}\in\mathbb{Q}$.

Resolución

Veamos cada una de las proposiciones:

I **Falso**

Tenemos un contraejemplo.

Para $x=2;\ y=-3;\ z=5$

$\sqrt{-3}^{5} \notin \mathbb{R}$

II. **Verdadera**

$\forall\, y > 0$, si $\sqrt[x]{y} \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{N}$

Luego $\left(\sqrt[x]{y}\right)^{z} \in \mathbb{R}$

III. **Verdadera**

Por II

IV. **Falsa**

Veamos un contraejemplo

Para $x=2;\ y=-1/9;\ z=3,$

$\sqrt{-\frac{1}{9}}^{3} \notin \mathbb{R}$

Problema 19

Calcule el valor de a^2+b^2 en $\sqrt[a-b]{\dfrac{\sqrt[b]{a^a \cdot b}}{\sqrt[a]{a^b \cdot b}}} = 3^{\frac{4}{3}}$.

Resolución

Transformando a exponentes fraccionarios se tiene

$$\sqrt[a-b]{\frac{a^{\frac{a}{b}} \cdot b^{\frac{1}{b}}}{a^{\frac{b}{a}} \cdot b^{\frac{1}{a}}}} = \sqrt[a-b]{a^{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}} \cdot b^{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}}$$

Simplificando se obtiene

$$\sqrt[\cancel{a-b}]{a^{\frac{\cancel{a^2-b^2}}{ab}} \cdot b^{\frac{\cancel{a-b}}{ab}}} = a^{\frac{a+b}{ab}} \cdot b^{\frac{1}{ab}}$$

$$= \sqrt[ab]{a^{a+b} \cdot b} = \sqrt[3]{3^4}$$

Como a y b son naturales, se verifica si.

$(a=3 \ \wedge\ b=1) \ \vee\ (a=1 \ \wedge\ b=3)$

$\therefore\ a^2+b^2=10$

Problema 20

Si $\{m;n\} \subset \mathbb{N}$, indique si es verdadera (V) o falsa (F) cada una de las siguientes proposiciones:

I. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}\ ;\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

II. $\sqrt[n]{x} = \sqrt[m \cdot n]{x^m}\ ;\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

III. $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x}^{\,m}\ ;\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

IV. $\sqrt[n]{x^n y} = x\sqrt[n]{y}\ ;\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

Resolución

Aparentemente todas las proposiciones son correctas, pero no siempre es así.

I. Si n es par y x o y son negativos, no es cierto.
II. Si n es par y x es negativo, no es cierto.
III. Si n es par y x es negativo, no es cierto.
IV. Si n es par y x es negativo, no es cierto.

De donde se obtiene que

I. Falsa
II. Falsa
III. Falsa
IV. Falsa

Problema 21

Reduzca $\left(\sqrt[2^{18}]{\left[(x^4)^{64^2}\right]^8 \cdot x^{16^4}}\right)^{\frac{4}{3}}\ ;\ x>0.$

Resolución

Sea el radicando r

$$\rightarrow\ r=\left((x^4)^{64^2}\right)^8 \cdot x^{16^4} = x^{2^2 \cdot (2^6)^2 \cdot 2^3} \cdot x^{(2^4)^4}$$

$$\rightarrow\ r=x^{2^{17}+2^{16}}=x^{2\cdot 2^{16}+2^{16}}=x^{3\cdot 2^{16}}$$

Luego $\left(\sqrt[2^{18}]{x^{3\cdot 2^{16}}}\right)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[2^{18}]{x^{2^{18}}} = x$

Problema 22

Efectúe $3^{-1}\cdot\sqrt[3]{3^{-1}}\cdot\dfrac{3^{n+\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}\cdot\sqrt[n]{3^{n^2}}}$; $n\in\mathbb{N}$; $n\geq 2$.

Resolución

$$\cancel{3^{-1}}\cdot\sqrt[3]{3^{-1}}\cdot\frac{\cancel{3^{n}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}{\cancel{3^{-1}}\cdot\cancel{3^{n}}}=3^{\frac{-1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}=3^0=1$$

> **Nota**
> $\sqrt[n]{3^{n^2}}=3^n$

Problema 23

Resuelva

$$\left\{\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]^{-1}+\left[2-\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right]^{-1}\right\}^{\frac{1}{6}}$$

Resolución

Veamos por partes:

- $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]^{-1}=\left(\frac{1}{25}+\frac{4}{25}\right)^{-1}=\left(\frac{5}{25}\right)^{-1}=5$

- $\left[2-\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right]^{-1}=\left(2-\frac{5}{3}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$

Reemplazando las equivalencias tenemos

$$\{5+3\}^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

Problema 24

Simplifique $\dfrac{\sqrt{a^3b^3\sqrt[4]{a^2b^2\sqrt[5]{ab}}}}{\sqrt[6]{\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^6b^6}}}}}$.

Resolución

> **Recuerde**
> $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$

Luego, se tendrá

$$\frac{\sqrt{(ab)^3\cdot\sqrt[4]{(ab)^2\cdot\sqrt[5]{ab}}}}{\sqrt[2\cdot4\cdot6\cdot5]{(ab)^6}}$$

Haciendo $ab=x$

tenemos

$$\frac{\sqrt{x^3\cdot\sqrt[4]{x^2\sqrt[5]{x}}}}{\sqrt[40]{x}}=\frac{\sqrt[2\cdot4\cdot5]{x^{(3\cdot4+2)5+1}}}{\sqrt[40]{x}}$$

$$\frac{\sqrt[40]{x^{71}}}{\sqrt[40]{x}}=\sqrt[40]{\frac{x^{71}}{x}}=\sqrt[40]{x^{70}}=\sqrt[4]{x^7}$$

Al reponer x por ab, se obtiene $\sqrt[4]{(ab)^7}$.

Problema 25

¿Cuál es el valor simplificado de

$$\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt[4]{c}}}\cdot\sqrt{b\sqrt[3]{c\sqrt[4]{a}}}\cdot\sqrt{c\sqrt[3]{a\sqrt[4]{b}}}$$

si $a=45^7$; $b=\dfrac{3}{5^{23}}$; $c=\dfrac{75^8}{3^{23}}$?

Resolución

> **Recuerde**
> $\sqrt[n]{p}\cdot\sqrt[n]{q}=\sqrt[n]{pq}$

Reduciendo la expresión

$$\sqrt{abc\sqrt[3]{b\sqrt[4]{c}}\cdot\sqrt[3]{c\sqrt[4]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt[4]{b}}}$$

$$=\sqrt{abc\sqrt[3]{abc\sqrt[4]{abc}}}$$

Buscamos abc

$$abc = 45^7 \cdot \frac{3}{5^{23}} \cdot \frac{75^8}{3^{23}}$$

$$= \frac{(3^2 \cdot 5)^7 \cdot 3 \cdot (3 \cdot 5^2)^8}{5^{23} \cdot 3^{23}}$$

$$= \frac{3^{14} \cdot 5^7 \cdot 3 \cdot 3^8 \cdot 5^{16}}{5^{23} \cdot 3^{23}} = \frac{3^{14+1+8} \cdot 5^{7+16}}{5^{23} \cdot 3^{23}}$$

$$= \frac{3^{23} \cdot 5^{23}}{5^{23} \cdot 3^{23}} = 1$$

$\rightarrow \; abc = 1$

Por lo tanto, el valor pedido es $\sqrt{1\sqrt[3]{1\sqrt[4]{1}}} = 1$.

Problema 26

Se define $x_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}_{n \text{ radicales}}$.

Calcule $x_{n+1}^4 - 2x_{n+1}^2 - x_{n-1}$.

Resolución

De la definición se tendrá que

$$x_{n+1} = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}_{(n+1) \text{ radicales}}$$

$$= \sqrt{1+\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}_{x_n}}$$

$$= \sqrt{1+\sqrt{1+\underbrace{\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}_{x_{n-1}}}}$$

Luego

$$x_{n+1} = \sqrt{1+\sqrt{1+x_{n-1}}}$$

$$\rightarrow \; x_{n+1}^2 = 1+\sqrt{1+x_{n-1}}$$

$$\rightarrow \; x_{n+1}^2 - 1 = \sqrt{1+x_{n-1}}$$

Elevando al cuadrado

$$x_{n+1}^4 - 2x_{n+1}^2 + \cancel{1} = \cancel{1} + x_{n-1}$$

Finalmente: $x_{n+1}^4 - 2x_{n+1}^2 - x_{n-1} = 0$

Problema 27

Reduzca $\underbrace{\sqrt[70]{x\sqrt[70]{x\sqrt[70]{x\ldots\sqrt[70]{x\sqrt[69]{x}}}}}}_{71 \text{ radicales}}$

Resolución

Busquemos alguna ley de formación

$$\sqrt[70]{x^1\sqrt[69]{x}} = \sqrt[70\cdot 69]{x^{69+1}} = \sqrt[69]{x}$$

Si tomamos los dos últimos radicales, resulta el último, de donde puede observarse que esa operación se va repetir, dejando el mismo resultado; entonces, todo se reducirá a $\sqrt[69]{x}$.

Problema 28

Simplifique

$$\frac{\sqrt[9]{5}^{\sqrt[3]{125}+\sqrt[3]{50}+\sqrt[3]{20}}}{\left(\sqrt{\sqrt[9]{25}^{\sqrt[3]{5}}}\right)^{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}}.$$

Resolución

▸▸ Nota

$$\left(\sqrt{\sqrt[9]{25}}\right)^{\sqrt[3]{5}} = \left(\sqrt[18]{5^2}\right)^{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[9]{5}^{\sqrt[3]{5}}$$

Luego se tendrá

$$\frac{\sqrt[9]{5}^{\sqrt[3]{125}+\sqrt[3]{50}+\sqrt[3]{20}}}{\left(\sqrt[9]{25}^{\sqrt[3]{5}}\right)^{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}} = \frac{\sqrt[9]{5}^{\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})}}{\sqrt[9]{5}^{\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})}} = 1$$

Problema 29

Calcule aproximadamente cada expresión.

$$A=\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\ldots}}}$$

$$B=\sqrt{72+\sqrt{72+\sqrt{72+\ldots}}}$$

$$C=\sqrt[5]{\frac{64}{\sqrt[5]{\frac{64}{\sqrt[5]{\frac{64}{\vdots}}}}}}$$

$$D=\sqrt{8\sqrt{2\sqrt{8\sqrt{2\ldots}}}}$$

$$E=\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

Resolución

Para el caso de las infinitas veces de una operación, usaremos el siguiente criterio: "Infinito es una cantidad tan inmensamente grande que si quitas 1; 2; 3; ... n; $n \in \mathbb{N}$, no se altera, sigue infinito".

Veamos

I. $A=\sqrt{5\underbrace{\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\ldots}}}}_{A}} \rightarrow A=\sqrt{5A}$

Elevando al cuadrado: $A^2=5A \rightarrow A=5$ pues de la condición inicial vemos que $A>0$.

II. $B=\sqrt{72+\underbrace{\sqrt{72+\sqrt{72+\ldots}}}_{B}}$

$B=\sqrt{72+B}\ ;\ B>0$

Elevando al cuadrado

$B^2=72+B$

$\rightarrow B^2-B=72 \rightarrow B(B-1)=9(9-1)$

Por comparación se obtiene $B=9$

III. $C=\sqrt[5]{\frac{64}{\sqrt[5]{\frac{64}{\sqrt[5]{\frac{64}{\vdots}}}}}} \rightarrow C=\sqrt[5]{\frac{64}{C}}$

Elevando a la quinta

$C^5=\frac{64}{C} \rightarrow C^6=64 \rightarrow C=\sqrt[6]{64}=2$

$\therefore\ C=2$

IV. $D=\sqrt{8\sqrt{2\underbrace{\sqrt{8\sqrt{2\ldots}}}_{D}}}$

$\rightarrow D=\sqrt{8\sqrt{2\cdot D}}$

Elevando al cuadrado: $D^2=8\sqrt{2D}$

Nuevamente al cuadrado

$D^4=8^2\cdot 2D \rightarrow D^3=128$

$\rightarrow D=\sqrt[3]{128}$

$\rightarrow D=\sqrt[3]{64\cdot 2}$

$\therefore\ D=4\sqrt[3]{2}$

V. $E=\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ E

$\rightarrow E=\sqrt[5]{5}^{E} \rightarrow \sqrt[E]{E}=\sqrt[5]{5}$

Por comparación $E=5$.

Problema 30

Calcule el mayor valor de n, si

$$(n\sqrt{n})^{\frac{1}{n\sqrt{n}}}=\left[\left[\left(\left(2^{1+\frac{1}{1}}\right)^{1+\frac{1}{2}}\right)^{1+\frac{1}{3}}\right]^{1+\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{10}}$$

Resolución

Tenemos

$$(n\sqrt{n})^{\frac{1}{n\sqrt{n}}}=2^{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{10}}=2^{\frac{1}{2}}$$

Como $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{2^1}=\sqrt[2\cdot 2]{2^{1\cdot 2}}=\sqrt[4]{4}=4^{\frac{1}{4}}$,

entonces $n\sqrt{n}=2 \ \vee \ n\sqrt{n}=4$

Como piden el mayor valor de n, se tomará $n\sqrt{n}=4$ elevando al cuadrado:

$$n^2\cdot n=4^2 \ \rightarrow \ n^3=16 \ \rightarrow \ n=\sqrt[3]{16}$$

Problema 31

Simplifique la expresión

$$\sqrt[n^{n^n}]{n^{n^{n+n^n}}}\cdot\sqrt[n^{n^n}]{\left(\frac{1}{n}\right)^{n^{n+n^n}}}$$

Resolución

Nota

$$\sqrt[m]{a^\alpha}\cdot\sqrt[m]{b^\alpha}=\sqrt[m]{(ab)^\alpha}$$

En el problema se tendrá

$$\sqrt[n^{n^n}]{n^{\boxed{n^{n+n^n}}}}\cdot\sqrt[n^{n^n}]{\left(\frac{1}{n}\right)^{\boxed{n^{n+n^n}}}}$$

$$\sqrt[n^{n^n}]{\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)^{\boxed{n^{n+n^n}}}}=1$$

Nota

$$n\cdot\frac{1}{n}=1$$

Problema 32

Simplifique la expresión

$$E=\frac{\sqrt[n^2+1]{(n^2+1)^{(n^2+1)^2}\cdot(n^2+1)^1}\cdot\sqrt[n^2+1]{(n^2+1)^{1-(n^2+1)^2}}}{(n^2+1)^{\frac{2}{n^2+1}}},$$

donde $n\in\mathbb{N}$.

Resolución

Nota

$$\frac{\sqrt[m]{a^\alpha}\cdot\sqrt[m]{a^\beta}}{\sqrt[m]{a^\gamma}}=\sqrt[m]{a^{\alpha+\beta-\gamma}}$$

En el problema es conveniente hacer el cambio $n^2+1=b$, entonces

$$E=\frac{\sqrt[b]{b^{b^2}\cdot b}\cdot\sqrt[b]{b^{1-b^2}}}{b^{\frac{2}{b}}}=\frac{\sqrt[b]{b^{b^2+1+1-b^2}}}{\sqrt[b]{b^2}}=\frac{\sqrt[b]{b^2}}{\sqrt[b]{b^2}}=1$$

$\therefore \ E=1$

Problema 33

Reduzca la siguiente expresión

$$\frac{\sqrt[5]{x^2\sqrt[3]{x^4\sqrt{x^7}}}}{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^6}}}{x}}}{x^2}}};\ x>0$$

Resolución

En el numerador se utilizará la regla práctica en radicales sucesivos

$$\sqrt[5]{x^2\sqrt[3]{x^4\sqrt{x^7}}} = \sqrt[5\cdot3\cdot2]{x^{[(2\cdot3)+4]\cdot2+7}}$$
$$= \sqrt[30]{x^{27}} = \sqrt[10]{x^9}$$

Recuerde

$$\frac{a}{b} = ab^{-1}$$

En el denominador se transforma en

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{\frac{\sqrt[5]{\frac{1}{x^6}}}{x}}}{x^2}} = \sqrt[3]{x^{-2}\cdot\sqrt[4]{x^{-1}\cdot\sqrt[5]{x^{-6}}}}$$

Usando la regla práctica

$$\sqrt[3\cdot4\cdot5]{x^{(-2\cdot4-1)\cdot5-6}} = \sqrt[60]{x^{-51}} = \sqrt[20]{x^{-17}}$$

Luego se tiene

$$\frac{\sqrt[10]{x^9}}{\sqrt[20]{x^{-17}}} = \frac{\sqrt[20]{x^{18}}}{\sqrt[20]{x^{-17}}} = \sqrt[20]{x^{18-(-17)}} = \sqrt[20]{x^{35}} = \sqrt[4]{x^7}$$

Problema 34

Halle el exponente de x en

$$S = \underbrace{\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3\ldots\sqrt[4]{x^3}}}}}_{97 \text{ radicales}}$$

Resolución

Hallaremos una regla de formación (método inductivo).

Si fuera un radical

$$\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$$

Si fueran dos radicales

$$\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3}} = \sqrt[16]{x^{15}} = x^{\frac{15}{16}}$$

Si fueran tres radicales

$$\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3}}} = \sqrt[64]{x^{63}} = x^{\frac{63}{64}}$$

Veamos la formación de sus exponentes

$$\frac{3}{4};\ \frac{15}{16};\ \frac{63}{64};\ \ldots$$

$$\frac{4^1-1}{4^1};\ \frac{4^2-1}{4^2};\ \frac{4^3-1}{4^3};\ \ldots$$

Para 97 radicales su exponente será $\frac{4^{97}-1}{4^{97}}$.

Problema 35

Si se cumple que $2^{22}+1024=1024a$

calcule $2^{2^{2^2}} - \left((2^2)^4\right)^{0,5}\cdot a$.

Resolución

De la condición

$$2^{22}+2^{10}=2^{10}\cdot a$$

$$\rightarrow\ 2^{12}+1=a$$

Luego

$$2^{2^{2^2}} - 2^{2\cdot4\cdot0,5}\left(2^{12}+1\right) = 2^{16} - 2^4\left(2^{12}+1\right)$$
$$= 2^{16}-2^{16}-2^4=-16$$

Problema 36

Si se cumple que $A^{A^{A^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\ldots}}}$,

además $A = \left(\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$,

calcule un valor de x.

Resolución

Simplificando en A

como $3\sqrt{3} = \sqrt{3}^3$ entonces:

$$A = \left(\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \rightarrow A = \left(\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}\right)^3}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\rightarrow A = \sqrt{3}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Sea

$$A^{A^{A^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\ldots}}} = y$$

Del problema 29

$$A^{A^{A^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = y \rightarrow A^y = y$$

$$\rightarrow A = y^{\frac{1}{y}} = \sqrt{3}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Por comparación: $y = \sqrt{3}$

asimismo $\sqrt[x]{x\underbrace{\sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\ldots}}}_{y}} = y \rightarrow y = \sqrt[x]{xy}$

entonces $xy = y^x$ de donde

$$y = \sqrt[x-1]{x} = \sqrt{3}$$

Buscando un valor

$$\sqrt[x-1]{x} = \sqrt[3-1]{3}$$

de donde $x = 3$

Problema 37

Calcule un valor de n de la igualdad.

$$n^{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 72 + \sqrt{n}^{72+\sqrt{n}^{72+\sqrt{n}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

Resolución

Igualando a una segunda incógnita:

$$n^{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} y = 72 + \sqrt{n}^{72+\sqrt{n}^{72+\sqrt{n}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} y = y$$

de donde

$$n^{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = y \rightarrow n^y = y \rightarrow n = \sqrt[y]{y} \qquad \text{(I)}$$

asimismo

$$72 + \sqrt{n}^y = y \;;\; y > 0 \qquad \text{(II)}$$

De (I) en (II)

$$72 + \sqrt{\sqrt[y]{y}^y} = y$$

entonces

$$y - \sqrt{y} - 72 = 0$$

de donde

$$y = 81$$

Luego en (I)

$$n = \sqrt[81]{81}$$

Problema 38

De la igualdad

$$\sqrt[x+y]{\left(\frac{\sqrt[x]{xy^{-1}}}{\sqrt[y]{yx^{-1}}}\right)^{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \quad x, y \in \mathbf{N}$$

halle el valor de $\dfrac{3x}{y}$.

Resolución

De la igualdad, usando exponentes fraccionarios tenemos

$$\sqrt[x+y]{\left(\frac{x^{\frac{1}{x}}\cdot y^{-\frac{1}{x}}}{y^{\frac{1}{y}}\cdot x^{-\frac{1}{y}}}\right)^{x^2}}=\sqrt[x+y]{\left(\frac{x^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}}{y^{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}}\right)^{x^2}}$$

$$\rightarrow \sqrt[x+y]{\left(\frac{x^{\frac{x+y}{xy}}}{y^{\frac{x+y}{xy}}}\right)^{x^2}}=\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{xy}}\right)^{x^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\left(\frac{x}{y}\right)}$$

Por dato

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\left(\frac{x}{y}\right)}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

Por comparación

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \frac{3x}{y}=1$$

Problema 39

Calcule el valor de F.

$$F=\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots\sqrt{2\sqrt{2^{2-x}}}}}}}_{n\text{ radicales}},$$

si además

$x=2^{n+1}$.

Resolución

F es equivalente a

$$F=\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots\sqrt{2}}}}}_{(n-1)\text{ radicales}}\cdot\sqrt[2\cdot 2\ldots 2]{2^{2-x}}$$

Del problema 34

$$F=\sqrt[2^{n-1}]{2^{2^{n-1}-1}}\cdot\sqrt[2^n]{2^{2-x}}$$

$$\rightarrow F=2^{\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}}\cdot 2^{\frac{2-2^{n+1}}{2^n}}$$

$$\rightarrow F=2^{\frac{2^n-2}{2^n}+\frac{2-2^{n+1}}{2^n}}=2^{\frac{2^n-2+2-2^n\cdot 2}{2^n}}=2^{\frac{-2^n}{2^n}}$$

$$\therefore\ F=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

Problema 40

Calcule el valor aproximado de

$$A=\sqrt{2\cdot\sqrt{4\cdot\sqrt{8\cdot\sqrt{16\ldots}}}}$$

Resolución

$$A=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[8]{8}\cdot\sqrt[16]{16}\ldots$$

$$A=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{2}{4}}\cdot 2^{\frac{3}{8}}\cdot 2^{\frac{4}{16}}\ldots$$

$$A=2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots}$$

Sea S el exponente de 2, entonces

$$S=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots \qquad \text{(I)}$$

$$2S=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\ldots \qquad \text{(II)}$$

De (II) − (I)

$$S=\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\ldots}_{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} \qquad \text{(suma límite)}$$

Entonces

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

$$\therefore\ A=2^2=4$$

Nota

si $-1 < r < 1$ se cumple

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots = \frac{a}{1-r}$$

Esta suma límite está demostrada en el capítulo de series.

Problema 41

Si el equivalente reducido de

$$\sqrt{x\sqrt{x^3\sqrt{x^5\sqrt{x^7\ldots\sqrt{x^{2n-1}}}}}} \text{ es } x^{a-\left(\frac{bn+a}{2^n}\right)},$$

calcule el valor de $\dfrac{a+1}{b+1} - \dfrac{a-1}{b-1}$.

Resolución

Por inducción

- Para un radical

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

- Para dos radicales

$$\sqrt{x\sqrt{x^3}} = x^{\frac{5}{4}}$$

Como el exponente de x es de la forma

$$\frac{a \cdot 2^n - bn - a}{2^n}, \text{ entonces}$$

por definición de identidad:

Si $n=1$

$$\rightarrow \frac{2a-b-a}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow a-b=1 \qquad \text{(I)}$$

Si $n=2$

$$\rightarrow \frac{4a-2b-a}{4} = \frac{5}{4} \rightarrow 3a-2b=5 \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$a=3;\ b=2$$

Luego, lo pedido

$$\frac{a+1}{b+1} - \frac{a-1}{b-1}$$

Reemplazamos

$$\frac{3+1}{2+1} - \frac{3-1}{2-1} = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

Problema 42

Halle el exponente de x en la expresión A.

$$A = \sqrt[n]{x^{n-1}\sqrt[n-1]{x^{n-2}\sqrt[n-2]{x^{n-3}\ldots\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}}}.$$

Resolución

Buscamos una ley de formación inductivamente.

- Para un radical

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

- Para dos radicales

$$\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}} = x^{\frac{5}{6}}$$

- Para tres radicales

$$\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}} = x^{\frac{23}{24}}$$

$$\vdots$$

Se forma la siguiente secuencia:

$$\frac{\lfloor 2-1}{\lfloor 2};\ \frac{\lfloor 3-1}{\lfloor 3};\ \frac{\lfloor 4-1}{\lfloor 4};\ldots$$

Observamos que tiene $(n-1)$ radicales, luego para $(n-1)$ radicales se tendrá

$$A = x^{\frac{\lfloor n-1}{\lfloor n}}$$

Por lo tanto, el exponente de x es $\dfrac{\lfloor n-1}{\lfloor n}$.

Nota

$\lfloor n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

Problema 43

Simplifique la expresión M.

$$M=\left\{\left[\frac{\left(a^{\frac{a+1}{a}}+a^{\frac{a-1}{a}}\right)^{a}}{a^{a-1}\cdot\left(a^{\frac{2}{a}}+1\right)^{\frac{1}{a}}}\right]^{\frac{a}{a^2-1}}-1\right\}^{a};\ a\in\mathbb{R}^{+}.$$

Resolución

Veamos por partes

$$a^{\frac{a+1}{a}}=a^{1+\frac{1}{a}}=a\cdot\sqrt[a]{a}$$

$$a^{\frac{a-1}{a}}=a^{1-\frac{1}{a}}=\frac{a}{\sqrt[a]{a}}$$

$$\rightarrow\ \left(a^{\frac{a+1}{a}}+a^{\frac{a-1}{a}}\right)^{a}=\left(a\cdot\sqrt[a]{a}+\frac{a}{\sqrt[a]{a}}\right)^{a}$$

$$=a^{a}\left(\frac{\sqrt[a]{a}^{2}+1}{\sqrt[a]{a}}\right)^{a}=a^{a-1}\cdot\left(\sqrt[a]{a}^{2}+1\right)^{a}$$

Reemplazando, se tiene

$$M=\left\{\left[\frac{\cancel{a^{a-1}}\cdot\left(\sqrt[a]{a}^{2}+1\right)^{a}}{\cancel{a^{a-1}}\cdot\left(\sqrt[a]{a}^{2}+1\right)^{\frac{1}{a}}}\right]^{\frac{a}{a^2-1}}-1\right\}^{a}$$

$$\rightarrow\ M=\left\{\left[\left(\sqrt[a]{a}^{2}+1\right)^{\frac{a^2-1}{a}}\right]^{\frac{a}{a^2-1}}-1\right\}$$

$$\rightarrow\ M=\left(\sqrt[a]{a}^{2}+1-1\right)^{a}=a^{2}$$

Entonces

$$M=\sqrt[a]{a}^{2a}$$

$$\therefore\ M=a^{2}$$

Test 2

1. ¿Cuál es el equivalente reducido de $\dfrac{15^2 \cdot 81^3}{9 \cdot 27^4}$?

A) 9 B) 25 C) 27
D) 15 E) 75

2. Indique el equivalente reducido de

$$\frac{\overbrace{5 \cdot 5 \ldots 5}^{10 \text{ factores}}}{\underbrace{5+5+\ldots+5}_{5^7 \text{ sumandos}}}.$$

A) 25 B) 50 C) 15
D) 3 E) 5

3. Calcule la suma de las cifras del resultado de efectuar

$$36^4 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^4 - 33^2 \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^2.$$

A) 8 B) 6 C) 9
D) 4 E) 5

4. ¿Cuál es el valor de m en $\dfrac{2^{m+3} \cdot 8}{2^6} = 16$?

A) 2 B) 3 C) 1
D) 4 E) 5

5. Si $S = (3^{-2})^{-1} + 4^{1^{-2}} - 5^{30^0}$,

¿cuál es el valor de $\dfrac{S}{13}$?

A) 1 B) 13 C) 7
D) 2 E) $\dfrac{8}{13}$

6. Reduzca la expresión

$$25^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

A) $\dfrac{11}{2}$ B) 5 C) 2
D) 4 E) $\dfrac{1}{2}$

7. ¿Cuál es el valor de x que verifica la igualdad

$$2^{\frac{x^2+1}{72}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}\,?$$

A) ± 4 B) -2 C) 4
D) -4 E) ± 2

8. Halle el valor simplificado de

$$\sqrt[3]{\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]^{-1} + \left[3 - \left(\frac{3}{8}\right)^{-1}\right]^{-1}}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

9. La siguiente expresión

$$\frac{\sqrt{27\sqrt[4]{9\sqrt[3]{81}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[10]{3^{-5}}}}}$$ es equivalente a

A) 1 B) 3 C) $\sqrt{3}$
D) 9 E) $\sqrt[3]{9}$

10. Si se cumple que $2^{3^x} = 8^{2y}$,

¿cuál es el valor de $\sqrt[x]{2y}$?

A) 1 B) 2 C) 1/2
D) 1/3 E) 3

11. ¿Qué valor de x cumple la igualdad?

$$(0,2)^{4^{-7^{-x}}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{(0,25)^{\left(\frac{1}{7}\right)^2}}$$

A) 5
B) 2
C) 4
D) 25
E) 10

12. Si $A = 12^4 \cdot 3^6 \cdot 6^7 \cdot 4^6 \cdot 2^7$ y $B = \dfrac{15^6}{5^4 \cdot 3^5}$,

¿cuál es el valor de $\dfrac{A^{\frac{1}{17}}}{B}$?

A) $\dfrac{1}{5}$
B) $\dfrac{4}{5}$
C) $\dfrac{4}{25}$
D) $\dfrac{1}{25}$
E) 1

Claves

1 B	3 C	5 E	7 A	9 D	11 B
2 A	4 D	6 B	8 B	10 E	12 C

Problemas PROPUESTOS

Nivel I

1. Reduzca la expresión

$$\frac{2^{n+4}}{2^{n+3}}+\frac{5^{n+3}}{5^{n+1}}-\frac{3^{2-x}}{3^{1-x}}.$$

A) 21 B) 4 C) 24
D) 10 E) 30

2. Indique cuál es el equivalente reducido de

$$\frac{\overbrace{3^4+3^4+3^4+\ldots+3^4}^{3^2\text{ veces}}}{\underbrace{3+3+3+\ldots+3}_{3^2\text{ veces}}}.$$

A) 9 B) 27 C) 6
D) 3 E) 5

3. Calcule el valor de R

$$R=\frac{(2^{-2})^{-1}\cdot(2^2)^2}{2\cdot 2^2\cdot 2^3}.$$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 16 E) 8

4. Calcule el valor de S

$$S=5\cdot 3^{-\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}}+4\cdot 9^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}.$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) 1
D) $\frac{1}{9}$ E) $-\frac{1}{9}$

5. Indique cuál es el valor de M.

$$M=\frac{\left(\left((2^{-3})^8\right)^5\right)^{-2}}{\left(\left((2^6)^{-10}\right)^{-1}\right)^4}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2
D) $\frac{1}{4}$ E) 4

6. Calcule el valor de E.

$$E=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{64}}.$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) 1
D) 4 E) $\frac{3}{4}$

7. Indique cuál es el exponente de x^2 luego de reducir la expresión

$$\frac{x\left[x^3(x^2)^{-2}\right]^{-1}}{(2x^2)^3\cdot x^{-2}};\ x\neq 0$$

A) 1 B) -1 C) 2
D) -2 E) 3

8. Si $2^x=3$, calcule el valor de M.

$$M=\frac{2^{x+3}+4^{x+1}}{8^x+3}.$$

A) 6 B) 7 C) 8
D) 2 E) 10

9. Si el exponente final de x luego de reducir

$$\sqrt[a+1]{x^{-1}\sqrt[a]{x\cdot\sqrt[a+1]{x}}}\text{ es }-\left(\frac{2}{9}\right)\cdot a^{-1},$$

indique cuál es el valor de a.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

10. De la igualdad

$$\sqrt{x\sqrt[4]{x^3\sqrt{x^{-1}\sqrt[4]{x^{-2}}}}} = x^{\frac{a}{b}},$$

donde a y b son primos entre sí, ¿cuál es el valor de $b-a$?

A) 10 B) 7 C) 6
D) −1 E) 57

11. Si al reducir la expresión

$$\sqrt[3]{\frac{(0{,}004)^4\cdot(0{,}0036)}{(120\,000)^2}}$$

se obtuvo como resultado $4\cdot 10^M$,

¿cuál es el valor de M^2+1?

A) 65 B) 17 C) 37
D) 26 E) $\frac{34}{9}$

12. Calcule el equivalente reducido de

$$\left(\frac{\sqrt[n]{x\sqrt[n+1]{x^n}}}{\sqrt[n+1]{x\sqrt[n]{x^{n+1}}}}\right)^{n^3}.$$

A) x B) x^n C) x^{n^3}
D) 1 E) x^{n^2}

13. Indique cuál es el equivalente simplificado de $\left(\sqrt{\sqrt[5]{x}}\right)\left(\sqrt[5]{\sqrt[8]{x}}\right).\left(\sqrt[8]{\sqrt[11]{x}}\right)\ldots$ 5 paréntesis.

A) $\sqrt[34]{x^5}$ B) $\sqrt[16]{x^9}$ C) $\sqrt[18]{x^7}$
D) $\sqrt[36]{x^{17}}$ E) $\sqrt[34]{x^7}$

14. Calcule el valor de S.

$$S=\left(\frac{-1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(-\frac{1}{32}\right)^{\frac{2}{5}}.$$

A) 2/3 B) 5/2 C) 5/6
D) 37/4 E) 1

15. Si se cumple que $\left(\frac{x-2}{x-4}\right)^{y-3}=1$,

calcule la suma de todos los valores que no puede tomar x dividido entre el valor de y.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

16. Calcule el valor simplificado de E.

$$E=\frac{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{4}}}{\sqrt{2}\,\sqrt[3]{2}}.$$

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt[3]{2}$
D) 1 E) 2^2

17. Efectúe y simplifique.

$$(5^6)^{6^{-1}}+\left(6^{7^4}\right)^{7^{-4}}+5^7+(-5)^7+3^{4^{5^{0^6}}}$$

A) 10 B) 15 C) 28
D) 92 E) 115

18. Definimos el operador (*) como sigue:

$a*b=b^{a-1}$

Indique el equivalente reducido de

$$\frac{(a+1)*(ab+a)}{(a+1)*(b+1)}.$$

A) a B) b C) a^b
D) b^a E) a^a

19. Efectúe y calcule su valor reducido

$$\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[4]{2^5}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{2^{-1}}.$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 6 E) 2/3

20. ¿Qué valor positivo de x verifica la ecuación exponencial?

$$(x-1)^{x+2}=(x-1)^{x^2}$$

A) 4 B) 3 C) $\sqrt{2}$

D) 2 E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Nivel II

21. Si $a^{2a^6}=3$; $a>0$, calcule el valor de $\left(a^{a^{a^6}}\right)^{\sqrt{3}}$.

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 1

D) 3 E) $\sqrt[3]{3}$

22. Sea n un número impar tal que

$A=\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\ldots\sqrt[3]{4}}}}$; de n radicales

$B=\sqrt[3]{16+\sqrt[3]{16+\sqrt[3]{16\ldots+\sqrt[3]{16}}}}$, de n radicales

calcule $A\cdot B$.

A) 4 B) 2 C) 1

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

23. Indique qué número se obtiene luego de efectuar

$$\left[256^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}(1-\sqrt{8})}}\right]^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2^{\frac{1}{2}}}}.$$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{8}$

D) 2 E) 4

24. Simplifique la expresión

$$\left(\frac{x^{x^{-x}}+x^{-x^{x}}}{x^{-x^{-x}}+x^{x^{x}}}\right)^{\frac{x^x}{1-x^{2x}}}, \text{ si } x>0.$$

A) x^2 B) $\sqrt{x}$ C) x

D) x^3 E) 1

25. Luego de resolver la ecuación

$$x^{x^{\sqrt[4]{x}+0{,}25}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}^{1-2\sqrt{2}}}$$

indique el valor de $\sqrt[4x+\sqrt[3]{x^8}]{}$.

A) 16^{-1} B) 8 C) 8^{-1}

D) 4^{-1} E) 2^{-1}

26. Calcule la suma de los exponentes de x e y luego de reducir la expresión

$$\left(\sqrt[\frac{x-y}{2}]{\frac{xy}{\sqrt[y]{(xy)^x}}}\right)^{-x}\cdot\left\{\sqrt[\frac{y-1}{4}]{\frac{xy}{\sqrt[y]{xy}}}\right\}^{y}\cdot\sqrt[y]{xy}^{-2x},$$

en la que $x-y=2k \wedge y-1=4r$, con $\{k;r\}\subset\mathbb{N}$.

A) 2 B) 4 C) 6

D) 8 E) 10

27. Indique el exponente final de x en

$$\sqrt[3]{x^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{x^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{x^{\frac{1}{3}}}}\ldots}\ k \text{ radicales.}$$

A) $\frac{1}{2}\left(\frac{3^k-1}{3^k}\right)$

B) $\frac{1}{9}\left(\frac{3^k+1}{3^k}\right)$

C) $\frac{1}{3}\left(\frac{3^k-1}{3^k}\right)$

D) $\frac{3^k+1}{3^k-1}$

E) $\frac{1}{2}\left(\frac{3^k-1}{3^{k+1}}\right)$

28. Indique el exponente final de x en

$$\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x^4\sqrt[9]{x^{24}\sqrt[17]{x^{240}\ldots}}}}\quad n \text{ radicales.}$$

A) $\dfrac{2^n+1}{2^n-1}$ B) $\dfrac{2^n}{2^n-1}$ C) $\dfrac{2^n}{2^n+1}$

D) $\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$ E) $\dfrac{2^n+1}{2^n}$

29. De la igualdad $x^{(x-1)^2}=2x+1$,

calcule el valor de $x-\dfrac{1}{x}$.

A) 2 B) 4 C) 5

D) 7 E) 10

30. Calcule aproximadamente A.

$$A=\sqrt{2\sqrt{4\sqrt{2\sqrt{4\ldots}}}}.$$

A) 2 B) $2\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt{2}$

D) 16 E) $\sqrt[4]{2^5}$

31. Halle una relación entre x e y en

$$\sqrt[y]{\frac{x^{xy+x}\cdot y^{y^2+y}}{y^y\cdot x^x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

A) $y=x$ B) $y=3x$ C) $y=2x$

D) $2x=3y$ E) $y=4x$

32. Simplifique la expresión

$$\frac{\left[\sqrt[5]{5^{\sqrt{\frac{5}{4}}}}\cdot\sqrt{5^{\left(\frac{5}{3\sqrt{45}}\right)^{-1}}}\right]^{\sqrt{5}}}{125}.$$

A) 1 B) 5 C) 25

D) 125 E) $\sqrt[5]{5}$

33. Indique el valor de verdad de cada una de las proposiciones.

I. $(-4)^{\frac{2}{4}}=(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$

II. $\sqrt{a^n}=\sqrt{a}^{\,n} \leftrightarrow a>0 \vee (a=0 \wedge n>0)$

III. $\left(\left(\dfrac{x-1}{4}\right)^{-1}\right)^0=1;\ \forall x\in\mathbb{R}$

A) FVF B) FVV C) FFF

D) VFF E) VVF

34. Con respecto a la expresión

$$M=\frac{\left(\sqrt[x]{1\cdot x\cdot x^2\cdot x^3\ldots x^x}\right)^2}{\underbrace{x^x+x^x+x^x+\ldots+x^x}_{x \text{ sumandos}}},$$

establezca el valor de verdad de cada una de las proposiciones.

I. Se reduce a 1 si $x\in\mathbb{N}-\{1\}$.

II. Se reduce a x si $x\in\mathbb{N}-\{1\}$.

III. Se reduce a x^{x+1} si $x\in\mathbb{N}-\{1\}$.

A) VFF B) FVV C) FFV

D) FVF E) FFF

35. Si x e y verifican la igualdad $xy+x+y=1$, halle el valor de

$$\left(\frac{\sqrt[y+1]{4^{x+1}}}{\sqrt[x+1]{4^{y+1}}}\right)^{\frac{(x-y)^{-1}}{3-xy}}.$$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$

D) 4 E) 8

36. Luego de resolver la ecuación exponencial $x^{x^{0,5}}=\sqrt{0,5}$, el valor de x toma la forma 4^n, donde n es igual a

A) -4 B) -7 C) -10

D) -12 E) -16

37. Si se sabe que $a^b = \left(\frac{1}{b}\right)^a = 2$,

calcule el valor de $\left(\frac{a^{b^{1-a}} + b^{a^{1-b}}}{a^{b^{1+a}} + b^{a^{1+b}}}\right)^{1+a^b \cdot b^a}$.

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 4

D) $\frac{1}{4}$ E) 8

38. Si $x^{\sqrt{x}}$ es equivalente a 4,

calcule el valor de $\left[x^{\left(\frac{1}{2^{10}}\right)} \cdot x^{x^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x}\right)}}\right]^{\sqrt{x}}$.

A) 3 B) 4 C) 2

D) $\sqrt[4]{2}$ E) $4^{\frac{1}{4}}$

39. Calcule el exponente final de x.

$\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3\sqrt[5]{x^4\ldots}}}}$

A) 1 B) 2 C) 3

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

40. Dada la siguiente sucesión

$x_1 = \sqrt{2};\ x_2 = \sqrt{2\sqrt{2}};\ x_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}};\ \ldots,$

calcule el valor de $\frac{x_4^2 \cdot x_{11}^2}{x_3 \cdot x_{10}}$.

A) 2 B) 4 C) 5

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

41. Se tiene la siguiente ecuación

$\sqrt{x^{\sqrt{x}}} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{a^{\sqrt{a}+1}}$.

Indique el valor de no verdad de las siguientes proposiciones:

I. Las expresiones quedan bien definidas si $x \in \mathbb{R}$.

II. La igualdad se verifica si y solo si $a \in \mathbb{R}+;\ x=a$.

III. Si x existe, entonces a existe.

A) FVV B) VFF C) VVF

D) FFV E) FFF

42. Reduzca la expresión

$\frac{(x^5)^{x^{-x}} + x^{x+x^x}}{x(x^{x+4}+1)}$; si $x^x=5$.

A) 1 B) x C) $x+1$

D) x^2 E) x^5

43. Dados los números

$A = \left(2^{2^{-3^5}}\right)^{2^{3^5}} - \left(3^{3^{-n^3}}\right)^{3^{n^3}}$;

$B = \left(\ldots\left((2^2)^4\right)^6 \ldots\right)^{14}$,

halle el valor de S.

$S = \frac{B^{\frac{1}{n}}}{-2^{2^7}(A)}$,

Considere: $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$.

A) –1 B) 1 C) 2

D) –2 E) 1/2

44. Determine el valor de M.

$M = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{4}\sqrt[5]{\frac{5}{6}}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{5}{3}\sqrt[5]{\frac{4}{5}}}}}{\sqrt[3]{\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{5}{4}\sqrt[5]{\frac{2}{3}}}}}$.

A) 1 B) 2 C) 3/5

D) 4/3 E) 2/3

45. Calcule el valor de $a^{\left(\frac{a^{a+1}}{a^a-1}\right)}$, si $a^{-a}=\frac{1}{3}$.

A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $5\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

46. Analice las proposiciones siguientes:

I. En $\mathbb{R}$: $\sqrt{16}=4 \wedge \sqrt[3]{8}=-2$.

II. $\sqrt{(-3)^2}=3 \vee \sqrt{(-7)^2}=7$.

III. En $\mathbb{R}$: $\sqrt{(-1)(-2)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-2}$.

Determine su valor de verdad.

A) FVF B) FFF C) VVV
D) VVF E) FFV

47. Determine el valor de verdad de las proposiciones:

I. $\forall x \in \mathbb{R};\ x^0=1 \rightarrow (-2)^0=1$

II. Si $x^M\cdot x^n=x^{m+n} \rightarrow 3^3\cdot 3^3=9^9$

III. $\forall x \in \mathbb{R};\ (-x)^2=x^2 \vee (-3)^2=-9$

A) VFV B) VVF C) VVV
D) VFF E) FFF

48. Simplifique la expresión A,
$\forall n \in \mathbb{N}-\{1\}$; además $xyz \neq 0$.

$$A=\sqrt[n]{\frac{(xy)^n+(yz)^n+(zx)^n}{x^{-n}+y^{-n}+z^{-n}}}\cdot\frac{x^{-1}\cdot z^{-1}}{y}.$$

A) 1 B) 0 C) x
D) $x^ny^nz^n$ E) xyz

49. Halle el equivalente reducido de M.

$$M=\frac{2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}+2^{x+4}}{2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}+2^{x-4}}.$$

A) 2 B) 1 C) 16
D) 1/5 E) 32

50. Luego de reducir la expresión

$$M=\frac{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3}}}}}{\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2}}}}}$$

indique el exponente de a.

A) $\frac{72}{13}$ B) $\frac{19}{72}$ C) $\frac{13}{36}$
D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{13}{72}$

51. Si $x^x=2$,

calcule el valor de $x^{x^{1+2x^{1+x}}}$.

A) 2^{16} B) 2^{64} C) 2^{32}
D) 2^4 E) 2^{18}

52. Simplifique la expresión M.

$$M=\frac{4^{-2^{-1}}-16^{-2^{-1}}-25^{-2^{-1}}}{36^{-2^{-1}}+25^{-2^{-1}}+81^{-2^{-1}}}+\left[\frac{2^{2^{(-5)^0}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2^{\sqrt{2}^2}}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-\left(\frac{1}{5}\right)^0}}\right]^{3^{0^7}}$$

A) $\frac{9}{86}$ B) $\frac{86}{9}$ C) $\frac{43}{11}$
D) $\frac{20}{41}$ E) $\frac{11}{43}$

53. Simplifique la expresión S.

$$S=\left(x^{\frac{n}{n-1}}\cdot\sqrt[n-1]{\frac{y^{n+1}}{\sqrt[n]{xy^{n+1}}}}\right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

A) x B) x^n C) xy
D) 1 E) $\frac{x}{y}$

54. Simplifique la expresión E.

$$E=\frac{\sqrt[x]{2^x+3^{-x}}+\sqrt[x]{2^{-x}+3^x}}{\sqrt[x]{6^x+1}};\quad \forall x\in \mathbf{N}-\{1\}.$$

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) 2
D) 3 E) 5

55. Efectúe y simplifique

$$\frac{\left(a^{3^2}b^{3^3}\right)^{3^{-2}}+\left(a^{-1}b^{-\frac{1}{2}}\right)^2-\left(a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{9}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}{a^{-1}\cdot b}.$$

A) 1 B) $\frac{a^2}{b}$ C) $\frac{a}{b}$
D) $\frac{1}{ab^2}$ E) $\frac{b}{a}$

56. Si $x=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots}}}$; $y=2^{\frac{x}{3}}$,
calcule el valor aproximado de M.

$$M=\sqrt[x-1]{y+2}$$

A) $\sqrt[3]{3}$ B) 4 C) $\sqrt{3}$
D) 2 E) 16

57. Reduzca la expresión P.

$$P=\frac{3^{\frac{n+2}{n}}\cdot(48)^{\frac{2}{n}}\cdot 9}{12^{\frac{4}{n}}}.$$

A) 3 B) 9 C) 27
D) 1 E) 12

58. Si A y T son dos números tales que

$$A=\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots}}},$$

$$T=\sqrt[4]{A+11+\sqrt[4]{A+11+\sqrt[4]{A+11+\ldots}}},$$

calcule el valor aproximado de S.

$$S=\sqrt[4]{T^4-T}.$$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

59. Calcule el exponente final de x.

$$S_{(x)}=\underbrace{\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\ldots}}}}_{n\text{ radicales}}$$

A) $3^n-\frac{1}{2^n}$ B) $3^n-\frac{1}{3^n}$ C) $3^n-\frac{1}{2}$
D) $\frac{3^n}{2^n}$ E) $\frac{3^n-1}{2\cdot 3^n}$

60. Si el exponente final de x es 15

$$E=\left\{\frac{\sqrt[a]{x^{a+1}\sqrt[a]{x^{a^2+2}\sqrt[a]{x^{a^3+3}}}}}{\sqrt[a]{x\sqrt[a]{x^2\sqrt[a]{x^3}}}}\right\}^a,$$

calcule el valor de a.

A) 8 B) 5 C) 3
D) $3a$ E) 1

CLAVES
Problemas propuestos

NIVEL I

1 C	5 B	9 A	13 A	17 D
2 B	6 C	10 B	14 D	18 E
3 A	7 B	11 A	15 B	19 D
4 D	8 D	12 D	16 D	20 D

NIVEL II

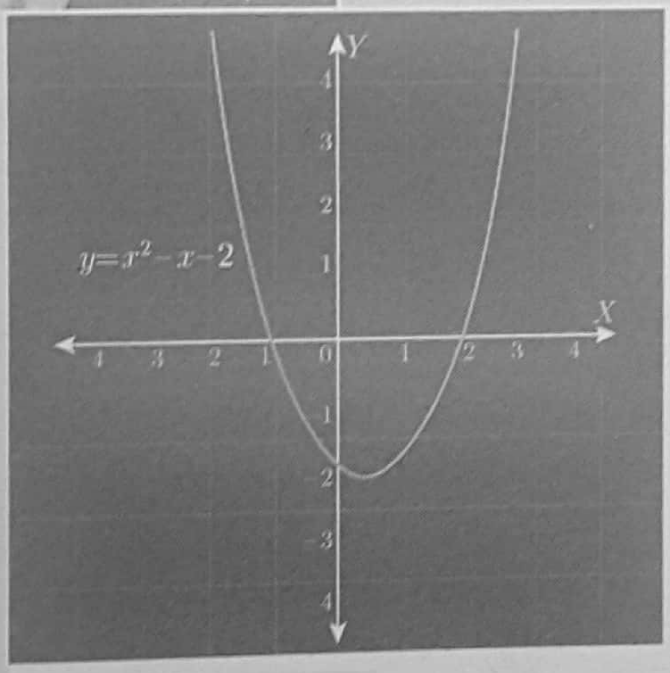
21 A	29 A	37 E	45 B	53 C
22 A	30 B	38 E	46 A	54 A
23 E	31 B	39 A	47 A	55 D
24 C	32 C	40 B	48 A	56 D
25 A	33 A	41 A	49 E	57 C
26 D	34 A	42 A	50 E	58 B
27 E	35 B	43 B	51 A	59 E
28 D	36 A	44 A	52 E	60 B

Capítulo

III

Brook Taylor

$$f_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$



Polinomios

CAPÍTULO III

POLINOMIOS

Objetivos

- Identificar un polinomio y sus elementos variables, coeficientes, grado, número de términos y otras características.
- Calcular el valor numérico de expresiones matemáticas.
- Efectuar cambios de variable en expresiones algebraicas.

Introducción

En este capítulo vamos a resaltar la importancia de los polinomios. Citemos un hecho sencillo que nos permitirá comprender la utilidad de los polinomios en nuestra vida cotidiana y cómo podrán ser utilizados para proyectos más grandes.

Por ejemplo, la construcción de una casa pequeña de apenas una habitación de y metros de largo, z metros de ancho y con una altura de x metros demandará los siguientes gastos: a soles en la compra del terreno, b soles en estudio de la calidad del suelo, c soles en la construcción y d soles en el acabado.

Las letras x, y, z, a, b, c, d son variables con las cuales se tendrá un presupuesto total de la obra H (habitación), que dependerá de dichas variables y la denotaremos de la siguiente forma: $H(x, y, z, a, b, c, d)$.

Estos mismos datos le podrán servir a un ingeniero civil para elaborar un proyecto de construcción de un conjunto habitacional, de dimensiones no necesariamente homogéneas.

Es así como se elaboran los grandes proyectos, que finalmente obedecen a ciertos modelos matemáticos llamados polinomios.

Forma de un polinomio:

$$P_{(x;\,y;\,z)}=a_0xy^4z-a_1xy^nz^{n+3}$$

Donde: x; y; z son las variables.

a_0, a_1 son coeficientes (constantes).

DEFINICIONES PREVIAS

EXPRESIÓN MATEMÁTICA

Es una representación matemática de números y letras ligados por los diferentes operadores matemáticos. Así:

$45\sqrt{\pi}$ → expresión numérica;

$2\sqrt{x-y}+3x$ → expresiones literales

Ejemplos

1. $3x^4+32\text{sen}x+e^{y+1}$
2. $45\text{sen}(\pi x+1)+\log(\sqrt{x}-3)$
3. $-16(x+3y)^4+\binom{x}{a}xy^3$
4. $(\sqrt{5}-\sqrt{2}+1)xyz^{x+y+z}$
5. $(32-12x)^2-4ac$

NOTACIÓN MATEMÁTICA

Es la representación simbólica de una expresión matemática que nos permite diferenciar a las variables de las constantes.

Variables

Son aquellas expresiones que para cada problema cambian de valor. Se les representa mediante las últimas letras: x; y; z.

Constantes

Son aquellas expresiones que tienen un valor fijo para todo problema.

Ejemplos

1. $\underbrace{S_{(x;\,y;\,z)}}_{\text{variables}}=\underbrace{\frac{4\pi}{3}}x^5y^{12}-\underbrace{2}\sqrt[7]{2x-y}+\underbrace{\sqrt{2}}$

   constantes

2. $T_{(x;\,y)}=x^x+2\text{sen}y-4$

Nota

Dentro de las constantes, mencionamos las siguientes:

I. Constantes absolutas: π; 4; 3.

II. Constantes relativas: g (aceleración de la gravedad depende del radio terrestre).

Ejercicio para el lector

Indique las variables y constantes en:

I. $R_{(x;\,y)}=98x^{\sqrt{2}}y+\pi\,\text{sen}(x-y)$

II. $M_{(a;\,b;\,c)}=3333a^{23}+222b^{15}+111c^{\sqrt{3}}+$
$+\log_{\sqrt{2}}(abc)$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Es una expresión matemática en la cual para la variable o variables solo se definen las operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación, división, elevación a exponente natural, extracción de una raíz aritmética) en un número limitado de combinaciones.

Ejemplos

1. $R_{(x)}=6x-5$
2. $S_{(x;\,y)}=29x^3-\sqrt[7]{xy}$
3. $M_{(x;\,y)}=\dfrac{x+2y}{\sqrt{2x-y+5}}+x^{-3}$
4. $T_{(x;\,y)}=-42x^2y^5+\sqrt{2}$
5. $V_{(r)}=\dfrac{4}{3}\pi r^3$
6. $W_{(t)}=w\cdot t+\dfrac{1}{2}at^2$
7. $J_{(n)}=n^4-5n+99$

Término algebraico

Es una expresión algebraica previamente reducida donde no se definen las operaciones de adición ni sustracción entre las variables.

Ejemplos

1. $S_{(x;\,y)} = \dfrac{4}{a+b}x^5\sqrt{y}$

2. $f_{(x;\,y;\,z)} = -\dfrac{25}{\sqrt{2}+1}\sqrt{xy}\,xy^3$

3. $V_{(h;\,r)} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

4. $Q_{(x;\,y)} = \dfrac{\sqrt{x\sqrt{y}}}{\sqrt{3}-1}$

5. $R_{(x)}=2x+1$ no es término algebraico.

Partes de un término algebraico

Tiene tres partes, veamos:

exponentes de las variables

$$Q_{(x;\,y;\,z)} = \boxed{-\frac{20}{\sqrt{\pi}}}\ \underbrace{x^{33}\,y^{41}\,z^{\frac{4}{3}}}_{\text{parte variable}}$$

parte constante (coeficiente)

Son tres las partes:

1. Coeficiente (incluyendo al signo)
2. Partes variables
3. Los exponentes de las variables

Ejercicio para el lector

Señale las partes en los siguientes términos:

- $k_{(x;\,y)} = -16\sqrt[5]{xy}\,x^3y^{-3}$
- $S_{(x;\,y;\,z)} = \dfrac{\pi c}{a+b}\sqrt{18xy^{-1}}$
- $T_{(x;\,y;\,z)} = \sqrt{x\sqrt{y\sqrt[3]{z}}}$

Clasificación de las expresiones algebraicas

Esta clasificación fue desarrollada por el famoso matemático Euler, quien se basó en los exponentes de las variables según su naturaleza.

Expresión algebraica racional (EAR)

Siendo los exponentes de las variables números enteros, pudiendo contener a su vez términos independientes.

Ejemplos

1. $S_{(x;\,y)}=2x^5+3(x-y)^{-3}$

2. $R_{(x)}=\sqrt{5}x^4-35\sqrt[3]{xy}+\underbrace{42y}_{\text{término independiente}}$

3. $A_{(x;\,y;\,z)}=a_0x^{17}+a_1xy+a_3xyz^{-196}$

Estas expresiones, a su vez, pueden ser:

a. EAR entera

Es una expresión racional donde para la variable o variables no está permitida la operación de división.

Ejemplos

1. $Q_{(x;\,y;\,z)}=ax^5-2x^4+3xy+z^3$

2. $R_{(x;\,y)}=\pi x+(\sqrt{2}-1)y+7$

3. $M_{(a;\,b;\,c)}=(\sqrt{x}-1)a^5-y^2ab+\dfrac{c}{\pi}$

b. EAR fraccionaria

Es una expresión algebraica racional donde se define una división que tenga en el divisor por lo menos una variable.

Ejemplos

1. $F_{(x;\,y)} = \dfrac{-16}{(x-y)^5} + xy;\ x \neq y$

2. $G_{(x;\,y;\,z)} = -32x + \dfrac{9}{xyz}$

3. $H_{(a;\,b;\,c)} = \dfrac{45x}{a+b} + \dfrac{c}{a-b}$

4. $S_{(x)} = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

Expresión algebraica irracional

Son aquellas expresiones algebraicas en donde se define por lo menos una radicación que involucre a las variables.

Ejemplos

1. $M_{(x;\,y)} = \sqrt[4]{x-y} + 22$

2. $S_{(x;\,y;\,z)} = \dfrac{45}{xy}\sqrt{z} - xy\sqrt[3]{z}$

3. $H_{(x)} = x^3 - \sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$

4. $R_{(x;\,t)} = \dfrac{2x-1}{\sqrt{t^2+1}} + \dfrac{1}{t}$

En resumen:

Expresión algebraica	Subdivisión	Exponentes de las variables	Ejemplo
Racional	entera	entero (+) o término independiente	$31x^5 - 17xz$
	fraccionaria	entero (–)	$39xy - 3 + z$
Irracional		fraccionario	$16\sqrt{x-y} + 4x^{-\frac{3}{2}}$

Nota

Existen otras expresiones que no son algebraicas, a las cuales se les llama trascendentes; las más importantes son:

Expresiones exponenciales

Son aquellas de exponentes no racionales.

Ejemplos

- $x^{\sqrt{5}}; x^x; 6^x$
- $10x + 2^x - 15$

Expresiones trigonométricas

Son aquellas que involucran a operadores trigonométricos.

Ejemplos

- $\text{sen}(x); \cos(t^2 - \pi); \tan(x + y)$
- $\text{sen}^2(x - y) + \cos\frac{x}{2}$
- $\cot(2x + y) + \tan 2x$

Expresiones logarítmicas

Definidas por logaritmos.

Ejemplos

- $\log_{\sqrt{\pi}}(x^2 - 1); \log\left(\frac{\sqrt{x - y}}{2}\right); \ln\left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}\right)$
- $427\log_x abc - \log_{abc} x$

Expresiones de infinitos términos

Ejemplos

- $P_{(x)} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots$
- $F_{(x)} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
- $H_{(x)} = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{x^3} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}} + \ldots$

Conjunto de valores admisibles (CVA)

Es el conjunto donde la expresión matemática se halla definida así:

a. $f_{(x)} = \frac{17}{x - 5}$ se define para todo valor de x excepto en 5.

b. $g_{(x)} = \sqrt{9 - x^2}$ en R; $9 - x^2 \geq 0 \leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0$

$\leftrightarrow (x+3)(x-3) \leq 0 \leftrightarrow x \in [-3; 3]$

$\rightarrow g_{(x)}$ está definido $\leftrightarrow x \in [-3; 3]$.

c. $h_{(x)} = x^5 + 2x - 16$ se define para todo valor que se asigne a x, que puede ser real o complejo.

POLINOMIOS

DEFINICIÓN

Se define así a toda expresión algebraica racional entera, que a su vez está definida sobre un campo numérico y en cualquier conjunto numérico para las variables.

Ejemplos

$P_{(x)} = 3x + 15$; $Q_{(x;y)} = \sqrt{5}x + y^5$; $M_{(x;y;z)} = -2x^3y^2z$

¿Son polinomios los siguientes?

I. $P_{(x)} = 17x^9 - 2x + 1$

II. $Q_{(x;y)} = 5x - xy^2 + 2$

III. $R_{(x)} = \frac{521}{2}x^{-1} + 5x - 1$

Respuestas

I. Sí, definido en todo CVA (R o C)

II. Sí, definido en todo CVA (R o C)

III. No, puesto que no está definido en $x = 0$.

Nota

La definición nos dice que en los polinomios los exponentes de las variables son números enteros positivos.

POLINOMIO EN UNA VARIABLE

Es aquella expresión algebraica de la siguiente forma general:

$$P_{(x)}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n;\ a_0\neq 0$$

Donde

$a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$: coeficientes

x : variable

n : grado del polinomio

a_0: coeficiente principal

a_n: término independiente

Ejemplos

1. $P_{(x)}=3x+17x^5-x^4$
2. $Q_{(x)}=5+2x-12x^2+x^3$
3. $M_{(x)}=-10x^4-2x^3+x-14$
4. $R_{(x)}=8+3x^3-2x^4+16x^5$

Definición

Si un polinomio de una variable tiene coeficiente principal igual a 1, este se llama polinomio mónico.

Ejemplos

1. $P_{(x)}=x^2-3x+2$
2. $Q_{(y)}=2x^2+x^4-1$
3. $R_{(t)}=x^2+5x-4$

Nótese que el polinomio $S_{(x)}=x^2-x^3+2x-3$ no es mónico, pues su coeficiente principal es: -1

VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN MATEMÁTICA

Es el resultado que se obtiene al reemplazar las variables por alguna constante.

Ejemplos

1. Sea $P_{(x)}=4x+7$.

   Halle el valor numérico de P en $x=3$.

   Resolución

   Reemplazamos x por 3.

   $$P_{(3)}=4(3)+7=19$$

2. Sea $F_{(x)}=\sqrt[3]{\dfrac{x+5}{x-2}}+2x$.

   Halle el valor numérico de F en $x=5$.

   Resolución

   Reemplazamos x por 5.

   $$F_{(5)}=\sqrt[3]{\frac{5+5}{5-2}}+2(5)=\sqrt[3]{\frac{10}{3}}+10$$

   El valor numérico no siempre está definido, dependerá del campo de estudio o de algunas definiciones matemáticas.

3. Sea $H_{(x)}=\dfrac{25}{x-7}+2x-1$.

   Halle el valor numérico de H en $x=7$.

   Resolución

   Reemplazamos x por 7.

   $H_{(7)}=\dfrac{25}{7-7}+2(7)-1$, pero $\dfrac{25}{0}$ no está definido.

   Por lo tanto, $H_{(7)}$ no existe o no está definido.

4. Sea $G_{(x)}=\sqrt{\dfrac{5+x}{7-x}}+2x$ en $\mathbb{R}$.

   Halle el valor numérico de G en $x=11$.

Resolución

Reemplazamos x por 11.

$$G_{(11)}=\sqrt{\frac{5+11}{7-11}}+2(11)=\sqrt{-4}+22$$

Pero $\sqrt{-4}$ en $\mathbb{R}$ no está definido.

Por lo tanto, $G_{(11)}$ no existe o no está definido. Sin embargo, $G_{(11)}$ está definido en el campo de los complejos, que más adelante estudiaremos.

5. Sea $P_{(x)}=2x^x+5x-7$.

Halle su valor numérico en $x=3$.

Resolución

Reemplazamos x por 3.

$$P_{(3)}=\underbrace{2\cdot 3^3}_{54}+5(3)-7=54+15-7=62$$

6. Si $g_{(x;y)}=3x+2y-xy$,

halle el valor numérico de g cuando $x=2$, $y=-1$.

Resolución

Reemplazando $x=2$, $y=-1$.

$$g_{(2;-1)}=3(2)+2(-1)-(2)(-1)$$
$$=6-2+2=6$$

$\therefore\ g_{(2;-1)}=6$

7. ¿Cuál es el mayor valor numérico de $G_{(x^2-2x)}=-3x+4$ en 24?

Resolución

Como sabemos, $x^2-2x=24$

$$x^2-2x-24=0 \rightarrow (x+4)(x-6)=0$$

de donde $x=-4 \vee x=6$.

Con $x=-4 \rightarrow G_{(24)}=-3(-4)+4=16$

Con $x=6 \rightarrow G_{(24)}=-3(6)+4=-14$

Por lo tanto, el mayor valor de $G_{(24)}$ es 16.

8. Si $x^{2x}=\frac{1}{3^{-6}}$, ¿cuál es el valor numérico de $S_{(x)}=x^x-3x+1$?

Resolución

De la ecuación $x^{2x}=\frac{1}{3^{-6}}=3^6=3^{2\cdot 3}$.

Por comparación $x=3$.

Luego

$$S_{(3)}=3^3-3\cdot 3+1=27-9+1=19$$

$\therefore\ S_{(3)}=19$

9. Si $f_{(x)}=e^x+\pi^x$ es una expresión tal que: $f_{(3)}=1$,

halle el valor numérico de $M=\sqrt[3]{\frac{f_{(1)}}{f_{(4)}-f_{(7)}}}$.

Resolución

Del dato

$$f_{(3)}=e^3+\pi^3=1$$

$\rightarrow\ e^3+\pi^3=1$

Se pide calcular

$$M=\sqrt[3]{\frac{e+\pi}{e^4+\pi^4-e^7-\pi^7}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{e+\pi}{e^4(1-e^3)+\pi^4(1-\pi^3)}}$$

pero $1-e^3=\pi^3$ y $1-\pi^3=e^3$.

Luego

$$\sqrt[3]{\frac{e+\pi}{e^4\pi^3+\pi^4e^3}}=\sqrt[3]{\frac{(e+\pi)}{e^3\pi^3(e+\pi)}}=\sqrt[3]{\frac{1}{e^3\pi^3}}=\frac{1}{e\pi}$$

10. Si $G_{(2x-1)}=4^x+8x-5$,

halle el valor numérico de G en 2.

Resolución

Sea $2x-1=2 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

Luego

$$G_{\left[2\left(\frac{3}{2}\right)-1\right]}=4^{\frac{3}{2}}+8\left(\frac{3}{2}\right)-5$$

$$\rightarrow G_{(3-1)}=\sqrt{4^3}+4\cdot 3-5=2^3+12-5$$

$$\therefore G_{(2)}=15$$

11. Si $h_{(x;\,y-1;\,z+3)}=4x-3y+yz$, halle el valor numérico en (1; 3; 5).

Resolución

Las variables tomarán los valores

$x=1;\ y-1=3$ y $z+3=5$

es decir $x=1;\ y=4$ y $z=2$.

Reemplazando $h_{(1;\,3;\,5)}=4(1)-3(4)+4(2)$

$$\therefore h_{(1;\,3;\,5)}=4-12+8=0$$

Teorema

Dado un polinomio $P_{(x)}$:

I. La suma de sus coeficientes se obtiene reemplazando la variable por 1.

ΣCoef. $P_{(x)}=P_{(1)}$

II. Su término independiente se obtiene reemplazando su variable por cero.

T. ind. $P_{(x)}=P_{(0)}$

Ejemplos

1. Sea $P_{(x)}=6x^5+4x-15$

I. $\sum$Coef. $P_{(1)}=6(1)+4(1)-15=-5$

II. T. ind. $P_{(0)}=6(0)+4(0)-15=-15$

2. Sea $g_{(x)}=(2x-1)^{60}-3x+1$

I. $\sum$Coef. $g_{(1)}=(2(1)-1)^{60}-3(1)+1=-1$

II. T. ind. $g_{(0)}=(2(0)-1)^{60}-3(0)+1=2$

3. Sea $h_{(5x-3)}=4x+5$

I. Para calcular la suma de coeficientes la variable $5x-3$ se iguala a 1; en efecto

$$5x-3=1 \rightarrow x=\frac{4}{5}.$$

Reemplazando

$$h_{(1)}=4\left(\frac{4}{5}\right)+5=\frac{16}{5}+5=\frac{41}{5}$$

$$\therefore \sum \text{Coef.}=\frac{41}{5}$$

II. Similarmente, para el término independiente la variable $5x-3$ se iguala a cero; en efecto,

$$5x-3=0 \rightarrow x=\frac{3}{5}$$

Reemplazando

$$h_{(0)}=4\left(\frac{3}{5}\right)+5=\frac{37}{5}.$$

Corolario

En un polinomio con más de una variable:

I. La suma de coeficientes se halla reemplazando cada una de las variables por el número 1.

II. El término independiente de las variables se halla reemplazando cada una de las variables por el número cero.

4. Sea $S_{(x;y)}=(2x-y)^5+(x+y)^4$

I. $\sum \text{Coef. } S_{(1;1)}=(2(1)-1)^5+(1+1)^4=1+2^4$

$\therefore \sum \text{Coef.}=17$

II. T. ind. $S_{(0;0)}=(2(0)-0)^5+(0+0)^4=0$

$\therefore$ T. ind. $=0$

Ejercicio para el lector

De $S_{(x-1;\,2y+3)}=4xy+(x-y)^2$, halle su término independiente y la suma de coeficientes.

CAMBIO DE VARIABLE

Propiamente debe llamarse composición de funciones dentro de un conjunto de valores admisibles. Consiste en reemplazar una o más variables por otras.

Ejemplos

1. Sea $f_{(x)}=4x+3$, halle $f_{(3x-5)}$.

Resolución

Reemplace x por $3x-5$.

$$f_{(3x-5)}=4(3x-5)+3=12x-20+3$$

$\therefore f_{(3x-5)}=12x-17$

2. Si $f_{(x)}=3x+1$ y $g_{(x)}=2x+3$, halle

I. $f_{(g_{(x)})}$ II. $g_{(f_{(x)})}$

Resolución

I. En $f_{(x)}$ se cambiará x por $g_{(x)}$.

Luego

$$f_{(g_{(x)})}=3g_{(x)}+1=3(2x+3)+1$$
$$=6x+9+1=6x+10$$

II. En $g_{(x)}$ se cambiará x por $f_{(x)}$.

Luego

$$g_{(f_{(x)})}=2f_{(x)}+3=2(3x+1)+3$$
$$=6x+2+3=6x+5$$

3. Si $P_{(x)}=x^2+1$, ¿cuál es la expresión que representa a $P_{(P_{(x)})}$?

Resolución

En $P_{(x)}$ se cambiará la variable x por $P_{(x)}$ y se tendrá

$$P_{(P_{(x)})}=P^2_{(x)}+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+1+1$$

$\therefore P_{(P_{(x)})}=x^4+2x^2+2$

4. Si $P_{(x-2)}=4x+1$, halle el equivalente de $P_{(x)}+P_{(-x)}$.

Resolución

I. Busquemos $P_{(y)}$, haciendo que $x-2=y$

$\rightarrow x=y+2$, luego reemplazando en $P_{(x-2)}=4x+1$:

$$P_{(y)}=4(y+2)+1 \rightarrow P_{(y)}=4y+9$$

Finalmente, y se cambia por x obteniéndose $P_{(x)}=4x+9$

II. $P_{(x)}=4x+9 \rightarrow P_{(-x)}=-4x+9$

$\therefore P_{(x)}+P_{(-x)}=\cancel{4x}+9-\cancel{4x}+9=18$

5. Si $P_{(2x-3)}=6x-3$, halle la expresión

I. $P_{(x)}$ II. $P_{(2x+3)}$

Resolución

I. Busquemos $P_{(y)}$ haciendo $2x-3=y$,

donde $x=\dfrac{y+3}{2}$.

Luego $P_{(y)}=\cancel{6}^{3}\left(\dfrac{y+3}{\cancel{2}_{1}}\right)-3=3y+9-3=3y+6$

$\rightarrow P_{(x)}=3x+6$

II. De I: $P_{(x)}=3x+6$ se tiene:

$$P_{(2x+3)}=3(2x+3)+6=6x+9+6$$

$$\rightarrow P_{(2x+3)}=6x+15$$

6. Sea $f_{(x-1)}=19x+1$. Halle $f_{(x)}$.

Resolución

Métodos

I. Cambio de variable

$$x-1=y \rightarrow x=y+1$$

Reemplazando

$$f_{(y)}=19(y+1)+1=19y+19+1$$

Luego

$$f_{(y)}=19y+20$$

Cambiando y por x se obtiene

$$f_{(x)}=19x+20$$

II. Formar la variable en el segundo miembro

$$f_{(x-1)}=19x+1=\underbrace{19x-19}+20$$

$$\rightarrow f_{(x-1)}=19(x-1)+20$$

$$\rightarrow f_{(y)}=19y+20$$

Cambiando y por x se obtiene

$$f_{(x)}=19x+20$$

7. Sea $f_{(x-5)}=4x+9$. Halle $f_{(2x+1)}$.

Resolución

$$f_{(x-5)}=4x+9=\underbrace{4x-20}+29$$

$$\rightarrow f_{(x-5)}=4(x-5)+29$$

Reemplazando $x-5$ por $2x+1$

$$f_{(2x+1)}=4(2x+1)+29=8x+33$$

$$\therefore f_{(2x+1)}=8x+33$$

8. Sea $h_{(x^2-x)}=x+5$, halle $h_{(x+1)}$.

Resolución

Será en dos pasos:

$$h_{(x^2-x)} \xrightarrow{1.^o} h_{(y)} \xrightarrow{2.^o} h_{(x+1)}$$

Haciendo $x^2-x=y \rightarrow x^2-x-y=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4y}}{2}$$

1.º $h_{(y)}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4y}}{2}+5=\dfrac{11\pm\sqrt{1+4y}}{2}$

$$\therefore h_{(y)}=\frac{11\pm\sqrt{1+4y}}{2}$$

2.º Reemplazar y por $x+1$.

$$h_{(x+1)}=\frac{11\pm\sqrt{1+4(x+1)}}{2}=\frac{11\pm\sqrt{4x+5}}{2}$$

$$\therefore h_{(x+1)}=\frac{11\pm\sqrt{4x+5}}{2}$$

9. Si $f_{(x^2-4x)}=3x+1$,

halle el mayor y el menor valor de $f_{(5)}$.

Resolución

Sea $x^2-4x=5 \rightarrow x^2-4x-5=0$

Es decir, $(x-5)(x+1)=0 \rightarrow x=5$ o $x=-1$.

I. Si $x=5 \rightarrow f_{(5)}=3(5)+1=16$

II. Si $x=-1 \rightarrow f_{(5)}=3(-1)+1=-2$

$\therefore$ $\underset{\text{mayor}}{f_{(5)}=16} \wedge \underset{\text{menor}}{f_{(5)}=-2}$

GRADO DE UN POLINOMIO

Se define como una característica exclusiva de los polinomios, relacionado con los exponentes de sus variables.

Los grados se clasifican en:

Grado relativo (GR)

Se representa con el valor del mayor exponente de la variable en referencia.

Ejemplo

$$P_{(x;y)} = 45x^4y^5 - \sqrt{2}xy^7 + \pi x^{10}y$$

Luego

$GR_x=10$ y $GR_y=7$

Grado absoluto (GA)

Se define como el grado de un polinomio:

I. Para un monomio, se obtiene sumando los grados relativos.

II. Para un polinomio, de más de un término se obtiene como el mayor grado absoluto de los monomios que lo conforman.

Definición. El grado del término independiente es cero.

Ejemplos

1. Sea $f_{(x;y;z)} = -63x^9y^5z$

   Luego $GR_x=9$, $GR_y=5$ y $GR_z=1$

   $\therefore$ $GA(f)=9+5+1=15$

2. Sea $h_{(x;y)} = 5y^5 + 4x^9y + \sqrt{2}x^7y^5$.

   Los grados absolutos de los monomios son 5, 10 y 12, respectivamente.

   Luego

   $GA(h)=12$.

3. Halle el grado relativo a x en el polinomio.

$$P_{(x;y)} = y^2x^{n-3} - 14x^{\frac{3}{n-5}}y^5 + \sqrt{2}xy^{7-n}$$

Resolución

Como $P_{(x;y)}$ es un polinomio, los exponentes de las variables deben ser enteros y positivos.

Pero $\left(\dfrac{3}{n-5}\right) \in \mathbb{N}$, si $n=6$ o $n=8$.

- Si $n=6 \rightarrow (7-n) \in \mathbb{N}$
- Si $n=8 \rightarrow (7-n) \notin \mathbb{N}$

$\therefore$ $n=6$ (único valor)

Luego

$$P_{(x;y)} = y^2x^3 - 14x^3y^5 + \sqrt{2}xy$$

De donde $GR_x=3$

4. Sea el polinomio

$$P_{(x;y)} = x^{a^{a^{a^n}}} + \sqrt{2}y^{\left(a^{a^a}\right)^{a^{n-a}}} + 16\sqrt{p},$$

donde $GR_x=GR_y=16$.

Halle el valor de a.

Resolución

Por dato

$$a^{a^{a^n}} = \left(a^{a^a}\right)^{a^{n-a}} = a^{a^{a+n-a}} \rightarrow a^{a^{a^n}} = a^{a^n}$$

$$\rightarrow a^n=n \rightarrow GR_x=n=16 \rightarrow a = \sqrt[16]{16} = \sqrt[4]{2}$$

Nota

1. El grado se define como el exponente de la variable de coeficiente no nulo.

   Ejemplo

   $P_{(x)}=3x5y \leftrightarrow GR_x=5 \leftrightarrow y \neq 0$

2. Si no se especifica el tipo de grado se sobreentenderá que se refiere al grado absoluto.

POLINOMIOS ESPECIALES

Son aquellos polinomios que obedecen a ciertas características y de acuerdo a ello son:

Polinomio ordenado

Se dice ordenado respecto a alguna de sus variables cuando sus exponentes solo aumentan o disminuyen (ordenado creciente o decreciente).

Ejemplos

1. $P_{(x;y)}=2x+x^3y+6x^6$, es creciente respecto a x.

2. $Q_{(x;y)}=\sqrt{2}x^7+\pi x^3y^4+5xy^{17}$ es creciente respecto a y, pero decreciente respecto a x.

3. $M_{(x)}=x^5-2x^4+8x^{15}$ no es ordenado.

Polinomio completo

Llamaremos polinomio completo de grado n respecto a alguna variable si existen todos los términos con exponentes de 1 a n, además de un término independiente.

Ejemplos

1. $P_{(x)}=2x^3-5+2x+7x^2$ es completo de grado 3.

2. $Q_{(x;y)}=4x-2y^2+5x^2y+x^3y^4-9x^4y^3$ es un polinomio completo respecto a la variable x; y respecto a la variable y es de grado relativo 4.

3. $R_{(x;y)}=x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4$ es un polinomio completo y ordenado en forma decreciente respecto a la varibale x; y es completo y ordenado en forma creciente respecto a la variable y.

Teorema 1

Dado un polinomio completo en una variable, el número de términos es igual a su grado aumentado en 1.

$$P_{(x)}=\sqrt{2}+x^5+2x-\sqrt{\pi}x^4+4x^3+(\sqrt{2}+1)x^2$$

Vemos que es de grado 5 y tiene 6 términos.

Teorema 2

Si un polinomio es completo y ordenado respecto a una variable, se tiene que los grados relativos a esa variable de dos términos consecutivos difieren en la unidad.

$$P_{(x)}=4x^{(3)}-5x^{(2)}+\sqrt{5}x^{(1)}+16$$

$$Q_{(x)}=12+3x^{(1)}-\pi x^{(2)}+17x^{3}-15x^{4}$$

Ejemplo

4. Halle el valor de a si el polinomio es completo y ordenado.

$$P_{(x)}=(a^2+3)+(a-1)x^{a^2-5a+7}+3x^{a^2-2}$$

Resolución

Como el primer término es independiente, $P_{(x)}$ será completo y ordenado ascendentemente, ello implica que

$$\begin{array}{lcl} a^2-5a+7=1 & \wedge & a^2-2=2 \\ a^2-5a+6=0 & \wedge & a^2=4 \\ \underbrace{(a-2)(a-3)=0 \quad \wedge \quad (a-2)(a+2)=0}_{a=2} & & \end{array}$$

Polinomio homogéneo

Un polinomio de dos o más términos y dos o más variables es homogéneo si cada término tiene el mismo grado absoluto.

Ejemplos

1. Dado el polinomio

$$P_{(x;y)}=\underbrace{45x^4y^3}_{GA=7}-\underbrace{22xy^6}_{GA=7}+\underbrace{2x^5y^2}_{GA=7}$$

Diremos que es homogéneo de grado 7 o de grado de homogeneidad 7.

2. Si el polinomio $K_{(x;y)}=ax^5y^b+bx^{a-1}y$, es homogéneo, halle $a-b$.

Resolución

I. Por ser polinomio

$$b\geq 1 \quad \text{y} \quad a-1\geq 1$$

II. Por ser homogéneo

$$5+b=a-1+1 \quad \rightarrow \quad a-b=5$$

Términos semejantes

Dos o más términos no nulos son semejantes si difieren únicamente en los coeficientes, es decir, las mismas variables tienen los mismos exponentes.

Ejemplos

1. $T_{1(x;y)}=42x^4y^7$

   $T_{2(x;y)}=\sqrt{3}x^4y^7$

   $T_{3(x;y)}=(\sqrt{2}+1)x^4y^7$

   Diremos que T_1, T_2, T_3 son semejantes.

2. Si $M_{(x;y)}=ax^{a-1}y^9$ y $N_{(x;y)}=bx^5y^{b+3}$ son semejantes, halle $a+b$.

   Resolución

   Se debe cumplir

   $$a-1=5 \quad \text{y} \quad b+3=9$$
   $$a=6 \quad \text{y} \quad b=6$$
   $$\therefore \quad a+b=12$$

Polinomios idénticos

Dos o más polinomios en las mismas variables son idénticos cuando tienen los mismos valores numéricos para cualquier valor que se asigne a sus variables. Se denota por $P_{(x;y)}\equiv Q_{(x;y)}$

Ejemplos

1. Verifique si los polinomios

   $P_{(x;y)}=(x+y)^2-4xy$; $Q_{(x;y)}=(x-y)^2$

   son idénticos.

   Resolución

   Reemplazando x por a e y por b tendremos

   $$P_{(a;b)}=(a+b)^2-4ab=a^2+b^2+2ab-4ab$$
   $$=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$$
   $$Q_{(a;b)}=(a-b)^2$$

   Luego P y Q son idénticos.

Teorema

Dos polinomios en una variable y del mismo grado de la forma:

$$P_{(x)}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$
$$Q_{(x)}=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$$

son idénticos o iguales si y solo si

$$a_0=b_0;\ a_1=b_1;\ \ldots;\ a_n=b_n$$

2. Si los polinomios

   $P_{(x)}=3x^2+(a-1)x+c$ y

   $Q_{(x)}=(b+1)x^2+7x-4$

   son iguales o idénticos, halle $(a+b+c)$.

   Resolución

   Como son idénticos tenemos:

   $$3=b+1,\ 7=a-1 \quad \text{y} \quad c=-4$$

   Es decir

   $$b=2,\ a=8 \quad \text{y} \quad c=-4$$
   $$\therefore \quad a+b+c=6$$

3. Sea $P_{(x)}$ un polinomio, de tal manera que

   $P_{(P(x))}=4x+5$.

   Halle la suma de coeficientes de $P_{(x)}$.

Resolución

Como $P_{(P(x))}$ es de primer grado, entonces $P_{(x)}$ es también de primer grado.

Sea $P_{(x)}=ax+b$.

Luego

$$P_{(P(x))}=aP_{(x)}+b=a(ax+b)+b$$

$$\rightarrow\ P_{(P(x))}=a^2x+ab+b=a^2x+b(a+1)$$

Por igualdad con $P_{(P(x))}=4x+5$, tenemos:

$$a^2=4\ \rightarrow\ a=2\ \text{ o }\ a=-2$$

Además

$$b(a+1)=5\ \rightarrow\ b=\frac{5}{3}\ \text{ o }\ b=-5$$

$$\therefore\ a+b=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}\ \text{ o }\ a+b=-2-5=-7$$

4. Si los polinomios

$P_{(x;\,y)}=(a-5)x^4+(a+b)x^{b+8}y+cy^{c-1}$ y

$Q_{(x;\,y)}=4x^4+3x^ny+cy^{2c-3}$

son idénticos, halle el valor de

$[(a-b)+(c-n)]+P_{(1;\,2)}$.

Resolución

Por ser idénticos

$$(a-5)x^4\equiv 4x^4\ \rightarrow\ a-5=4\ \rightarrow\ a=9$$

$$(a+b)x^{b+8}y\equiv 3x^ny\ \rightarrow\ a+b=3\ \wedge\ n=b+8$$

Reemplazando el valor de a

$$9+b=3\ \rightarrow\ b=-6\ \text{ y }\ n=b+8$$

$$\therefore\ b=-6\ \text{ y }\ n=2$$

Además

$$cy^{c-1}\equiv cy^{2c-3}$$

Entonces

$$c-1=2c-3$$

$$\therefore\ c=2$$

De donde

$$(a-b)+(c-n)=9-(-6)+(2-2)=15$$

Luego

$$P_{(x;\,y)}=4x^4+3x^2y+2y,$$

si $x=1$ e $y=2$.

Evaluando

$$P_{(1;\,2)}=4(1)+3(1)(2)+2(2)$$

Luego

$$P_{(1;\,2)}=14$$

$$\therefore\ \underbrace{(a-b)+(c-n)}_{15}+\underbrace{P_{(1;\,2)}}_{14}=29$$

Polinomio idénticamente nulo

Un polinomio es idénticamente nulo si sus valores numéricos para cualquier valor o valores asignados a las variables resultan ser siempre cero.

Se denota por $P_{(x;\,y)}\equiv 0$ y se lee: "$P(x;\,y)$ es idénticamente nulo"

Ejemplo

1. Pruebe que $P_{(x)}=(x+2)^2-(x-2)^2-8x$ es idénticamente nulo.

Resolución

Vemos que si x toma el valor de a, tenemos

$$P_{(a)}=\underbrace{(a+2)^2-(a-2)^2-8a}_{8a}$$

$$P_{(a)}=8a-8a\ \rightarrow\ P_{(a)}=0;\ \forall a\in\mathbb{R}$$

$$\therefore\ P_{(x)}=0$$

Teorema

Un polinomio de la forma

$$P_{(x)}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$$

es idénticamente nulo si todos sus coeficientes son cero; es decir:

$$a_0=a_1=...=a_n=0$$

2. Si $P_{(x)}=k(x-1)^2+r(x-2)^2+c+x$ es idénticamente nulo, halle $\dfrac{k+c}{r}$.

Resolución

Desarrollando y ordenando

$$P_{(x)}=k\left(x^2-2x+1\right)+r\left(x^2-4x+4\right)+c+x$$
$$=(k+r)x^2-(2k+4r-1)x+k+4r+c$$

Como $P_{(x)}$ es idénticamente nulo, entonces:

$$k+r=0 \rightarrow k=-r \qquad \text{(I)}$$
$$2k+4r-1=0 \rightarrow -2r+4r=1 \qquad \text{(II)}$$
$$k+4r+c=0 \rightarrow -r+4r+c=0 \qquad \text{(III)}$$

De las ecuaciones (I) y (II)

$$2r=1 \rightarrow r=\frac{1}{2};\ k=-=\frac{1}{2}$$

Reemplazando en (III) y despejando

$$c=-3r \rightarrow c=-3\left(\frac{1}{2}\right)$$

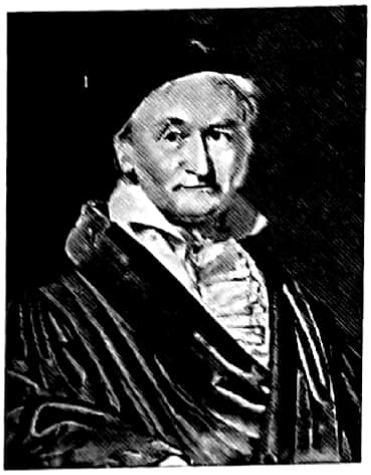
Luego: $c=-\dfrac{3}{2}$

Por lo tanto

$$\frac{k+c}{r}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{4}{2}}{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{k+c}{r}=-4$$

BIOGRAFÍA

Carl Friedrich Gauss



Nació en Brunswick el 30 de abril de 1777 y murió en Göttingen el 23 de febrero de 1855. Fue matemático, físico, astrónomo e inventor alemán, llamado póstumamente el Príncipe de los Matemáticos por el rey Jorge V de Hannover, al acuñar una moneda en su honor. Sus contribuciones en todos los campos de las matemáticas (puras y aplicadas) y en física fueron notables y vastas, entre las que se destacan sus aportes al análisis matemático, a la teoría de los números, a la geometría diferencial, al magnetismo, a la geodesia y a la óptica.

Nacido en una familia de escasos recursos económicos, destacó desde muy temprano por su habilidad e inteligencia para los números y las lenguas. Aprendió a contar y a escribir sin ayuda a los tres años, y a los siete, después de arduos esfuerzos de convencimiento hacia su padre, este accede a que sea inscrito en la escuela primaria bajo la dirección del profesor Büttner. Dos años después, este mismo profesor quedará sorprendido al notar que Gauss resuelve en cuestión de minutos un problema que implicaba una progresión aritmética. A partir del siguiente año, y debido a la ayuda del joven estudiante Martin Bartels, se incrementaron sus progresos en matemáticas al familiarizarse con el binomio de Newton para exponentes no enteros y con las series infinitas. Prosigue sus estudios en el Gymnasium Catharineum, donde a los trece años accede al grado superior de la educación secundaria. Es en esta etapa que comienza a ganar reputación entre los círculos cultos de su ciudad. Su fama llega a oídos del duque Karl Wilhelm Ferdinand, quien luego de una audiencia con el adolescente Gauss se convierte en su protector y le costea los estudios. En 1792 ingresa al Collegium Carolinum de Brunswick, donde estudió por tres años matemáticas superiores, lenguas clásicas, filosofía y literatura. De esta época datan sus primeras investigaciones sobre los números.

En 1795, becado por el duque Ferdinand, ingresa a la Universidad Georgia Augusta de Göttingen, donde a los dieciocho años descubre la forma de dibujar un polígono de diecisiete lados con regla y compás. Este descubrimiento lo llevará a publicar años más tarde su primera obra *Disquisitiones Arithmeticae* (Disquisiciones aritméticas), en la que también consigna la descomposición de todo número entero en tres triangulares. Su tesis doctoral, de 1799, fue la primera demostración del teorema fundamental del álgebra, tema que fue también preocupación de Euler, y que había sido casi completamente desarrollado años antes por Jean Le Rond d'Alembert.

En 1801 publica su obra prima, donde, además, reserva un parte para la exposición de su tesis. Ese mismo año predice la órbita del asteroide Ceres, recientemente descubierto, empleando el método de los mínimos cuadrados.

Seis años después es nombrado profesor en la Universidad de Göttingen y director del observatorio astronómico de la misma ciudad. Para este tiempo prepara su segunda obra que trata cuestiones de astronomía teórica *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (Teoría del movimiento de los cuerpos celestes que giran alrededor del Sol siguiendo secciones cónicas), publicada dos años después en dos volúmenes: el primero examina las secciones cónicas, las ecuaciones diferenciales y las órbitas elípticas; el segundo estudia el método de los mínimos cuadrados para determinar la órbita de un planeta.

Entre 1810 y 1830 se dedica a su puesto de director del observatorio, a la par que continúa desarrollando ideas acerca de una geometría no euclidiana (una geometría lógicamente coherente que no contemple el postulado de Euclides de las paralelas). Debe destacarse también que en esta época comienza un largo trabajo asociado a la geodesia que dejará más de setenta estudios sobre esta materia, aparte de herramientas para el tratamiento de datos recogidos como la aplicación del método de los mínimos cuadrados a medidas terrestres, el invento del heliotropo y el descubrimiento de la curva de distribución de errores.

En el campo de la matemática pura, desarrolló ideas sobre las características de las superficies curvas, contribución a la moderna geometría diferencial. Sobre este tema, en 1828 aparece su *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (Disquisiciones generales acerca de las superficies curvas) donde aborda tres grandes problemas: la medida de la curvatura, la representación conforme y la aplicabilidad de superficies.

En la década siguiente, junto con el físico Wilhelm Weber, desarrolla investigaciones sobre el magnetismo terrestre, donde incide en la medida absoluta de la fuerza magnética y en la demostración de la existencia de solo dos polos magnéticos, señalando también la ubicación específica del polo sur magnético. Juntos construyeron el primer telégrafo electromagnético, que servía de medio de comunicación entre el observatorio astronómico y la facultad de física. Entre sus últimos aportes relevantes se encuentra uno en el campo de la óptica, donde demuestra que un sistema de lentes se puede reducir a un solo lente con características adecuadas.

En sus últimos años goza de amplio reconocimiento en toda Alemania y aun alcanza a presentar su cuarta demostración del teorema fundamental del álgebra, en la que emplea los coeficientes complejos. Fue un científico ejemplo por su humildad y a la vez por su grandeza intelectual, merecidamente también fue llamado el Matemático más Grande desde la Antigüedad.

Fuente:

http://es.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss
http://platea.pntic.mec.es/aperez4/html/sigloxix/Carl%20Friedrich%20Gauss.htm
http://www.biografiasyvidas.com/biografia/g/gauss.htm

Problemas RESUELTOS

Problema 1

Si $P_{(2x-1)}=x^2+3x-1$,

¿cuál es el valor numérico de P en 5?

Resolución

Buscamos $P_{(5)}$, es decir, $2x-1=5$,

de donde $x=3$.

Luego, para $x=3$ se tiene

$$P_{(2\cdot 3-1)}=3^2+3\cdot 3-1 \rightarrow P_{(5)}=9+9-1=17$$

$\therefore\ P_{(5)}=17$

Problema 2

¿Cuántas de las siguientes expresiones son polinomios?

I. $P_{(x)}=5x^{\tan 45^\circ}+7x^3-1$

II. $S_{(x)}=7(x^{-1})^{-4}+9$

III. $T_{(x)}=\sqrt{x^2}-5x+6$

IV. $Q_{(x)}=66(\sqrt{-x})^0+14x^{14}-2$

Resolución

Analizando cada proposición:

I. $P_{(x)}=5x^{\tan 45^\circ}+7x^3-1$, $\tan 45^\circ=1$

$\rightarrow P_{(x)}=5x+7x^3-1,\ \forall\ x\in \mathbb{R}$

Luego, $P_{(x)}$ es polinomio.

II. $S_{(x)}=7(x^{-1})^{-4}+9$

Como se puede observar, $S_{(0)}=7(0^{-1})^{-4}+9$

Pero sabemos que 0^{-1} no está definido

$\rightarrow S_{(x)}$ no es polinomio.

III. $T_{(x)}=\sqrt{x^2}-5x+6=|x|-5x+6$

Luego, $T_{(x)}$ no es polinomio.

IV. $Q_{(x)}=66(\sqrt{-x})^0+14x^{14}-2$

$(\sqrt{-x})^0$ no está definida cuando $x=0$

$\rightarrow Q_{(x)}$ no es polinomio.

Por lo tanto, solo $P_{(x)}$ es polinomio.

Problema 3

Si $P_{(x)}=(a^2-9)x^3+(5-b)x+7$ es un polinomio lineal mónico, ¿cuál es el menor valor de $a+b$?

Resolución

I. Si $P_{(x)}$ es lineal: $a^2-9=0$,
de donde $a=3 \vee a=-3$.

II. Si $P_{(x)}$ es lineal mónico: $5-b=1$,
de donde $b=4$.
Luego $a+b=3+4=7$ o $a+b=-3+4=1$.
Por lo tanto, el menor valor de $a+b$ es 1.

Problema 4

Si $f_{(x+1)}=x^3-1$,

calcule el valor de $\dfrac{f_{(1)}-f_{(0)}}{f_{(-2)}}$.

Resolución

I. $f_{(1)}$: Para $x=0 \rightarrow f_{(1)}=0^3-1=-1$

II. $f_{(0)}$: Para $x=-1 \rightarrow f_{(0)}=(-1)^3-1=-2$

III. $f_{(-2)}$: Para $x=-3 \rightarrow f_{(-2)}=(-3)^3-1=-28$

Luego $\dfrac{f_{(1)}-f_{(0)}}{f_{(-2)}}=\dfrac{-1-(-2)}{-28}=\dfrac{-1+2}{-28}=-\dfrac{1}{28}$

Problema 5

Dado que $P_{(x)}=x^n+x^{n-1}+5x-3$,

calcule $P_{(-1)}$.

Resolución

Para $x=-1 \rightarrow P_{(-1)}=(-1)^n+(-1)^{n-1}+5(-1)-3$

$\rightarrow P_{(-1)}=(-1)^n+(-1)^{n-1}-8$

I. Si n es par $\rightarrow (-1)^n=1 \wedge (-1)^{n-1}=-1$

$\rightarrow P_{(-1)}=\cancel{1}+-\cancel{1}-8=-8$

II. Si n es impar $\rightarrow (-1)^n=-1 \wedge (-1)^{n-1}=1$

$\rightarrow P_{(-1)}=-\cancel{1}+\cancel{1}-8=-8$

$\therefore P_{(-1)}=-8; \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$

Problema 6

Si $P_{(x)}=\dfrac{1}{x(x-1)}$,

¿cuál es el valor numérico de

$P_{(2)}+P_{(3)}+\ldots+P_{(15)}$?

Resolución

Se debe tener en cuenta que $\dfrac{1}{x(x-1)}$ es equivalente a $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}$, luego $P_{(x)}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}$.

Luego se tiene

$$P_{(2)}=\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$$

$$P_{(3)}=\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$P_{(4)}=\frac{1}{4-1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$P_{(15)}=\frac{1}{15-1}-\frac{1}{15}=\frac{1}{14}-\frac{1}{15}$$

Sumando miembro a miembro

$$P_{(2)}+P_{(3)}+\ldots+P_{(15)}$$

$$=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{14}}-\frac{1}{15}$$

$$=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$$

$$\therefore P_{(2)}+P_{(3)}+\ldots+P_{(15)}=\frac{14}{15}$$

Problema 7

Se tiene que $f_{(x)}=(4a)^{x-1}$; $a>0$,

además $f_{(m-1)}=64f_{(m)}$.

¿Cuál es el valor de $128a$?

Resolución

I. $f_{(m-1)}=(4a)^{m-1-1}=(4a)^{m-2}$

II. $f_{(m)}=(4a)^{m-1}$

Por dato: $f_{(m-1)}=64f_{(m)}$

$\rightarrow (4a)^{m-2}=64\cdot(4a)^{m-1}$

$\rightarrow \dfrac{(4a)^{m-2}}{(4a)^{m-1}}=64$

$\rightarrow (4a)^{-1}=64 \rightarrow \dfrac{1}{4a}=64$

$\rightarrow a=\dfrac{1}{4\cdot 64}$

$\therefore 128a=128\cdot\dfrac{1}{4\cdot 64}=\dfrac{1}{2}$

Problema 8

Dada la expresión $P_{(x)}=\dfrac{2x+1}{3x-1}$,

¿cuál es el valor de $P_{\left(P_{\left(P_{(0)}\right)}\right)}$?

Resolución

En $P_{(x)} = \dfrac{2x+1}{3x-1}$

I. $P_{(0)} = \dfrac{2\cdot 0+1}{3\cdot 0-1} = -1$

II. $P_{(P_{(0)})} = P_{(-1)} = \dfrac{2(-1)+1}{3(-1)-1} = \dfrac{-1}{-4} = \dfrac{1}{4}$

III. $P_{(P_{(P_{(0)})})} = P_{(P_{(-1)})} = P_{\left(\frac{1}{4}\right)} = \dfrac{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}+1}{3\cdot\frac{1}{4}-1}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}+1}{\frac{3}{4}-1} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{4}} = \dfrac{3\cdot 4}{-2}$

$\therefore\ P_{(P_{(P_{(0)})})} = -6$

Problema 9

Dada la expresión $f_{(f_{(x)})} = \dfrac{ax+b}{mx+n}$,

tal que $f_{(x)} = \dfrac{5x+3}{2x-1}$,

¿cuál es el valor de $\dfrac{a-b}{m-n}$?

Resolución

I. Para hallar $\dfrac{a-b}{m-n}$ bastaría reemplazar

$x=-1$ en $f_{(f_{(x)})} = \dfrac{ax+b}{mx+n}$, de donde

$f_{(f_{(-1)})} = \dfrac{-a+b}{-m+n} = \dfrac{a-b}{m-n}$ (α)

II. Buscamos $f_{(f_{(-1)})}$

en $f_{(x)} = \dfrac{5x+3}{2x-1}$

$x=-1 \rightarrow f_{(-1)} = \dfrac{5(-1)+3}{2(-1)-1} = \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$

$f_{(f_{(-1)})} = f_{\left(\frac{2}{3}\right)} = \dfrac{5\cdot\frac{2}{3}+3}{2\cdot\frac{2}{3}-1} = \dfrac{\frac{19}{3}}{\frac{1}{3}} = 19$

Luego en (α)

$\dfrac{a-b}{m-n} = 19$

Problema 10

¿Cuál es aquel polinomio f que cumple la siguiente igualdad?

$2f_{(x+y)} = f_{(x)} + 2f_{(y)} + 3x$

Resolución

Estos problemas son clásicos de las ecuaciones funcionales, generalmente de olimpiadas.

I. Como buscamos $f_{(x)}$,

tomamos $y=0 \rightarrow 2f_{(x)} = f_{(x)} + 2f_{(0)} + 3x$

$\rightarrow f_{(x)} = 3x + 2f_{(0)}$ (α)

II. Para hallar $f_{(0)}$

$x \equiv y = 0$ en la expresión original

$2f_{(0+0)} = f_{(0)} + 2f_{(0)} + 3\cdot 0$

$\rightarrow 2f_{(0)} = 3f_{(0)} + 0 \rightarrow f_{(0)} = 0$

Luego en (α), el polinomio buscado es

$f_{(x)} = 3x + 2\cdot 0$

$\therefore\ f_{(x)} = 3x$

Problema 11

Si $\phi_{(2x+1)}=6x-10$, además $\phi(f_{(x)}-3)=3x-4$,

¿cuál es el valor numérico de f en $-\frac{1}{6}$?

Resolución

I. Busquemos $\phi_{(x)}$

$$\phi_{(2x+1)}=6x-10=3(2x+1)-3-10$$

$$\phi_{(2x+1)}=3(2x+1)-13$$

Luego

$$\phi_{(x)}=3x-13$$

II. En el dato

$$\underbrace{\phi(f_{(x)}-3)}=3x-4$$

$$3(f_{(x)}-3)-13=3x-4$$

$$\rightarrow\ 3(f_{(x)}-3)=3x+9\ \rightarrow\ f_{(x)}-3=x+3$$

De donde $f_{(x)}=x+6$

$$\therefore\ f_{\left(-\frac{1}{6}\right)}=-\frac{1}{6}+6=\frac{35}{6}$$

Problema 12

Si $P_{(x)}=x^2-x+1$, ¿cuál es su valor numérico cuando x asume el valor de $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$?

Resolución

Conociendo x buscamos el valor de x^2-x+1.
Veamos

$$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ \rightarrow\ 2x=1-\sqrt{5}\ \rightarrow\ 2x-1=-\sqrt{5}$$

Elevando al cuadrado

$$4x^2-4x+1=5\ \rightarrow\ 4x^2-4x=4$$

Luego

$$x^2-x=1$$

$$\rightarrow\ x^2-x+1=1+1=2$$

$$\therefore\ P\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=2$$

Problema 13

Se sabe que $f_{(g_{(x+1)})}=x+5$ y $g_{(x-1)}=2x+4$.

Encuentre $f_{(x)}$.

Resolución

De $g_{(x-1)}=2x+4=2(x-1)+6$

Cambiando $x-1$ por $x+1$ se tiene:

$$g_{(x+1)}=2(x+1)+6\ \rightarrow\ g_{(x+1)}=2x+8$$

Luego en $f_{(g_{(x+1)})}=x+5$

$$f_{(2x+8)}=x+5=\frac{2x+10}{2}=\frac{(2x+8)+2}{2}$$

Cambiando $2x+8$ por x

$$f_{(x)}=\frac{x+2}{2}$$

$$\therefore\ f_{(x)}=\frac{x}{2}+1$$

Problema 14

Se sabe que $f_{(x-1)}=3x-4$. Calcule $f_{(x+1)}$ en términos de $f_{(x)}$.

Resolución

De $f_{(x-1)}=3x-4=3(x-1)-1$.

Cambiando $x-1$ por x

$$f_{(x)}=3x-1\ \rightarrow\ x=\frac{f_{(x)}+1}{3}\qquad\text{(I)}$$

asimismo $f_{(x+1)}=3(x+1)-1$

$\rightarrow f_{(x+1)}=3x+2$ (II)

De acuerdo a lo pedido, (I) en (II).

$$f_{(x+1)}=\cancel{3}\left[\frac{f_{(x)}+1}{\cancel{3}}\right]+2$$

$\therefore\ f_{(x+1)}=f_{(x)}+3$

Problema 15

Sea $P_{\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)}=x^4-2x^3+3x^2-x+1$.

¿Cuál es el valor numérico de P en 3?

Resolución

De acuerdo a lo pedido:

$$\frac{x-2}{2x+1}=3 \rightarrow x-2=3(2x+1)$$

$\rightarrow x-2=6x+3 \rightarrow 5x=-5 \rightarrow x=-1$

Luego, reemplazando $x=-1$ en P

$$P_{\left(\frac{-1-2}{-2+1}\right)}=(-1)^4-2(-1)^3+3(-1)^2-(-1)+1$$

$$P_{(3)}=1+2+3+1+1$$

$\therefore\ P_{(3)}=8$

Problema 16

Se define $f_{(x)}$ como el producto de las cifras de $x+8$ y $g_{(x)}$ como la suma de cifras de x^2.

¿Cuál es el valor de $f_{(g(4))}-g_{(f(5))}$?

Resolución

De acuerdo a la definición:

I. $f_{(x)}$=producto de cifras de $x+8$

$\rightarrow f_{(5)}$=producto de cifras de $(5+8=13)$

$\rightarrow f_{(5)}=1\cdot 3=3$

II. $g_{(x)}$=suma de cifras de x^2

$\rightarrow g_{(4)}$=suma de cifras de $(4^2=16)$

$\rightarrow g_{(4)}=1+6=7$

Utilizando estas definiciones:

- $f_{(g(4))}=f_{(7)}$=producto de cifras de $(7+8=15)$

  $\rightarrow f_{(g(4))}=1\cdot 5=5$

- $g_{(f(5))}=g_{(3)}$=suma de cifras de $(3^2=9)$

  $\rightarrow g_{(f(5))}=9$

Por lo tanto, lo pedido:

$$f_{(g(4))}-g_{(f(5))}$$

$$=5-9=-4$$

Problema 17

Calcule la suma de valores de n para los cuales la expresión

$$P_{(x;\,y)}=4x^{\frac{10-2^n}{2}}-3y^{\frac{128}{2^n}}$$

es un polinomio.

Resolución

Por ser polinomio

$$\frac{10-2^n}{2}\in\mathbb{N} \text{ y } \frac{128}{2^n}\in\mathbb{N}$$

Solo se cumple si $n=1;\ 2;\ 3$.

Por lo tanto, la suma de los valores de n es 6.

Problema 18

Halle el mayor valor natural de n, de modo que la expresión

$$P_{(x)}=\frac{\sqrt[3]{x^{n-20}}\cdot\sqrt[6]{x}}{\sqrt[4]{x^{n-8}}\cdot\sqrt[12]{x^{2-n}}}$$

sea equivalente a una expresión racional fraccionaria.

Resolución

Nos interesa el exponente de x

$$\frac{1}{3}(n-20)+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}(n-8)-\frac{1}{12}(2-n)=E$$

$$\frac{4(n-20)+2-3(n-8)-(2-n)}{12}=E$$

Simplificamos y obtenemos $E=\dfrac{2n-56}{12}$.

Como $P_{(x)}$ es racional fraccionario, entonces

$$\left(\frac{2n-56}{12}\right)\in\mathbb{Z}^- \rightarrow \frac{n-28}{6}\in\mathbb{Z}^-$$

$$28-n=\overset{\circ}{6} \rightarrow n=\overset{\circ}{6}-2 \wedge n<28$$

Luego n toma los valores 4; 10; 16; 22.

Por lo tanto, el máximo valor de n es 22.

Problema 19

El término independiente y el coeficiente principal del polinomio

$$P_{(x)}=(x^2+5-3x)(x+n+6x^n)\cdot(x^2+2x^4+n+1)(-1-5x^n+10x^{n-1})$$

son iguales. Halle el grado de $P_{(x)}$.

Resolución

Si $P_{(x)}$ es polinomio; $(n-1)\in\mathbb{N}$, se tiene:

I. Su término independiente $P_{(0)}$

$$P_{(0)}=5\cdot n\cdot(n+1)(-1)=-5n(n+1)$$

II. Coeficiente principal: $1\cdot 6\cdot 2\cdot(-5)=-60$

De (I) y (II) (por dato)

$$-5n(n+1)=-60 \rightarrow n(n+1)=12 \rightarrow n=3$$

Luego, el grado de $P_{(x)}$ es

$$2+n+4+n\equiv 2n+6$$

Como $n=3$

$\therefore$ Grado de $P_{(x)}=2(3)+6=12$

Problema 20

De $F_{(x^2-4x)}=x-2$, halle $F_{(x)}$.

Resolución

Sea $x^2-4x=y \rightarrow x^2-4x+4=y+4$

$\rightarrow (x-2)^2=y+4 \rightarrow x=2\pm\sqrt{y+4}$

$\rightarrow F_{(y)}=2\pm\sqrt{y+4}-2=\pm\sqrt{y+4}$

Reemplazando y por x

$$F_{(x)}=\pm\sqrt{x+4}$$

Problema 21

Si $P_{(P(P(x)))}=8x+7$, halle $P_{(x)}$.

Resolución

Como $P_{(P(P(x)))}$ es lineal, entonces

$P_{(x)}$ es lineal; sea $P_{(x)}=ax+b$

$\rightarrow P_{(P(x))}=aP_{(x)}+b=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

$$P_{(P(P(x)))}=a(P_{(P(x))})+b$$
$$=a(a^2x+ab+b)+b$$
$$=a^3x+\underbrace{a^2b+ab+b}_{b(a^2+a+1)}$$

De donde $a^3=8$ y $b(a^2+a+1)=7$

Entonces $a=2$ y $b=1$

$\therefore P_{(x)}=2x+1$

Problema 22

Siendo $F_{(x^n+1)}=x-1$ y $F_{(3)}=-\dfrac{7}{8}$,

halle n.

Resolución

Sea $x^n+1=y \rightarrow x=\sqrt[n]{y-1}$

$$\rightarrow F_{(y)}=\sqrt[n]{y-1}-1$$

De donde

$$F_{(3)}=\sqrt[n]{3-1}-1=-\frac{7}{8} \quad \text{(por dato)}$$

$$\rightarrow \sqrt[n]{2}=\frac{1}{8} \rightarrow 2^{\frac{1}{n}}=2^{-3} \rightarrow \frac{1}{n}=-3$$

$$\therefore \ n=-\frac{1}{3}.$$

Problema 23

Si $P_{\left(\frac{1}{F(x)}\right)}=a^2x+3a+1 \ \wedge \ F_{(x)}=ax+1$

halle $P_{\left(-\frac{1}{2}\right)}$.

Resolución

Se quiere que $\frac{1}{F_{(x)}}=-\frac{1}{2}$, es decir

$$\frac{1}{ax+1}=-\frac{1}{2} \rightarrow ax+1=-2 \rightarrow ax=-3$$

Luego $P_{\left(-\frac{1}{2}\right)}=a(ax)+3a+1=a(-3)+3a+1$

$$P_{\left(-\frac{1}{2}\right)}=-3a+3a+1$$

$$\therefore \ P_{\left(-\frac{1}{2}\right)}=1$$

Problema 24

Si $f_{(x)}$ es un polinomio definido por $f_{(2x-1)}=f_{(2x)}+f_{(1)}$, además $f_{(0)}=2$, calcule $f_{(3)}$.

Resolución

Si $x=1$

$$\rightarrow f_{(1)}=f_{(2)}+f_{(1)} \rightarrow f_{(2)}=0$$

Si $x=\frac{3}{2}$

$$\rightarrow f_{\left(2\left(\frac{3}{2}\right)-1\right)}=f_{\left(2\left(\frac{3}{2}\right)\right)}+f_{(1)}$$

$$\rightarrow f_{(2)}=f_{(3)}+f_{(1)}$$

$$f_{(3)}=-f_{(1)}$$

Si $x=\frac{1}{2}$

$$\rightarrow f_{(0)}=f_{(1)}+f_{(1)}$$

$$\rightarrow 2=2f_{(1)} \rightarrow f_{(1)}=1$$

$$\therefore \ f_{(3)}=-1$$

Problema 25

En el polinomio $P_{(x+1)}=(3x+2)^{2n}(5x+7)^2(4x+7)$, el triple de la suma de coeficientes es 343 veces el término independiente.

Calcule el valor de n.

Resolución

I. $\sum \text{Coeficientes}=P_{(1)}$

Si $x=0$

$$\rightarrow P_{(1)}=2^{2n}\cdot 7^2\cdot 7=2^{2n}\cdot 343$$

II. Término independiente$=P_{(0)}$

Si $x=-1$

$$\rightarrow P_{(0)}=(-1)^{2n}\cdot(-5+7)^2\cdot(-4+7)=2^2\cdot 3$$

Por dato: $3\left(2^{2n}\cdot 343\right)=343\cdot 2^2\cdot 3$

$$\therefore \ n=1$$

Problema 26

¿Cuánto hay que agregar al polinomio

$P_{(x;y)}=3x^4+5xy^3-2x^2y^2$

para que sea un polinomio homogéneo y completo con respecto a x, y para que la suma de coeficientes sea 21?

Además, $P_{1(2;1)}=114/P_{1(x;y)}$ es el polinomio resultante.

Resolución

El polinomio a sumar es ax^3y+by^4.

Luego $P_{1(x;y)}=3x^4+ax^3y-2x^2y^2+5xy^3+by^4$.

I. P_1 es homogéneo:

$$3+a-2+5+b=21$$

$$\rightarrow a+b=15 \qquad \text{(I)}$$

II. $P_{1(2;1)}=3\cdot 2^4+a\cdot 2^3(1)-2(2^2)1^2+5(2)\cdot 1^3+b\cdot 1^4=114$

$$\rightarrow 8a+b=64 \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) $a=7$; $b=8$

Por lo tanto, se agregará $7x^3y+8y^4$.

Problema 27

Si $g_{(x)}=\dfrac{x(1+x^2)}{x-1}-x^2-x-1$,

resuelva

$$\underbrace{g_{\left(g\ldots g_{(g_{(x)})}\ldots\right)}}_{(2n+1)}=\frac{ax+b+1}{ax-b+1};\quad n\in\mathbb{N}.$$

Resolución

Efectuando

$$g_{(x)}=\frac{x(1+x^2)}{x-1}-(x^2+x+1)$$

$$g_{(x)}=\frac{x+x^3-x^3+1}{x-1}\quad\rightarrow\quad g_{(x)}=\frac{x+1}{x-1}$$

Luego

$$g_{(g_{(x)})}=\frac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-1}=\frac{\dfrac{x+1+x-1}{x-1}}{\dfrac{x+1-x+1}{x-1}}=\frac{2x}{2}=x$$

Y como $(2n+1)$ es impar

$$g_{\left(g\ldots(g_{(x)})\right)}=g_{(x)}=\frac{x+1}{x-1}$$

$$\rightarrow\quad \frac{x+1}{x-1}=\frac{ax+b+1}{ax-b+1}$$

Aplicando proporciones

$$\frac{2x}{2}=\frac{2ax+2}{2b}\rightarrow bx=ax+1\rightarrow (b-a)\cdot x=1$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{b-a}$$

Problema 28

Dado el polinomio homogéneo

$P_{(x;y)}=m^2x^{m^{m-n}}+nx^2y^6+mx^6y^{m^{m+n}}$,

calcule la suma de sus coeficientes.

Resolución

Si es homogéneo

$$m^{m-n}=2+6=6+m^{m+n}$$

De (1)

$$m^{m-n}=8 \qquad \text{(I)}$$

De (2)

$$m^{m+n}=2 \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$m^{2m}=4^2\quad\rightarrow\quad m=2$$

En (II)

$$2^{2+n}=2^1\quad\rightarrow\quad n=-1$$

$$\therefore\quad \sum\text{Coef.}=m^2+n+m=2^2-1+2=5$$

Problema 29

Calcule el valor de n para que el equivalente de

$$M_{(x)} = x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^n \cdot \sqrt{x^n}}{x \cdot \sqrt[4]{x^{n-2}}}};\ x \neq 0$$

sea de quinto grado.

Resolución

Buscando el exponente de x en $M_{(x)}$.

$$1+\frac{1}{3}\left\{n-1+\frac{n}{2}-\frac{n-2}{4}\right\}=5 \qquad \text{(Dato)}$$

Efectuando

$$n-1+\frac{n}{2}-\frac{n-2}{4}=12$$

Por 4

$$4n-4+2n-n+2=48 \ \rightarrow\ 5n=50$$

$\therefore\ n=10$

Problema 30

Si al polinomio

$P_{(x,y)}=nx^m y^p+mx^{m-1}y^{p-3}+x^{n-8}$

le restamos $12x^3y^4$, su grado absoluto disminuye. Halle $m+n+p$.

Resolución

Si el grado disminuye es porque

$nx^m y^p$ es igual a $12x^3y^4$

Entonces

$n=12;\ m=3$ y $p=4$

$\therefore\ m+n+p=19$

Problema 31

Calcule $\sqrt[b]{ab\sqrt[a]{b}}$ si el polinomio

$P_{(x)}=5+x^{a^{2a}-15}+3x^{(a+1)^a+1}+5x^{2a-1}+\ldots+nx^{b^2-1}$

Donde $n \neq 0$ y $b > 0$, es completo y ordenado, además tiene $4a^a$ términos.

Resolución

Como el primer término es constante, el polinomio será ordenado ascendentemente.

$$a^{2a}-15=1 \ \rightarrow\ a=2$$

$P_{(x)}$ tendrá $4(2^2)=16$ términos

Por propiedad:

$$b^2-1=16-1 \ \rightarrow\ b=4$$ (ver pág. 100)

Luego, lo pedido:

$$\sqrt[4]{2\cdot 4\cdot \sqrt[2]{4}}=\sqrt[4]{2^3\cdot 2}=2$$

Problema 32

Luego de reducir la expresión

$$E_{(x)}=\left(n^2+\sqrt[1]{x^{n^{n+1}}x\cdot x^{n^{n-1}-1}}\right)^{1-n};\ n\in \mathbb{N}-\{1\}$$

donde $x > 0$ y $x \neq 1$, resulta una expresión algebraica. Señale de qué otra forma se clasifica esta expresión.

Resolución

Utilizando las leyes de los exponentes

$$\left(n^2+\sqrt[1]{x^{n^{n+1}+1+n^{n-1}-1}}\right)^{1-n}$$

$$x^{n^n\cdot n+n^n\cdot n^{-1}}=x^{n^n\left(n+\frac{1}{n}\right)}=x^{n^n\left(\frac{n^2+1}{n}\right)}$$

Luego

$$E_{(x)}=\left(n^2+\sqrt[1]{x^{n^n\left(\frac{n^2+1}{n}\right)}}\right)^{1-n}=x^{n^{n-1}\cdot(1-n)}$$

Pero $n^{n-1}\cdot(1-n)$ será siempre entero negativo, si $n \geq 2$ y $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $E_{(x)}$ es una expresión algebraica racional fraccionaria.

Problema 33

Sea $P_{(x)}$ un polinomio de tercer grado que cumple la siguiente condición:

$P_{(x-1)}-P_{(x)}=-2x(3x+2)$

Calcule el coeficiente de su término cuadrático.

Resolución

Sea $P_{(x)}=Ax^3+Bx^2+Cx+D$.

De $P_{(x)}-P_{(x-1)}=2x(3x+2)$

I. Si $x=0 \rightarrow P_{(0)}-P_{(-1)}=0$

Es decir $D-(-A+B-C+D)=0$

Luego $A+C=B$ $\quad(\alpha)$

II. Si $x=1 \rightarrow P_{(1)}-P_{(0)}=2(3+2)=10$

Es decir, $(A+B+C+D)-(D)=10$

Luego $A+B+C=10$ $\quad(\beta)$

De (α) en (β): $B+\underbrace{(A+C)}_{B}=10 \rightarrow 2B=10$

$\rightarrow B=5$

Por lo tanto, el coeficiente del término cuadrático es 5.

Problema 34

Sea $f_{(x+1)}=x^2+1$. Calcule la suma de coeficientes de $\phi_{(x)}$, si se cumple que $\phi_{(x-1)}=f_{(x+3)}+f_{(3-x)}$.

Resolución

La suma de coeficientes de ϕ es $\phi_{(1)}$; luego en $\phi_{(x-1)}=f_{(x+3)}+f_{(3-x)}$ evaluamos:

$x=2 \rightarrow \phi_{(1)}=f_{(5)}+f_{(1)}$ (I)

en $f_{(x+1)}=x^2+1$

Si $x=4 \rightarrow f_{(5)}=4^2+1=17$ (II)

Si $x=0 \rightarrow f_{(1)}=0+1=1$ (III)

De (II) y (III) en (I)

$$\phi_{(1)}=\underbrace{f_{(5)}}_{17}+\underbrace{f_{(1)}}_{1}$$

$\therefore \phi_{(1)}=18$

Problema 35

Si $F_{(x)}=3x-2$, halle $\underbrace{F_{\left(F\left(F\ldots\left(F_{(x)}\right)\ldots\right)\right)}}_{\text{10 paréntesis}}$.

Resolución

1 paréntesis: $F_{(x)}=3x-2$

2 paréntesis: $F_{(F_{(x)})}=3F_{(x)}-2=3(3x-2)-2$

$\rightarrow F_{(F_{(x)})}=3^2x-6-2=3^2x-(3^2-1)$

3 paréntesis: $F_{(F(F_{(x)}))}=3F_{(F(F_{(x)}))}=2$

$$=3\left[3^2x-(3^2-1)\right]-2$$
$$=3^3x-(3^3-3+2)$$
$$=3^3x-(3^3-1)$$

Por inducción

$$\underbrace{F_{\left(F\left(F\ldots\left(F_{(x)}\right)\ldots\right)\right)}}_{\text{10 paréntesis}}=3^{10}x-(3^{10}-1)$$

Problema 36

Sea el polinomio

$P_{(2x-1)}=(5x-1)^m+(2x+1)^m-2x+1$.

Qué valor toma m si se cumple en el polinomio que la suma de coeficientes y su término independiente suman $24+\left(\frac{3}{2}\right)^m+2^m$?

Resolución

Dato

$$P_{(1)}+P_{(0)}=24+\left(\frac{3}{2}\right)^m+2^m \qquad (\alpha)$$

I. Si $x=1$

Entonces

$$P_{(1)}=4^m+3^m-2+1=4^m+3^m-1$$

II. Si $x=\frac{1}{2}$

Entonces

$$P_{(0)}=\left(5\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)^m+\left[\left(2\left(\frac{1}{2}\right)+1\right)\right]^m-2\left(\frac{1}{2}\right)+1=\left(\frac{3}{2}\right)^m+2^m$$

En (α)

$$4^m+3^m-1+\left(\frac{3}{2}\right)+2^m=24+=\left(\frac{3}{2}\right)^m+2^m$$

$\rightarrow\ 3^m+4^m=25=5^2$

$\therefore\ m=2$

Problema 37

Determine el término central del polinomio

$P_{(x)}=nx+(n-1)x^2+(n-2)x^3+...+x^n$,

sabiendo que la suma de sus coeficientes es 153.

Resolución

Recordemos que $\sum$Coeficientes$=P_{(1)}$

$$\rightarrow\ \underbrace{n+(n-1)+(n-2)+...+2+1}_{\frac{n(n+1)}{2}=153}=153$$

$\rightarrow\ n(n+1)=17\times 18\ \rightarrow\ n=17$

Entonces el polinomio tiene 17 términos, el central será el término del lugar 9: t_9; pero cada término es de la forma:

$$t_k=(n-k+1)\cdot x^k$$

Como $n=17\ \rightarrow\ k=9$ entonces $t_9=9x^9$

Problema 38

Sea el polinomio $P_{(x)}=x^2+1$.

Si el polinomio $H_{(x)}$ se define así

$$H_{(x)}=\begin{cases} P_{(x-1)}+P_{(x+1)} & \text{si } x\geq 1, \\ P_{(x)}+P_{(-x)} & \text{si } x<1, \end{cases}$$

determine $H_{(0)}+H_{(1)}$.

Resolución

I. $H_{(0)}$ como $x=0<1$

$\rightarrow\ H_{(0)}=P_{(0)}+P_{(-0)}=2P_{(0)}$

$\rightarrow\ H_{(0)}=2(0^2+1)=2$

II. $H_{(1)}$ como $x=1\geq 1$

$H_{(1)}=P_{(0)}+P_{(2)}=(0^2+1)+(2^2+1)=6$

$\therefore\ H_{(0)}+H_{(1)}=2+6=8$

Problema 39

Si $f_{(t_{x+y})}=f_{(t_x)}\cdot f_{(t_y)}$; y además

$f_{(t_a)}=f_{(t_b)}\cdot e^{a-b}$,

donde $\{x;y;a;b\}\subset \mathbb{Z}_0^+\ \wedge\ 2<e<3$

calcule $f_{(t_0)}+f_{(t_1)}+...f_{(t_n)}$.

Resolución

De las condiciones obtenemos $f_{(t_{a+b})}=f_{(t_a)}\cdot f_{(t_b)}$ obtenemos

$$\rightarrow\ \frac{f_{(t_a)}}{f_{(t_b)}}=\frac{e^a}{e^b}\ \rightarrow\ \begin{matrix} f_{(t_a)}=\lambda e^a \\ f_{(t_b)}=\lambda e^b;\ \lambda\neq 0 \end{matrix}$$

De la condición

$f_{(t_{a+b})}=f_{(t_a)}.f_{(t_b)}$ obtenemos

$\lambda e^{a+b}=\lambda e^a\cdot\lambda e^b\ \rightarrow\ \lambda=1$

$\rightarrow\ f_{(T_a)}=e^a\ \wedge\ f_{(T_b)}=e^b$

Luego

$$f_{(t_0)}+f_{(t_1)}+\ldots+f_{(t_n)}=e^0+e^1+e^2+\ldots+e^n=\frac{e^{n+1}-1}{e-1}$$

$$\therefore\ f_{(t_0)}+f_{(t_1)}+\ldots+f_{(t_n)}=\frac{e^{n+1}-1}{e-1}$$

Observación

$$1+q+\ldots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Problema 40

Del polinomio de grado 11

$P_{(x;y)}=3^5x^{n+3}y^{m-2}+x^{n+2}y^{m-3}$

se tiene $GR_x-GR_y=5$.

Calcule $2m+n$.

Resolución

En $P_{(x;y)}=\underbrace{3^5x^{n+3}y^{m-2}}_{GA=m+n+1}+\underbrace{x^{n+2}y^{m-3}}_{GA=m+n-1}$

Dato

$m+n+1=11 \rightarrow m+n=10 \quad (\alpha)$

Además

$GR_x=n+3;\ GR_y=m-2$

Dato

$(n+3)-(m-2)=5 \rightarrow m=n$

En (α)

$2m=10 \rightarrow m=n=5$

$\therefore\ 2m+n=15$

Problema 41

De la expresión $P_{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}=x^{2009}-2x^{2008}+4$,

calcule el valor de $(P_{(3)})^{P_{(-1)}}$.

Resolución

I. $\frac{x+1}{x-1}=-1 \rightarrow x=0$

Si $x=0 \rightarrow P_{(-1)}=0-2(0)+4$

$\rightarrow P_{(-1)}=4$

II. $\frac{x+1}{x-1}=3 \rightarrow x=2$

Si $x=2$

$\rightarrow P_{(3)}=2^{2009}-2\cdot 2^{2008}+4$

$\rightarrow P_{(3)}=4$

Luego, lo pedido es $(P_{(3)})^{P_{(-1)}}=4^4=256$.

Problema 42

Sea $f_{(x)}$ un polinomio que cumple con

$f_{(x+1)}=3f_{(x)}-2f_{(x-1)}$.

Además $f_{(4)}=1$ y $f_{(6)}=4$.

Calcule el valor de $f_{(5)}$.

Resolución

Evaluando en $x=5$ se tiene

$f_{(5+1)}=3f_{(5)}-2f_{(5-1)}$

$\rightarrow \underbrace{f_{(6)}}_{4}=3f_{(5)}-\underbrace{2f_{(4)}}_{1}$

$\rightarrow 4=3f_{(5)}-2$

$\rightarrow 3f_{(5)}=6$

$\rightarrow f_{(5)}=2$

Problema 43

Calcule el grado del polinomio.

$$P_{(x;y)}=4x^{n-2}+xy^{\frac{8}{5-n}}+y^{4-n}$$

Resolución

Por ser polinomio,

$$n-2>0 \quad \text{y} \quad 4-n>0.$$

Es decir

$$\underbrace{n>2 \quad \text{y} \quad n<4}_{n=3}$$

Luego $P_{(x;\,y)}=4x+xy^{\frac{8}{2}}+y$

$$=4x+xy^4+y$$

Por lo tanto, el grado del polinomio es 5.

Problema 44

Sean los polinomios idénticos

$A_{(x)}=(a+b)x^2+(b+c)x+a+c$ y

$$B_{(x)}=2\sqrt{abc}\left(\frac{x^2}{\sqrt{c}}+\frac{x}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right).$$

Calcule $S=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$.

Resolución

Por ser idénticos:

$$a+b=2\sqrt{abc}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}$$

$$\rightarrow \quad a+b=2\sqrt{ab}$$

Luego, $a=b$.

Análogamente

$$b+c=2\sqrt{abc}\,\frac{1}{a} \quad \rightarrow \quad b=c$$

$$a+c=2\sqrt{abc}\,\frac{1}{b} \quad \rightarrow \quad a=c$$

de donde $a=b=c$

Luego, en S se tiene $\dfrac{3a^2}{(3a)^2}=\dfrac{1}{3}$.

Problema 45

Sea el polinomio $P_{(x)}=x^2+px+q$ de coeficientes naturales y de suma mínima que verifica las siguientes condiciones:

I. $P_{(3)}$ es divisible por 6

II. $P_{(4)}$ es divisible por 7

III. $P_{(5)}$ es divisible por 10

Halle el polinomio $P_{(x)}$.

Resolución

Condición: $p+q$ es mínimo; $P, Q \in \mathbb{N}$

I. $P_{(3)}=9+3p+q=\overset{\circ}{6} \rightarrow q=\overset{\circ}{3}$

II. $P_{(4)}=16+4p+q=\overset{\circ}{7}$

III. $P_{(5)}=25+5p+q=\overset{\circ}{10} \rightarrow q=\overset{\circ}{5}$

De (I) y (III)

$$q=\overset{\circ}{15} \rightarrow q_{\text{mín}}=15$$

Reemplazando en (II)

$$16+4p+15=\overset{\circ}{7}$$

$$\rightarrow \quad 4p+31=\overset{\circ}{7}$$

$$\rightarrow \quad (4p)_{\text{mín}}=32$$

$$\rightarrow \quad p_{\text{mín}}=8$$

$$\therefore \quad P_{(x)}=x^2+8x+15$$

Test 3

1. ¿Cuántas expresiones de las indicadas son racionales?

I. $T_{(x;\,y)}=5x^4+7y^{-1}$

II. $S_{(x;\,y;\,z)}=\dfrac{45}{xyz}\sqrt{2}$

III. $U_{(x;\,y;\,z)}=xy\sqrt{z^z}$

IV. $M_{(a;\,b)}=\dfrac{32\sqrt{5}}{\pi}$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

2. ¿Cuántas de las expresiones indicadas son términos algebraicos?

I. $S_{(x;\,y)}=32x+y\operatorname{sen}z$

II. $A_{(x;\,y)}=\dfrac{47}{xy}\sqrt{xy}$

III. $B_{(x;\,y)}=\dfrac{7x\sqrt{y}}{z+1}$

IV. $C_{(x;\,y;\,t)}=(z+3)xyt^3$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

3. ¿Cuántos valores puede tomar n en T para que sea un polinomio mónico?

$T_{(x)}=(n-5)x^{n-2}+5x^{6-n}+3$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

4. Calcule el valor numérico de P en -2, si $P_{(x)}=32x^4+16x^5+x+7$.

A) 7 B) 102 C) 5
D) 79 E) 69

5. Calcule el valor numérico de S en -1, si $S_{(2x-3)}=7x^3+4$.

A) 7 B) 4 C) 11
D) -3 E) 3

6. Halle el término independiente en $P_{(3x-1)}=4x+5$.

A) 5 B) 9 C) $\dfrac{15}{4}$
D) $\dfrac{19}{3}$ E) $\dfrac{17}{3}$

7. Dado el polinomio
$P_{(3-x)}=x^3-5x+1+(x-2)^4$
calcule la suma de coeficientes.

A) -2 B) 2 C) 1
D) -1 E) 0

8. Si $T_{(x)}=\dfrac{2x+1}{x-2}$; $x\neq 2$,

halle $T_{(T_{(x-1)})}$.

A) $x-1$ B) $x+1$ C) $\dfrac{x-1}{x+1}$
D) $\dfrac{2x+1}{x-2}$ E) $\dfrac{x-2}{2x+1}$

9. Si el polinomio
$P_{(x;\,y;\,z)}=3x^{a-5}+y^{b-1}+cz^{c^2}-7xy^2z$
es homogéneo, ¿cuál es el mínimo valor de $a+b+c$?

A) 15 B) 14 C) 13
D) 17 E) 12

10. Si $(3x-1)^n$ es idéntico a $Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+2D-1$, ¿cuál es el valor de D?

A) 1 B) 0 C) $\frac{1+(-1)^n}{2}$

D) -1 E) $\frac{1}{2}$

11. Dada la igualdad

$f_{(x+y)}=f_{(x)}+f_{(y)}$,

indique el valor de $f_{(0)}$.

A) 1 B) 0 C) 2

D) 5 E) 3

12. De la igualdad

$$\frac{f_{(x)}+2}{f_{(x)}-2}=\frac{x(x^2+3)}{3x^2+1},$$

indique el valor numérico de f en $\frac{\sqrt[3]{7}+1}{\sqrt[3]{7}-1}$.

A) 7 B) 7/2 C) 14

D) 4/3 E) 1

Claves

1 D	3 A	5 C	7 D	9 E	11 B
2 D	4 C	6 D	8 A	10 C	12 C

Problemas PROPUESTOS

Nivel I

1. Sea el polinomio

$$P_{(x)}=\frac{3x+1}{2}.$$

Calcule $\dfrac{P_{(5)}+P_{(-1)}}{P_{(0)}}$.

A) 7/2 B) 14 C) 13/2
D) 16 E) 12

2. Sea $P_{(x,y)}=x^{2n-3}\cdot y^{2n+5}$, donde el grado relativo respecto a x es 7. Calcule el grado absoluto de la expresión.

A) 22 B) 30 C) 35
D) 25 E) 28

3. Sea $P_{\left(\frac{x}{5}\right)}=x^{20}-125x^{17}+3x+2$.

¿Cuál es el valor numérico de P en 1?

A) 17 B) 20 C) 30
D) 50 E) 80

4. Dado que $P_{(x)}=x^3-4x^2+3x-13$,

¿cuál es el valor de $P_{(P_{(4)})}$?

A) −24 B) −21 C) −12
D) 11 E) 34

5. Sea $P_{(x)}=k$; $k\in\mathbb{R}$.

Calcule $P_{(1)}+P_{(2)}+\ldots+P_{(100)}$.

A) k B) $2k$ C) $10k$
D) $100k$ E) $4950k$

6. Si $M_{(x-1)}=x^3+x+1$, tal que

$M_{(k)}=k^3+2k^2+k-1+q_{(k)}$,

Halle la expresión $q_{(k)}$.

A) k^2+3k+4 B) $3k-1$ C) k^2-3k+5
D) k^2+4k+3 E) k^2-4k+3

7. Definimos la expresión

$$f_{(x)}=\begin{cases} x-1, & \text{si } x\geq 2\\ x^2-1, & \text{si } x<2\end{cases}$$

Calcule: $a\,f_{(3-a)}+f_{(2a)}$ con $a<0$.

A) $3a+2$ B) $3a^2+2a-1$ C) $3a+5$
D) $4a+2$ E) $3a$

8. Si $P_{(x)}=ax+b$, además $P_{(3)}=2P_{(1)}=4$,

¿cuál es el término independiente de $Q_{(x)}$, si $Q_{(ax^2+b)}=x^4$?

A) 0 B) 1 C) −1
D) 3 E) 2

9. Si $P_{(x)}=5P_{(x+1)}$, calcule el valor de M.

$$M=\frac{P_{(0)}+P_{(1)}+P_{(2)}}{P_{(2)}+P_{(3)}+P_{(4)}}.$$

A) 4 B) −5 C) 30
D) 25 E) 5

10. Si $P_{(x)}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)x$, halle el equivalente reducido de $\dfrac{P_{(2x+1)}-P_{(1-2x)}}{x}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

11. Dadas las expresiones

$P_{(x)}=x^3$; $Q_{(x)}=\sqrt[3]{x}$,

calcule el valor numérico de $Q_{(P_{(3)})}+P_{(Q_{(8)})}$.

A) 7 B) 35 C) 18
D) 12 E) 11

12. Se tiene un polinomio $f_{(x)}$ tal que cumple las condiciones:

I. $f_{(1)}=1$
II. $f_{(x)}=f_{(x-1)}+x$; $\forall x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x>1$

¿Cuál es el valor numérico del polinomio f en 9?

A) 40 B) 44 C) 45
D) 46 E) 47

13. Dado $P_{(2x-1)}=x^2+ax+b$, se sabe que la suma de los coeficientes de P es 7; además, b es el doble de a. ¿Cuál es el valor de ab?

A) 14 B) 12 C) 10
D) 8 E) 6

14. Sea la familia de polinomios

$P_{n(x)}=nx+b$; $b \in \mathbb{Z}$.

¿Cuál es el valor de x cuando se cumple que $P_{2(x)}+P_{3(x)}+...+P_{12(x)}+x=11b$?

A) b B) $\frac{b}{78}$ C) $\frac{b}{2}$
D) -78 E) 0

15. Si el polinomio

$P_{(x)}=3x^{a-1}y^3+4x^cy^d+7x^5y^{b-1}$

se reduce a un solo término, ¿cuáles son los valores de a y b?

A) 6; 4 B) 3; 1 C) 0; −1
D) −2; 1 E) 4; 7

16. Dada la expresión algebraica

$f_{(x;y)}=\frac{x^2+y}{y}$, determine el valor numérico de f cuando $x=2^{4^6}$; $y=4^{4^6}$.

A) 1 B) 2 C) 2^4
D) 2^{4^4} E) 2^{2^3}

17. Si $P_{(x-1)}=2x^2-1$; $x\neq 2$, halle el equivalente reducido de $\frac{P_{(x-2)}-P_{(2-x)}}{2x-4}$.

A) $2x$ B) 0 C) x^2-1
D) 4 E) 1

18. Si $P_{(x)}=x^3-3x^2+3x-2$,

calcule el valor de M.

$M=P_{(0)}^{P_{(1)}^{P_{(2)}}}$.

A) 2 B) −2 C) 4
D) 5 E) 0

19. Dado el polinomio $f_{(x)}=M-nx^2$, además $f_{(0)}=-2 \wedge f_{(-1)}=-1$, ¿cuál es el valor de $f_{(\sqrt{3})}$?

A) 1 B) C) −1
D) $\sqrt{3}$ E) 7

20. Al reducir la expresión polinomial

$bx^6y^{a+1}+(a+b)x^{b+2}y^7+ax^ay^{b+3}$,

siendo los términos semejantes en variables x e y, calcule qué se obtiene.

A) $10x^7y^6$ B) $5x^6y^6$ C) $15x^6y^7$
D) $3x^6y^7$ E) $20x^6y^7$

Nivel II

21. Si $H_{(H(x))}=4x-3$; $H_{(x)}=ax+b$ y $a>0$, indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
    I. La suma de coeficientes de $H_{(2x-1)}$ es -1.
    II. $H_{(5)}=17$
    III. El término independiente de $H_{(3x+1)}$ es -3.

    A) VVV B) FFF C) VFF
    D) FVF E) FVV

22. Sean los polinomios
    $P_{(x)}=2x^2-15 \wedge Q_{(x;y)}=2x+3y-2$.
    Halle el término independiente del polinomio $H_{(t)}$, sabiendo que $H_{(t)}=Q_{(P_{(3)},\,3t-1)}$.

    A) -5 B) -15 C) -2
    D) 1 E) 7

23. En el polinomio
    $P_{(x-2)}=(x+2)^3-3(x-1)+mx+5$
    se cumple que la sumatoria de coeficientes y el término independiente suman 200; según ello, establezca el valor de verdad de cada una de las proposiciones:
    I. El término independiente del polinomio es 129.
    II. La suma de sus coeficientes es 71.
    III. $P_{(2)}=6^3+4$

    A) VVV B) VFV C) VVF
    D) VFF E) FFV

24. Sea $f_{(k_{(x)})}=x(x-2)^{-1}$; $f_{(x)}=(x+2)x^{-1}$.
    Determine el valor de $k_{\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)}$.

    A) 2 B) 4 C) 5
    D) 8 E) 15

25. Sea $P_{(x)}=(a^3-7)x^5+ax^2+a^2+1$ un polinomio mónico; ($a \in \mathbb{R}$).
    Halle el término que no depende de la variable.

    A) 2 B) 5 C) 10
    D) 17 E) 26

26. En el polinomio
    $P_{(x)}=(1+2x)^n+(1+3x)^n$,
    la suma de coeficientes excede en 23 al término independiente.
    Según ello, establezca el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
    I. El polinomio $P_{(x)}$ es de grado 2.
    II. La suma de sus coeficientes es 25.
    III. El término cuadrático de $P_{(x)}$ es $12x^2$.

    A) VVV B) VFV C) VVF
    D) FVV E) FFV

27. Si la expresión algebraica

$$S_{(x)}=\frac{\left[(x^{n-2})^3\cdot x^{2n-3}\right]^2\cdot x^4}{\left((x^n)^2\cdot x^4\right)^2}$$

    se reduce a un monomio de segundo grado, calcule el valor de n.

    A) 1 B) 2 C) 3
    D) 4 E) 5

28. Si el polinomio
    $P_{(x;y)}=(a^2+1)x^{a^2+2}y^a+(a+1)x^{2a-1}y^{a^2-1}$
    es homogéneo, calcule la suma de sus coeficientes.

    A) 16 B) 13 C) 11
    D) 4 E) 22

29. Se tienen los polinomios idénticos

$P_{(x)}=(m-5)x^{2n-1}+(n-3)x^{n-2} \wedge$

$Q_{(x)}=\frac{p}{4}x^{n-2}+(3-m)x^{7}.$

Establezca el valor de verdad de las proposiciones:

I. La suma de sus coeficientes es 0.

II. Son de grado 7.

III. El valor de $\frac{m}{n^2+p^2}$ es 0,125.

A) VVV B) VVF C) VFV
D) VFF E) FVV

30. Dado el polinomio

$P_{(x)}=x(ax^3+bx^2+cx+d),$

donde se verifica $P_{(x)}\equiv P_{(1-x)}$, calcule $2a+b$.

A) 3 B) 5 C) −4
D) 1 E) 0

31. Si la siguiente expresión matemática es un polinomio

$P_{(x;\,y;\,z)}=(a-b)\sqrt[a]{x^b}+(b-c)\sqrt[b]{y^c}+(c-a)\sqrt[c]{z^a},$

establezca el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I. P presenta 3 términos.

II. P es un polinomio homogéneo.

III. P es idénticamente nulo.

IV. P es de grado cero.

A) VVVV B) VFVV C) VVFV
D) FFVF E) FFFF

32. Calcule el valor de $\sqrt[b]{ab\sqrt[a]{b}}$ si el polinomio

$P_{(x)}=7+x^{a^{2a}-15}+3x^{(a-1)a}+5x^{2a-1}+\ldots+nx^{b^2-1},$

tal que $n\neq 0$ y $b>0$, es completo y ordenado de $4a^a$ términos.

A) 7 B) 6 C) 4
D) 3 E) 2

33. Si al polinomio

$P_{(x;\,y)}=nx^My^P+Mx^{M-1}y^{P-1}+x^{n-8}$

le restamos $10x^3y^4$, su grado absoluto disminuye. ¿Cuánto vale el menor de los grados relativos?

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

34. Halle el valor de $a^{33}+\frac{2}{a^{99}}$, si el polinomio

$P_{(x)}=(a^3+b-c-10)x^{a^6}+(c-b+9)x^{a^9}$

es idénticamente nulo.

A) 2 B) 1 C) 0
D) 4 E) 3

35. Dada la siguiente identidad:

$(2x+5)^7-(x-1)^7\equiv(x^2+9x+18)A_{(x)}+ax+b,$

donde $A_{(x)}=a_0x^5+a_1x^4+\ldots+a_5 \wedge a_0\neq 0,$

determine $a+\frac{b}{6}$.

A) $\frac{2}{3}(4^7+1)$ B) $\frac{3}{2}(4^7+1)$ C) $\frac{2}{3}(4^7-1)$

D) $\frac{3}{2}(4^7-1)$ E) 4325

36. Si el polinomio

$M_{(x;\,y)}=(a+b-c-d^2)x^2+(b-de)xy+9(b+c-a-e^2)y$

es idénticamente nulo, calcule

$S=\frac{d^2}{b}+\frac{9b}{e^2}+\frac{6a}{c}.$

A) 15 B) 16 C) 18
D) 13 E) 9

37. Calcule el valor de $M+n$, con la condición de que el polinomio

$$P_{(x;y)}=x^{2m+n-4}y^{m+n+2}+x^{2m+n-3}y^{m+n+1}+$$
$$+x^{2m+n-2}y^{m+n}$$

sea de grado absoluto 28 y la diferencia de grados relativos a x e y sea igual a 6.

A) 17 B) 15 C) 13
D) 10 E) 9

38. Calcule el grado de

$A_{(x;y;z;...)}=3xy^5z^{13}w^{25}...$, de 10 variables.

A) 528 B) 670 C) 720
D) 840 E) 936

39. En el polinomio homogéneo

$P_{(x;y;z)}=(xy)^{3a^{b-a}}+y^{b^{a-b}}+2z^c$,

calcule $a+b+c$.

A) 4 B) 5 C) 7
D) 9 E) 15

40. Si $f_{(x)}=\dfrac{3x}{x-1}$, halle $f_{(2x)}$ en términos de $f_{(x)}$.

A) $\dfrac{6f_{(x)}}{f_{(x)}-2}$ B) $\dfrac{3f_{(x)}}{f_{(x)}+3}$ C) $\dfrac{6f_{(x)}}{f_{(x)}+3}$

D) $\dfrac{6f_{(x)}}{f_{(x)}-3}$ E) $\dfrac{1}{f_{(x)}}$

41. Sabiendo que $P_{(x)}$ es un polinomio de grado n completo y ordenado en forma descendente, donde además se cumple que la suma en cada término del coeficiente con su exponente respectivo es $n+1$, halle el polinomio evaluado en A si

$$A=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}.$$

A) n

B) $(n+2)(n+1)$

C) $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

D) $\dfrac{n(n+1)}{2}$

E) $\dfrac{n-3}{2}$

42. Si al reducir

$$P_{(x)}=(x+1)(x-1)-\frac{x^{n^n}+x^n}{x};\ x\neq 0$$

resulta un polinomio completo, ¿qué se puede afirmar de $J_{(x)}=(2x^n)^n+3x^{n^n}-4x^{6\cdot n}+y^n$?

A) Es homogéneo
B) Es completo
C) Es ordenado
D) Es un monomio
E) Es un trinomio

43. Sea la expresión matemática

$$f_{(x)}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};\ x\notin\{-1;\ 0;\ 1\}.$$

Determine m ($m\in\mathbb{R}^+$), si se cumple que $f_{(\Delta)}=2$, cuando

$$\Delta=\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{m^2}}}.$$

A) -2 B) 49 C) 2
D) 4 E) $\sqrt{7}$

44. Dado el polinomio que posee grado absoluto igual a 33

$P_{(x;y)}=2x^ay^{a+1}+5x^{2a}y^{a+3}-ax^{a-6}y^{a+7}+7x^{2a}y^{a+2}$,

calcule el GR_x y GR_y, respectivamente.

A) 10; 23 B) 20; 12 C) 20; 17
D) 10; 11 E) 14; 10

45. En el polinomio

$P_{(x)}=6ax^{5a}+5ax^{4a}+4ax^{3a}+3ax^{2a}+20ax^{a}+a,$

calcule el valor de a si se cumple que la suma de coeficientes es igual a su término independiente incrementado en 76.

A) 1 B) 4 C) 2
D) 3 E) 5

46. Calcule la suma de coeficientes del polinomio completo y ordenado.

$P_{(x)}=ax^{a}+bx^{b}+cx^{c}+dx^{d}+abcd;$

donde a, b, c, d son diferentes.

A) 24 B) 44 C) 10
D) 34 E) 14.

47. Si el polinomio se anula para más de dos valores asignados a su variable

$P_{(x)}=(ab+ac-3)x^2+(ac+bc-6)x+$
$+(ab+bc-9),$

calcule el valor de $abc(a+b)(a+c)(b+c)$.

A) 160 B) 163 C) 161
D) 162 E) 164

48. Si el polinomio P verifica

$P_{(x;y)}=(n^n-1)x^3y^3+(m^n-2)y=-\frac{3}{4}x^3y^3+62y,$

calcule el valor de $64m-n$.

A) -3 B) -2 C) 30
D) 20 E) 10

49. Calcule los valores de m y n para que el polinomio

$P_{(x)}=(2+n)x^{m+3}+5x^2+x^{p-m}+2x^n$

sea completo. Considere $n>p$.

A) 0; 4 B) 2; 3 C) 0; 2
D) 1; 2 E) 3; 4

50. Si el polinomio P es completo y tiene $(4+a)$ términos

$P_{(x)}=2ax^{2a}+(2a-1)x^{2a-1}+(2a-2)x^{2a-2}+\ldots$

calcule el valor de a.

A) 0 B) 3 C) 1
D) 2 E) 4

51. Calcule $H_{(3)}$ a partir de

$H_{(x)}=F_{(x+1)}+G_{(x-1)},$

donde $F_{(x-1)}=x^2+x+1$ y $G_{(x+1)}=x^2-2x+2.$

A) 4 B) 16 C) 32
D) 8 E) 35

52. Dado el polinomio

$P_{(x;y)}=3^5x^{n+3}y^{m-2}z^{6-n}+x^{n+2}y^{m-3}.$

Si $GA_{(P)}=11$; $GR_x-GR_y=5$, calcule el valor de $2m+n$.

A) 5 B) 15 C) 10
D) 25 E) 12

53. Sean $F_{(x)}=-x^2+x+m$ y $G_{(x)}=x+3$, de tal manera que

$F_{(G_{(F_{(2)})})}=-1.$

Indique el mayor valor de m.

A) 2 B) 0 C) 1
D) -1 E) -2

54. Si $P_{(x)}=x$, verifica

$P_{[M_{(x)}+G_{(x)}]}=4x+6$ y

$P_{[M_{(x)}-2G_{(x)}]}=x+12,$

calcule el valor de $M_{(G_{(2)})}$.

A) 0 B) 1 C) 6
D) 3 E) 8

55. ¿Cuántos factores han de tomarse en la expresión

$P_{(x)}=(x^2+1)(x^6+2)(x^{12}+3)...,$

tal que $P_{(x)}$ sea de grado 330?

A) 10 B) 12 C) 13
D) 9 E) 8

56. Dado el polinomio

$P_{(2x-3)}=(2x+3)^{4m}+2(12x-6)^{2m}+(2x+1)^{2m},$

calcule m si su término independiente es igual a 1600.

A) 1 B) 7 C) 0
D) 3 E) 2

57. Sean los polinomios

$P_{(x)}=2x^3+5x^2+4x+1;$

$Q_{(x)}=(ax+b)^c(cx+d)^a+k;$

$k\neq 1$, donde $P_{(x)}-Q_{(x)}\equiv 0.$

Calcule $\left(\dfrac{b^c d^a}{1-k}\right)(a^c\cdot c^a).$

A) −1 B) 2 C) 1
D) −2 E) 4

58. Si al sumar $M_{(x)}$ y $P_{(x,y)}$ se obtiene un polinomio homogéneo donde

$M_{(x)}=ax^{(a+1)^b}+b^a$

$P_{(y;z)}=y^{(a-1)^a\cdot b^{2b}}+6z^{b^{a+2b}},$

calcule $\sqrt[a]{b(a+1)};\ ab\neq 0.$

A) 2 B) −3 C) 3
D) −2 E) 1

59. Clasifique la expresión algebraica.

$$P_{(x;y;z)}=\frac{5x^4y^3}{2z^{-3}}-\frac{\sqrt{2}x^{\frac{1}{3}}y^2}{\sqrt[3]{x^{-2}}}-\frac{\pi}{3}y^8z^{-6}$$

A) Racional entera
B) Irracional
C) Racional fraccionaria
D) No admite clasificación
E) Trascendente

60. Determine el grado del polinomio $P_{(x)}$, sabiendo que el grado de $[P_{(x)}]^2[Q_{(x)}]^3$ es igual a 21; además, el grado de $[P_{(x)}]^4[Q_{(x)}]^2$ es igual a 22.

A) 2 B) 5 C) 3
D) 7 E) 1

CLAVES
Problemas propuestos

NIVEL I

1 B	5 D	9 D	13 D	17 D
2 A	6 A	10 D	14 E	18 B
3 A	7 B	11 E	15 A	19 A
4 B	8 B	12 C	16 B	20 E

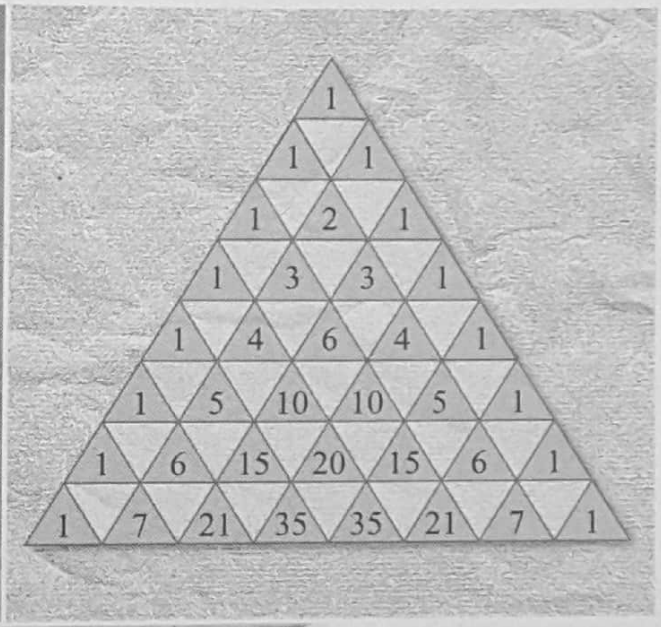
NIVEL II

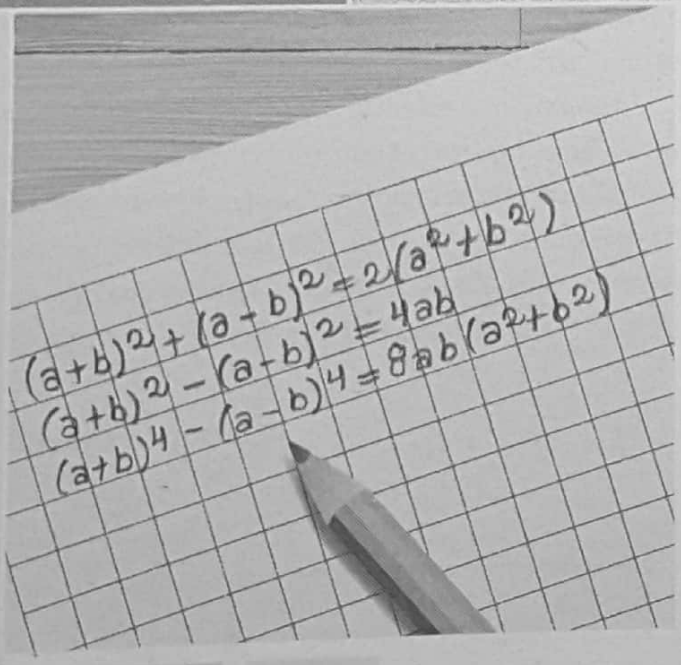
21 B	29 A	37 D	45 C	53 C
22 D	30 E	38 B	46 D	54 E
23 E	31 D	39 C	47 D	55 D
24 C	32 E	40 C	48 E	56 A
25 B	33 D	41 C	49 B	57 B
26 C	34 E	42 E	50 B	58 A
27 D	35 C	43 C	51 C	59 C
28 E	36 B	44 C	52 B	60 C

Capítulo

IV

Adrien-Marie Legendre





Multiplicación algebraica

CAPÍTULO IV

MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA

Objetivos

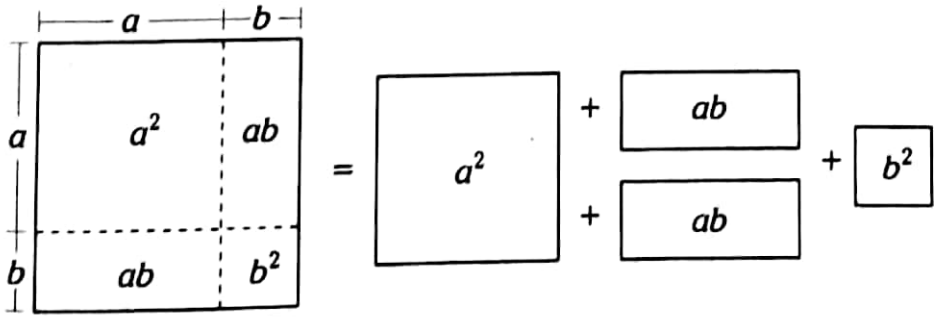
- Aplicar de modo adecuado la propiedad distributiva en la multiplicación de polinomios.
- Identificar los productos notables, por ser de suma importancia en la simplificación de expresiones algebraicas y factorización de polinomios.
- Desarrollar habilidad operativa en la resolución de problemas que requieran del uso de los productos notables.

Introducción

Sabemos que la parte teórica de la matemática tiene su origen en las escuelas científicas y filosóficas de la Grecia antigua. Una vez descubiertos los números irracionales, en la aún no fortalecida matemática griega, hubo la necesidad de crear para la investigación científica una teoría matemática general adecuada, tanto para los números racionales como para los irracionales.

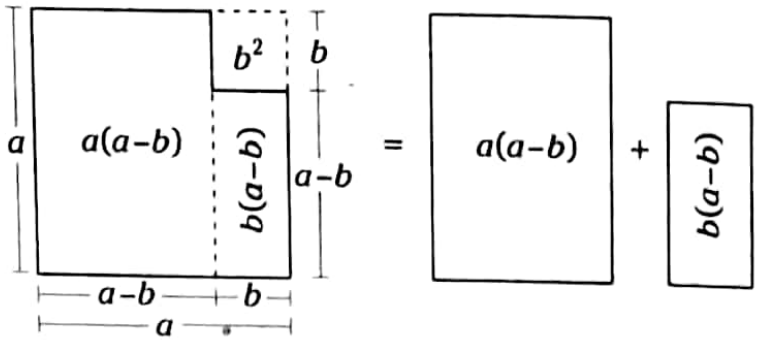
En cuanto se descubrieron los números irracionales resultó que la colección de magnitudes geométricas, por ejemplo los segmentos, era más completa que el conjunto de los números racionales, entonces era oportuno construir un cálculo más general en forma geométrica. Este cálculo fue creado y recibió el nombre de álgebra geométrica, pues desde este momento los productos notables –conocidos en la actualidad– tienen su interpretación geométrica.

Desarrollo de un trinomio cuadrado perfecto



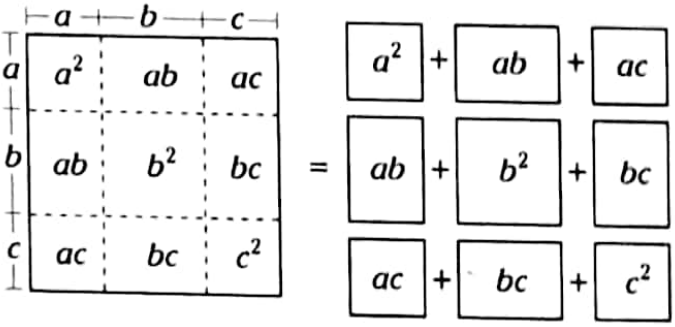
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Desarrollo de diferencia de cuadrados



$$a(a-b)+b(a-b)=(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

Desarrollo de un trinomio al cuadrado



$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA

DEFINICIÓN DE MULTIPLICACIÓN

La multiplicación es aquella operación matemática que consiste en hallar una tercera expresión llamada producto $(P_{(x)})$ a partir de otras dos llamadas multiplicando $[M_{(x)}]$ y multiplicador $[N_{(x)}]$, respectivamente.

$$P_{(x)} \equiv M_{(x)} \cdot N_{(x)}$$

Ejemplo

Al multiplicar $\left(x-\frac{1}{x}\right)$ con $(x+x^2)$ se obtendrá como producto x^3+x^2-x-1.

LEYES DE LA MULTIPLICACIÓN

Para dos expresiones a; b cualesquiera se cumplen las leyes siguientes:

Ley conmutativa

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Esto justifica que en una multiplicación el orden de sus factores no altera el producto.

Ejemplos

1. $5 \cdot 3 = 15 = 3 \cdot 5$
2. $(x^2-1)(x^3+2)=(x^3+2)(x^2-1)$

Ley asociativa

$$(ab)c = a(bc)$$

En la multiplicación no interesa el orden para asociar o agrupar.

Ejemplos

1. $5(2 \cdot 3) = 5 \cdot 6 = 30 = (5 \cdot 2)3 = 10 \cdot 3$
2. $(3x-1)[(x+1)y] = [(3x-1)(x+1)]y$

Ley de la identidad multiplicativa

$$a \cdot 1 = a$$

El elemento 1 recibe el nombre de neutro multiplicativo.

Ejemplos

1. El elemento neutro multiplicativo de 17 es 1, ya que $17 \cdot 1 = 17$.
2. $(2x-1) \cdot 1 = 2x-1$

Ley del inverso multiplicativo

Para todo a (a diferente a 0) existe un único elemento llamado inverso de a, denotado por a^{-1}, de tal modo que $a \cdot a^{-1} = 1$.

Teorema

Para $a \neq 0$, el producto de ab es a si y solo si $b=1$.
Asimismo, el producto ab es 0 si y solo si $a=0 \vee b=0$

Ejemplos

1. El inverso multiplicativo de 5 es $\frac{1}{5}$, puesto que $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$.
2. El inverso multiplicativo de $-\frac{1}{3}$ es -3, puesto que $\left(-\frac{1}{3}\right)(-3) = 1$.
3. $(4x+y)(3x-y)=0$, solamente cuando $4x+y=0 \vee 3x-y=0$.

Ley distributiva

$$\boxed{a(b+c)=ab+ac}$$

Observe que a se distribuye con b y c.

Ejemplos

1. $x^5(y+z^2)=x^5y+x^5z^2$

2. $a^4(a^2+b^3)=a^6+a^4b^3$

MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES DE UN TÉRMINO

Se aplican las leyes de los exponentes.

- $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
- $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

Ejemplo

$$(-2xy^2)\left[\frac{3x^2}{y}\right]=-6x^3y$$

MULTIPLICACIÓN DE UNA EXPRESIÓN CON OTRA DE DOS O MÁS TÉRMINOS

Para obtener el producto se emplea la propiedad distributiva.

$$\boxed{a(b+c)=a\cdot b+a\cdot c}$$

Ejemplos

1. $-\dfrac{1}{2}x^3y\left\{x^2-4x+\dfrac{7}{y}\right\}=\underbrace{-\dfrac{1}{2}x^5y+2x^4y-\dfrac{7}{2}x^3}_{\text{producto}}$

2. $\dfrac{3}{4}x^3y^5(x^4+y^7+x^2y^3)=\dfrac{3}{4}x^7y^5+\dfrac{3}{4}x^3y^{12}+\dfrac{3}{4}x^5y^8$

3. $(x+2y^2)(3x^2-y^3)=x\cdot 3x^2-x\cdot y^3+2y^2\cdot 3x^2-2y^2\cdot y^3=3x^3-xy^3+6x^2y^2-2y^5$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Es un caso particular de la multiplicación algebraica, con la particularidad que sus elementos son polinomios. En este caso se establece una identidad entre tales polinomios.

Identidad fundamental

Mult. indicada o por realizar

$$\overbrace{\underbrace{F_{(x)}} \cdot \underbrace{G_{(x)}}} \equiv \underbrace{H_{(x)}}$$

producto

multiplicador

multiplicando

Ejemplos

1. $(x-1)[x^2+x+1] \equiv x^3-1$
2. $(x+y)^2(x-y)^2 \equiv (x^2-y^2)^2$
3. $(x+3)(x-3) \equiv x^2-9$
4. $(x+7)(x+2) \equiv x^2+9x+14$

GRADO DEL POLINOMIO PRODUCTO

Sean los polinomios

$$P_{(x)}=a_0x^m+a_m;$$

$$Q_{(x)}=b_0x^n+b_n;\ \{m, n\} \subset \mathbb{Z}^+.$$

Entonces

$$C_{(x)}=P_{(x)} \cdot Q_{(x)}=C_0x^{m+n}+C_1x^m+C_2x^n+C_3$$

de donde

$$\text{Grado}\ [(P \cdot Q)_{(x)}]=\text{Grado}\ P_{(x)}+\text{Grado}\ Q_{(x)}$$

Nota

En el caso de que

$$P_{(x)}=(a_0x^m+b)^n$$
$$=A_0x^{mn}+...+B$$

el grado de $P_{(x)}$ será $m \cdot n$ y su término independiente $(+b)^n$ será igual a B.

Ejemplos

1. Sean $P_{(x)}=x^5+3x^3+9x+1;$

   $Q_{(x)}=3x^9+x+7.$

   Como el grado de $P_{(x)}$ es 5 y el grado de $Q_{(x)}$ es 9, entonces el grado de $P_{(x)} \cdot Q_{(x)}$ es $5+9=14$.

2. Sean $P_{(x)}=(3x^7+2x-16)^3;$

   $S_{(x)}=(2x+x^2-x^6)^2.$

   Como el grado de $P_{(x)}$ es 7(3) y el grado de $S_{(x)}$ es 6(2), entonces el grado de $P_{(x)} \cdot S_{(x)}$ es $21+12=33$.

PRODUCTOS NOTABLES

DEFINICIÓN

Son los resultados de ciertas multiplicaciones indicadas que se obtienen en forma directa, considerando implícita la propiedad distributiva de la multiplicación por la forma que presentan.

PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLES

Trinomio cuadrado perfecto

$$(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 \equiv a^2-2ab+b^2$$

Tenga en cuenta que $(a-b)^2 \equiv (b-a)^2$

Ejemplos

1. $(x+1)^2=x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2=x^2+2x+1$

2. $(a-2)^2=a^2-2a\cdot 2+2^2=a^2-4a+4$

3. $(2y+3)^2=(2y)^2+2(2y)3+3^2=4y^2+12y+9$

4. $(3z-4)^2=(3z)^2-2(3z)(4)+4^2=9z^2-24z+16$

5. $(2x^2+3x^3)^2=(2x^2)^2+2(2x^2)(3x^3)+(3x^3)^2$

$$=4x^4+12x^5+9x^6$$

6. $(5x^4-y^6)^2=(5x^4)^2-2(5x^4)(y^6)+(y^6)^2$

$$=25x^8-10x^4y^6+y^{12}$$

Corolario

Identidades de Legendre

1. $(a+b)^2+(a-b)^2\equiv 2(a^2+b^2)$
2. $(a+b)^2-(a-b)^2\equiv 4ab$
3. $(a+b)^4-(a-b)^4\equiv 8ab(a^2+b^2)$

Ejemplos

1. $(x+1)^2-(x-1)^2=4\cdot x\cdot 1=4x$

2. $(x+1)^2+(x-1)^2=2(x^2+1^2)=2(x^2+1)$

3. $(x+1)^4-(x-1)^4=8\cdot x\cdot 1(x^2+1^2)=8x(x^2+1)$

4. $(2x+3y)^2+(2x-3y)^2=2((2x)^2+(3y)^2)=2(4x^2+9y^2)$

5. $(3x^2y+xy^2)^2-(3x^2y-xy^2)^2=4\cdot 3x^2y\cdot xy^2=12x^3y^3$

6. $(m+2n)^4-(m-2n)^4=8\cdot m\cdot 2n(m^2+4n^2)$

$$=16mn(m^2+4n^2)$$

Teorema

Todo trinomio de la forma ax^2+bx+c es un cuadrado perfecto si y solo si $b^2=4ac \wedge a>0$.

Ejemplos

1. $x^2+8x+16$ es un cuadrado perfecto ya que $8^2=4\cdot 1\cdot 16$.

2. $4x^2-4x+1$ es un cuadrado perfecto ya que $(-4)^2=4\cdot 4\cdot 1$.

3. $4x^2+12x+9$ es un trinomio cuadrado perfecto ya que $12^2=4(4)(9)$; más aún, es equivalente a $(2x+3)^2$.

Diferencia de cuadrados

$$(a+b)(a-b)\equiv a^2-b^2$$

Ejemplos

1. $(x+1)(x-1)=x^2-1^2=x^2-1$

2. $(2m+n)(2m-n)=(2m)^2-n^2=4m^2-n^2$

3. $(3x+2y)(3x-2y)\equiv(3x)^2-(2y)^2\equiv 9x^2-4y^2$

4. $(4x^3+3z^4)(4x^3-3z^4)\equiv(4x^3)^2-(3z^4)^2\equiv 16x^6-9z^8$

5. $(m+n+2p)(m+n-2p)\equiv(m+n)^2-(2p)^2$

$$\equiv(m+n)^2-4p^2$$

Trinomio al cuadrado

$$(a+b+c)^2\equiv a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

Ejemplos

1. $(x^2+x+1)^2=(x^2)^2+x^2+1^2+2(x^2\cdot x+x^2\cdot 1+x\cdot 1)$

$$=x^4+x^2+1+2(x^3+x^2+x)$$

$$=x^4+2x^3+3x^2+2x+1$$

2. $(x^2-2x+1)^2=(x^2)^2+(-2x)^2+1^2+2[x^2\cdot(-2x)+$
$$+x^2\cdot 1+(-2x)1]$$

$$=x^4+4x^2+1+2[-2x^3+x^2-2x]$$

$$=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$$

3. $(2x+3y+z^2)^2\equiv(2x)^2+(3y)^2+(z^2)^2+$
$$+2(2x)(3y)+2(2x)z^2+2(3y)z^2$$

$$\equiv 4x^2+9y^2+z^4+12xy+4xz^2+6yz^2$$

4. Si $m+n+p=1$, $m^2+n^2+p^2=2$, halle $mn+np+mp$.

Resolución

De la identidad

$$(m+n+p)^2=m^2+n^2+p^2+2(mn+mp+np)$$

Reemplazando los datos

$$1^2=2+2(mn+mp+np)$$

$$\therefore\ mn+mp+np=-\frac{1}{2}$$

Binomio al cubo

$$(a+b)^3\equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\equiv a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3\equiv a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\equiv a^3-b^3-3ab(a-b)$$

Ejemplos

1. $(x+1)^3=x^3+3x^2\cdot 1+3x\cdot 1^2+1^3=x^3+3x^2+3x+1$

2. $(x-2)^3=x^3-3x^2\cdot 2+3x\cdot 2^2-2^3=x^3-6x^2+12x-8$

3. $(2x+3y)^3\equiv(2x)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2+(3y)^3$
$$\equiv 8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$$

4. $(ax-by)^3=(ax)^3-3(ax)^2by+3ax(by)^2-(by)^3$
$$=a^3x^3-3a^2bx^2y+3ab^2xy^2-b^3y^3$$

5. Si $x+y=3\ \wedge\ xy=4$, halle x^3+y^3.

Resolución

Reemplazando los datos en

$$(x+y)^3\equiv x^3+y^3+3xy(x+y)$$

$$3^3\equiv x^3+y^3+3(4)(3)\ \rightarrow\ x^3+y^3=-9$$

Corolario

$$(a+b)^3+(a-b)^3=2a(a^2+3b^2)$$

$$(a+b)^3-(a-b)^3=2b(3a^2+b^2)$$

Suma y diferencia de cubos

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)\equiv a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)\equiv a^3-b^3$$

Ejemplos

1. $(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1^3=x^3+1$

2. $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1^3=x^3-1$

3. $(x+2)(x^2-2x+4)\equiv x^3+2^3\equiv x^3+8$

4. $(y^2+5zy+25z^2)(y-5z)\equiv y^3-(5z)^3\equiv y^3-125z^3$

5. $(4x^2+6xy^2+9z^4)(2x-3z^2)\equiv(2x)^3-(3z^2)^3$
$\equiv 8x^3-27z^6$

Trinomio al cubo

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$$

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(a+c)+\underbrace{3c^2(a+b)}_{3c^2(a+b)+6abc}6abc$$

Ejemplos

1. $(x^2+x+1)^3=(x^2)^3+(x)^3+1+3(x^2+x)(x^2+1)(x+1)$
$=x^6+x^3+1+3(x^2+x)(x^2+1)(x+1)$

2. Si $a^3+b^3+c^3=0$,

halle el valor de

$$\frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)(ab+ac+bc)-abc}$$

Resolución

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+$
$+3(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc$

Por dato:

$a^3+b^3+c^3=0$

Luego

$(a+b+c)^3=3(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc$

$$\frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)(ab+ac+bc)-abc}=3$$

3. Si $a+b+c=0$,

halle el equivalente de

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{4abc}.$$

Resolución

Sabemos que

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)$ (I)

Como $a+b+c=0 \rightarrow \begin{cases} a+b=-c \\ a+c=-b \\ b+c=-a \end{cases}$

Luego en (I) se tiene

$0=a^3+b^3+c^3+3(-c)(-b)(-a)$

De donde

$a^3+b^3+c^3=3abc$

$$\rightarrow \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=3$$

$$\rightarrow \frac{a^3+b^3+c^3}{4abc}=\frac{3\cancel{abc}}{4\cancel{abc}}$$

$$\rightarrow \frac{a^3+b^3+c^3}{4abc}=\frac{3}{4}$$

Producto de multiplicar binomios con un término común

$$(x+a)(x+b)\equiv x^2+(a+b)x+ab$$

También

$$(x+a)(x+b)(x+c)\equiv x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$$

Ejemplos

1. $(x+5)(x+7)\equiv x^2+(5+7)x+5\cdot 7\equiv x^2+12x+35$
2. $(x-6)(x+9)\equiv x^2+(9-6)x-6\cdot 9\equiv x^2+3x-54$
3. $(x-10)(x-12)\equiv x^2-(10+12)x+10\cdot 12\equiv x^2-22x+120$
4. $(x+2)(x+5)(x+3)\equiv x^3+(2+5+3)x^2+(2\cdot 5+2\cdot 3+5\cdot 3)x+2\cdot 5\cdot 3\equiv x^3+10x^2+31x+30$
5. $(x-4)(x+6)(x-3)\equiv x^3+(6-4-3)x^2+(-4\cdot 6+4\cdot 3-6\cdot 3)x+4\cdot 6\cdot 3\equiv x^3-x^2-30x+72$

Identidad trinómica (identidad de Argan'd)

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)\equiv x^4+x^2+1$$
$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)\equiv x^4+x^2y^2+y^4$$

En general:

$$(x^{2m}+x^my^n+y^{2n})(x^{2m}-x^my^n+y^{2n})\equiv x^{4m}+x^{2m}y^{2n}+y^{4n}$$

Ejemplos

1. $(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)=x^8+x^4+1$
2. $(x^6+x^3y+y^2)(x^6-x^3y+y^2)=(x^3)^4+(x^3y)^2+y^4\equiv x^{12}+x^6y^2+y^4$
3. $(4x^2+6xy+9y^2)(4x^2-6xy+9y^2)\equiv(2x)^4+[(2x)(3y)]^2+(3y)^4\equiv 16x^4+36x^2y^2+81y^4$

Identidades adicionales (identidad de Gauss)

- $a^3+b^3+c^3-3abc\equiv(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$
- $a^3+b^3+c^3=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$ $-3abc$
- $(a+b)(b+c)(c+a)+abc\equiv(a+b+c)\cdot(ab+bc+ca)$

Ejemplos

1. Si $a^2+b^2+c^2=3(ab+ac+cb)$, halle el equivalente de

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a+b+c)(ab+ac+bc)}.$$

Resolución

En la identidad de Gauss

$$a^3+b^3+c^3-3abc=$$
$$=(a+b+c)(\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{3(ab+ac+bc)}-ab-ac-bc)$$

Entonces

$$a^3+b^3+c^3-3abc=2(a+b+c)(ab+ac+bc)$$

$$\therefore \quad \frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a+b+c)(ab+ac+bc)}=2$$

2. Reduzca la expresión

$$\frac{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}{9(x-y)(y-z)(z-x)}.$$

Resolución

Haciendo

$x-y=m;$

$y-z=n;$

$z-x=p,$

se observa que $m+n+p=0$.

Luego tendremos

$$\frac{m^3+n^3+p^3}{9mnp}$$

Pero si

$m+n+p=0$

$\rightarrow \; m^3+n^3+p^3=3mnp$

de donde

$$\frac{m^3+n^3+p^3}{9mnp}=\frac{3mnp}{9mnp}=\frac{1}{3}$$

Igualdades condicionales

a. Si $a+b+c=0$, se verifican:

- $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$
- $a^3+b^3+c^3=3abc$
- $(ab+bc+ca)^2=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$

Además

$$(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$$

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}$$

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)=\frac{a^7+b^7+c^7}{7}$$

Importante

En $\mathbb{R}$:

$a^3+b^3+c^3=3abc$

$\leftrightarrow \; a+b+c=0 \vee a=b=c$

b. Si $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc \;\wedge\; a;b;c\in\mathbb{R}$

$\rightarrow \; a=b=c$

También si

$a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}=a^nb^n+a^nc^n+b^nc^n \;\wedge\; a;b;c\in\mathbb{R}$

como

$n\in\mathbb{N} \;\rightarrow\; a=b=c$

c. Si $a^2+b^2+c^2=0 \;\rightarrow\; a=b=c=0$,

donde $a;b;c\in\mathbb{R}$

Ejemplos

1. Si $a+b+c=0$, calcule el equivalente de E.

$$E=\frac{a(b+c)^2+b(a+c)^2+c(a+b)^2}{4abc}.$$

Resolución

Como $a+b+c=0 \rightarrow \begin{cases} a+b=-c \\ a+c=-b \\ b+c=-a \end{cases}$

Luego se tiene

$$E=\frac{a(-a)^2+b(-b)^2+c(-c)^2}{4abc}$$

$$\rightarrow E=\frac{a^3+b^3+c^3}{4abc}=\frac{3\cancel{abc}}{4\cancel{abc}}=\frac{3}{4}$$

2. Sean a, b y c números reales tales que

$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc.$

Calcule el valor de M.

$$M=\frac{a^3+bc^2-abc}{(a+b+c)^3}.$$

Resolución

> **Recuerde**
>
> $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$
>
> solo se cumple para números reales cuando $a=b=c$.

$$\rightarrow M=\frac{a^3+a\cdot a^2-a\cdot a\cdot a}{(a+a+a)^3}=\frac{a^3+\cancel{a^3}-\cancel{a^3}}{(3a)^3}$$

$$\therefore\ M=\frac{\cancel{a^3}}{27\cancel{a^3}}=\frac{1}{27}$$

3. Sean x; y números reales tales que

$x^2+y^2=2x-4y-5.$

¿Cuál es el valor de $(3x+2y-1)$?

Resolución

Del dato se tiene

$x^2+y^2=2x-4y-5$

Transponiendo y agrupando convenientemente:

$\underbrace{x^2-2x+1}+y^2+4y+4=0$

$\rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=0$

De donde

$x-1=0 \wedge y+2=0 \rightarrow x=1 \wedge y=-2$

Luego, lo pedido es

$3(1)+2(-2)-1=3-4-1=-2.$

4. Calcule el valor de $M=100^3-99^3-1$.

Resolución

> **Recuerde**
>
> $a+b+c=0 \rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

De la parte pedida

$M=(100)^3+(-99)^3+(-1)^3$

se observa $100+(-99)+(-1)=0$

Luego se tendrá

$M=(100)^3+(-99)^3+(-1)^3=3(100)(-99)(-1)$

$\therefore\ M=3\cdot 99\cdot 100=29\,700$

5. Si $x+y+z=3$, simplifique la expresión

$$M=\frac{(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3}{2(x-1)(y-1)(z-1)}.$$

Resolución

Del dato: $x+y+z=3=1+1+1$

Transponiendo y agrupando convenientemente se tiene:

$(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$

Luego lo pedido

$$M=\frac{(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3}{2(x-1)(y-1)(z-1)}$$

$$\rightarrow M=\frac{3\cancel{(x-1)(y-1)(z-1)}}{2\cancel{(x-1)(y-1)(z-1)}}=\frac{3}{2}$$

6. Si $m+n+p=0$, calcule el valor de

$$\frac{m^5+n^5+p^5}{mnp(mn+np+mp)}.$$

Resolución

De la identidad condicional

$$\frac{m^5+n^5+p^5}{5}=\frac{m^2+n^2+p^2}{2}\cdot\frac{m^3+n^3+p^3}{3}$$

$$\frac{m^5+n^5+p^5}{5}=\frac{-2(mn+mp+np)}{2}\cdot\frac{3mnp}{3}$$

$$\therefore\ \frac{m^5+n^5+p^5}{mnp(mn+np+mp)}=-5$$

7. Halle el equivalente de

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^3c^2},$$

si a; b; c son reales no nulos, tales que $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$.

Resolución

Si $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$ $a; b; c \in \mathbb{R}$.

De la identidad se tiene: $a=b=c$.

Luego lo buscado es equivalente a

$$\frac{a^5+a^5+a^5}{5}\cdot\frac{a^2+a^2+a^2}{a^2a^3a^2}=\frac{3a^5\cdot 3a^2}{5a^7}=\frac{9}{5}$$

8. Halle el valor numérico de la expresión $2x+3y^2+4z^3$

si x; y; z son reales que cumplen lo siguiente: $x^2+y^2+2y-4x+5+9z^2=0$

Resolución

El dato es equivalente a

$$(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)+9z^2=0$$

$$\equiv(x-2)^2+(y+1)^2+9z^2=0$$

$\rightarrow\ x-2=0\ \wedge\ y+1=0\ \wedge\ z=0,$

de donde $x=2,\ y=-1,\ z=0.$

Reemplazando, lo buscado es

$$2(2)+3(-1)^2+4(0)=7$$

9. Sabiendo que

$x+y=-z;$ (I)

$xy+xz+yz=1;$ (II)

reduzca $\dfrac{x^4}{yz}+\dfrac{y^4}{xz}+\dfrac{z^4}{xy}$.

Resolución

Lo pedido es equivalente a

$$\frac{x^5+y^5+z^5}{xyz},$$

pero de (I) $x+y+z=0$.

$\rightarrow\ x^5+y^5+z^5=-5xyz(xy+xz+yz)$

$$\frac{x^5+y^5+z^5}{xyz}=-5(xy+xz+yz)$$

De (II) se concluye

$$\therefore\ \frac{x^5+y^5+z^5}{xyz}=-5$$

10. Sea $\{a; b; c\}\subset\mathbb{R}^+$. Si se cumple que $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=abc(a+b+c)$,

calcule el valor de

$$M=\sqrt{\frac{(a+b)^3}{(2a-c)^3}}.$$

Resolución

Como

$(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2=(ab)(ac)+(ab)(bc)+(ac)(bc)$

entonces

$ab=bc=ac\ \rightarrow\ a=b=c$

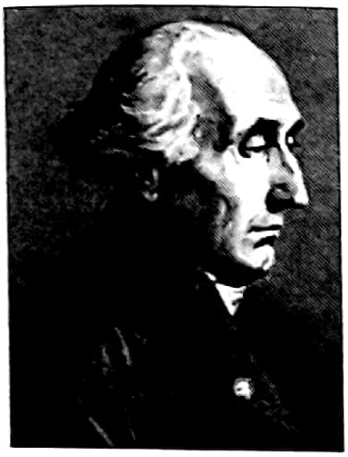
Luego

$$M=\sqrt{\left(\frac{a+a}{2a-a}\right)^3}=\sqrt{\left(\frac{2a}{a}\right)^3}$$

$$\therefore\ M=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$$

BIOGRAFÍA

Joseph-Louis de Lagrange



Nació en Turín el 25 de enero de 1736 y murió en París el 10 de abril de 1813. Fue un matemático y astrónomo italiano de ascendencia francesa que destacó por sus excepcionales contribuciones a la teoría de los números y al análisis de los cuerpos celestes. Su más importante libro fue *Mécanique analytique* (Mecánica analítica), base para todo estudio posterior en ese campo.

Lagrange tuvo una infancia con dificultades económicas, lo que, en sus palabras, lo ayudó en su futura carrera. A temprana edad disfrutó entre sus lecturas de una memoria escrita por el astrónomo inglés Edmond Halley, que le hizo descubrir el interés por las matemáticas.

A los 19 años ya se desempeñaba como profesor en la Escuela Real de Artillería de Turín. Por aquel entonces, le envió una carta a Leonhard Euler con la resolución de un problema que llevaba cincuenta años planteado, llamado problema isoperimétrico. Para solucionarlo empleó una nueva técnica creada por él mismo: el cálculo de variaciones. Euler comprobó la corrección del resultado y la validez del método, instándolo a que termine completamente su trabajo, como se exige cuando se inventa un nuevo sistema de cálculo. El hecho anecdótico es que el propio Euler ya tenía avanzada la solución del mismo problema y prefirió que el joven matemático tuviera más tiempo y confianza para concluir su estudio.

En 1758, con la ayuda de sus discípulos, logra publicar en la Academia de Turín los cinco volúmenes de su primera obra *Miscellanea Taurinensia*, donde se encuentran importantes investigaciones sobre diversos temas como la teoría de la propagación del sonido, la ecuación diferencial general para el movimiento, el cálculo de variaciones aplicado a diferentes casos, el cálculo integral, etc.

Hacia 1761, Lagrange era reconocido como uno de los más grandes matemáticos vivos, pero su salud se empieza a resquebrajar debido a la inmensa cantidad de trabajo a que se sometió durante esos últimos años. En adelante, sufrirá de constantes periodos de melancolía severa.

Tras obtener el premio de la Academia Francesa de Ciencias en 1764 por un trabajo sobre la libración lunar (o las oscilaciones que presenta el globo lunar), en 1766 es llamado por el rey de Alemania Federico II el Grande para que se integre a su corte. De este modo, sucede a Euler en el cargo y da inicio a una etapa muy fructífera que dura veinte años. Durante este tiempo no

solo colabora con alrededor de doscientos artículos para las Academias de Ciencias de Turín, Alemania y Francia, sino que puede redactar su obra fundamental *Mécanique analytique*, que plasma una reformulación de la mecánica clásica de Newton. Respecto a este tema, comentó que la mecánica era una rama de la matemática pura que equivalía a una geometría de cuatro dimensiones: el tiempo sumado a las tres coordenadas del punto en el espacio. Sobre esta obra, el científico irlandés sir William Rowan Hamilton dijo que "[...] solo podría describirse como un poema científico".

Debido a su personalidad tranquila y sencilla siempre estuvo lejos de las intrigas en torno al rey Federico, y a la muerte de este, en 1886, decidió aceptar la invitación del rey Luis XVI para integrarse a la corte francesa. Fue recibido con honores y gran expectativa por sus colegas, pero una vez en Francia, quizá desgastado por su intensa labor científica, sufre un fuerte ataque de melancolía que lo aleja de las matemáticas al menos por dos años, tiempo en el que ni siquiera atina a abrir la copia impresa de *Mécanique analytique* que llevó desde Alemania. Solo la Revolución francesa logra sacarlo de ese estado y es propuesto para presidir la comisión encargada de reformular los pesos y las medidas, adoptándose a sugerencia suya el sistema de subdivisión decimal.

En 1794 fue nombrado profesor e invitado a realizar una serie de conferencias en la École Centrale des Travaux Publics (más tarde rebautizada como École Polytechnique), que fueron recogidas en los libros *Théorie des fonctions analytiques* (Teoría de las funciones analíticas), de 1797, y *Leçons sur le calcul des fonctions* (Lecciones sobre el cálculo de funciones), de 1804. En estas obras, los primeros libros de texto de funciones analíticas, trató de sustituir la base algebraica por la existente y problemática base analítica de cálculo.

En sus últimos años, Napoleón lo distingue haciéndolo senador y en 1810 comienza la revisión completa de *Mécanique analytique* para una nueva edición, trabajo que no llega a completar y que sale al público después de su muerte, en 1813.

Fuente:

http://es.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_de_Lagrange

http://www.astrocosmo.cl/biografi/b-j_lagrange.htm

http://www.britannica.com/EBchecked/topic/327871/Joseph-Louis-Lagrange-comte-de-lEmpire

Problemas RESUELTOS

Problema 1

Simplifique la expresión E.

$$E=\frac{(3x-1)^2+(x+3)^2-10}{10x^2}.$$

Resolución

Utilizando $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

se tiene:

$$E=\frac{(3x)^2-2(3x)+1^2+x^2+2x\cdot 3+3^2-10}{10x^2}$$

$$E=\frac{9x^2-\cancel{6x}+\cancel{1}+x^2+\cancel{6x}+\cancel{9}-\cancel{10}}{10x^2}$$

$$\therefore\ E=\frac{10x^2}{10x^2}=1$$

Problema 2

Calcule $a+b$ si se sabe que

$a-b=\sqrt{8}$ y $ab=7$.

Resolución

Como se conocen $a-b$ y ab, para calcular $a+b$ lo más acertado sería utilizar la identidad de Legendre

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$$

Reemplazando en los datos

$$(a+b)^2-\left(\sqrt{8}\right)^2=4\cdot 7$$

$$\rightarrow\ (a+b)^2=28+8$$

$$\therefore\ (a+b)^2=36$$

De donde

$$a+b=6\ \vee\ a+b=-6$$

Problema 3

Indique el valor simplificado de

$$S=\frac{(8x^2+3)^2-(8x^2-3)^2}{(6x+4)^2-(6x-4)^2}.$$

Resolución

Utilizando la identidad de Legendre se tiene que

$$S=\frac{(8x^2+3)^2-(8x^2-3)^2}{(6x+4)^2-(6x-4)^2}=\frac{\cancel{4}\cdot 8x^2\cdot \cancel{3}}{\cancel{4}\cdot \underset{2}{\cancel{6}}x\cdot 4}$$

$$S=\frac{8x^2}{8x}=x$$

Por lo tanto, S simplificado equivale a x.

Problema 4

Reduzca la expresión

$$\sqrt[4]{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)+1};\ \ x>1.$$

Resolución

> **Recuerde**
> $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$$

$$(x^2-1)(x^2+1)$$

$$(x^4-1)(x^4+1)$$

$$x^8-1$$

Luego se tendrá

$$\sqrt[4]{x^8-\cancel{1}+\cancel{1}}=\sqrt[\cancel{4}]{x^{\cancel{8}}}=x^2.$$

Problema 5

Calcule el valor de M.

$$M=\frac{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}\right)^3-6}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}.$$

Resolución

> **Nota**
> $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

Luego se tiene que

$$M=\frac{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}\right)^3-6}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}$$

$$M=\frac{\overset{3}{\sqrt[3]{4}}+\overset{3}{\sqrt[3]{2}}+3\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}\right)-6}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}$$

$$M=\frac{\cancel{4+2}+3\sqrt[3]{4\cdot 2}\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}\right)-\cancel{6}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}$$

$$M=\frac{3\sqrt[3]{8}\cancel{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}\right)}}{\cancel{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}\right)}}=3\cdot 2=6$$

Problema 6

Si $x^2+9x=2$, ¿cuál es el valor de $(x+6)(x+3)+(x+10)(x-1)$?

Resolución

> **Nota**
> $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

Sea S lo pedido, entonces:

$$S=\underbrace{(x+6)(x+3)}+\underbrace{(x+10)(x-1)}$$

$$S=x^2+(6+3)x+6\cdot 3+x^2+(10-1)x+10(-1)$$

$$S=\underbrace{x^2+9x}+18+\underbrace{x^2+9x}-10$$

Usando el dato: $x^2+9x=2$

$\therefore\ S=2+18+2-10=12$

Problema 7

Si $x^2+3x=-3$, calcule el valor de $\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+2}$.

Resolución

Sea M lo pedido, entonces:

$$M=\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{x(x+2)+(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$\rightarrow\ M=\frac{x^2+2x+x+1}{x^2+3x+2}=\frac{x^2+3x+1}{x^2+3x+2}$$

Del dato: $x^2+3x=-3$

$$\therefore\ M=\frac{-3+1}{-3+2}=\frac{-2}{-1}=2$$

Problema 8

Sean a y b dos números reales tales que

$$a-\frac{b}{3}=4\ \text{ y }\ a^3-\frac{b^3}{27}=24.$$

¿Cuál es el valor de ab?

Resolución

> **Nota**
> $(m-n)^3=m^3-n^3-3mn(m-n)$

En el problema

$$\underbrace{\left(a-\frac{b}{3}\right)^3}_{4}=\underbrace{a^3-\left(\frac{b}{3}\right)^3}_{24}-\cancel{3}\cdot a\frac{b}{\cancel{3}}\underbrace{\left(a-\frac{b}{3}\right)}_{4}$$

$\rightarrow\ 4^3=24-ab\cdot 4$

$\rightarrow\ 4ab=24-64$

$\rightarrow\ 4ab=-40$

$\therefore\ ab=-10$

Problema 9

Sean a y b números reales tales que

$a^2+2b^2=2a-1$.

¿Cuál es el valor de $2a^2+b^2$?

Resolución

Recuerde

si $m^2+n^2+p^2=0$, con $m; n; p \in \mathbb{R}$,
solo se cumple si $m=n=p=0$.

Para nuestro problema:

$$a^2+2b^2=2a-1$$

Transponiendo y agrupando se tiene

$$\underbrace{a^2-2a+1}+2b^2=0$$

$$(a-1)^2+2b^2=0$$

De donde $a=1 \wedge b=0$

$$\therefore\ 2a^2+b^2=2\cdot 1^2+0^2=2$$

Problema 10

Dado que x e y son números reales tales que verifican $9x^2+5y^2+1=12xy+2y$, ¿cuál es el valor de $x+\frac{y}{3}$?

Resolución

De la condición: $9x^2+5y^2+1=12xy+2y$

Transponiendo y agrupando convenientemente

$$\underbrace{9x^2-12xy+4y^2}+\underbrace{y^2-2y+1}=0$$

$$(3x-2y)^2+(y-1)^2=0 \begin{cases} 3x=2y \\ y=1 \end{cases}$$

de donde $x=\frac{2}{3}$

$$\therefore\ x+\frac{y}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$

Problema 11

Si se cumple que

$$\frac{x}{2y}+\frac{2y}{x}=2,$$

calcule el valor de $\left(\frac{x}{y}\right)^8$.

Resolución

De la condición:

$$\frac{x}{2y}+\frac{2y}{x}=2$$

Multiplicando por $2xy$ se tiene

$$x^2+(2y)^2=2x(2y),$$

entonces

$$x^2-4xy+4y^2=0$$

Luego

$$(x-2y)^2=0$$

$$x-2y=0 \rightarrow x=2y$$

Por lo tanto, $\left(\frac{x}{y}\right)^8$ equivale a $\left(\frac{2y}{y}\right)^8=2^8=256$.

Problema 12

Sabiendo que $b^3=1$; $b\neq 1$, simplifique

$$\left(\frac{1}{\frac{b^4}{1+b^5}}\right)^3.$$

Resolución

Lo pedido es equivalente a

$$\left(\frac{b^5+1}{b^4}\right)^3$$

Del dato

$$b^3=1$$

Se deduce

$$b^5=b^3\cdot b^2=1\cdot b^2=b^2$$

$$b^4=b^3\cdot b=1\cdot b=b$$

además

$$b^3-1=0 \rightarrow (b-1)(b^2+b+1)=0$$

Como

$$b\neq 1 \rightarrow b^2+b+1=0 \rightarrow b^2+1=-b$$

de donde

$$\left(\frac{b^5+1}{b^4}\right)^3=\left(\frac{b^2+1}{b}\right)^3=\left(\frac{-b}{b}\right)^3=-1$$

Problema 13

Teniendo en cuenta $n^2=n+1;\ n\in\mathbb{R}^+$, reduzca

$$K=\sqrt[8]{\left(n+\frac{1}{n}\right)\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)\left(n^4+\frac{1}{n^4}\right)+\frac{1}{n^8}}\ .$$

Resolución

La idea inmediata es buscar diferencia de cuadrados.

De la condición $n^2=n+1$, se tiene

$$n=1+\frac{1}{n} \rightarrow n-\frac{1}{n}=1$$

Luego 1 es reemplazado por $n-\frac{1}{n}$, veamos:

$$K=\sqrt[8]{1.\left(n+\frac{1}{n}\right)\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)\left(n^4+\frac{1}{n^4}\right)+\frac{1}{n^8}}$$

$$\underbrace{\left(n-\frac{1}{n}\right)}$$

$$\underbrace{\left(n^2-\frac{1}{n^2}\right)\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$\underbrace{\left(n^4-\frac{1}{n^4}\right)\left(n^4+\frac{1}{n^4}\right)}$$

$$\left(n^8-\cancel{\frac{1}{n^8}}\right)+\cancel{\frac{1}{n^8}}$$

$$\rightarrow K=\sqrt[8]{n^8}$$

$$\therefore\ K=n$$

Problema 14

Si $a^2+b^2+c^2=3 \wedge ab+ac+bc=2$, halle el valor de $Q=(a+2b+3c)^2+(2a+3b+c)^2+(3a+b+2c)^2$.

Resolución

Efectuando y reduciendo términos semejantes se tiene

$$Q=14(a^2+b^2+c^2)+22(ab+ac+bc)$$

Reemplazando datos

$$Q=14(3)+22(2)$$

$$\therefore\ Q=86$$

Problema 15

Sea $P_{(x)}=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

Halle el valor numérico de $P_{(x)}$ para

$$x=\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}$$

Resolución

En el polinomio

$$P_{(x)}=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

Multiplicando como se indica

$$P_{(x)}=(x^3+1)(x^3-1)$$

$$P_{(x)}=x^6-1$$

De la condición

$$x^2=\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^2$$

$$x^2=4+\sqrt{15}+4-\sqrt{15}-2\sqrt{\underbrace{(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})}_{16-15}}$$

$$\therefore\ x^2=8-2(1) \rightarrow x^2=6$$

Reemplazando: $P_{(x)}=(x^2)^3-1=6^3-1=215$

Problema 16

Si $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=2x$,

calcule $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}$; $x \neq 0$.

Resolución

Sea $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}=H$

Multiplicando H con la condición

$$\underbrace{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}_{\text{diferencia de cuadrados}}=2xH$$

$$(a+x)-(a-x)=2xH \rightarrow 2x=2xH$$

$\therefore\ H=1$

Problema 17

Si el grado del polinomio

$$P_{(x)}=(9x^8-1)^n(2x^2+3x^3-1)^{n-2}(3+x^3)^3$$

es 47, determine $\sqrt[10]{\text{coef. principal de } P_{(x)}}$.

Resolución

Grado de $P_{(x)}=8n+3(n-2)+3\cdot 3$

Entonces $\underbrace{11n+3=47}_{\text{condición}} \rightarrow n=4$

Ahora, reemplazando en

$$P_{(x)}=(9x^8-1)^4(3x^3+2x^2-1)^2(x^3+2)^3$$

Finalmente $\sqrt[10]{9^4\cdot 3^2}=\sqrt[10]{3^8\cdot 3^2}=\sqrt[10]{3^{10}}=3$

Problema 18

Determine el grado del producto de multiplicar a los polinomios

$$\underbrace{(x^{1^2}+1)^2(x^{2^2}+2)^3(x^{3^2}+3)^4(x^{4^2}+4)^5\cdots}_{\text{10 multiplicaciones indicadas}}$$

Resolución

Si asumimos que el polinomio producto es $P_{(x)}$, tendremos

$$\text{Grado}\,[P_{(x)}]=1^2\cdot 2+2^2\cdot 3+3^2\cdot 4+4^2\cdot 5+\ldots+10^2\cdot 11$$

$$=2+12+36+80+\ldots+1100$$

Desdoblando

$$=(1^2+1^3)+(2^2+2^3)+(3^2+3^3)+\ldots+(10^2+10^3)$$

Agrupando

$$\underbrace{(1^2+2^2+3^2+\ldots 10^2)}_{\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}}+\underbrace{(1^3+2^3+\ldots+10^3)}_{\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2}$$

$$=5\cdot 11\cdot 7+55^2=55(7+55)$$

$$=55\cdot 62=3410$$

Problema 19

Con $a+2b+3c=1{,}5x$, simplifique

$$\frac{(x-a)^2+(x-2b)^2+(x-3c)^2}{2(a^2+4b^2+9c^2)}.$$

Resolución

Desarrollando los binomios al cuadrado en el numerador

$$\frac{(x^2-2ax+a^2)+(x^2-4bx+4b^2)+(x^2-6cx+9c^2)}{2(a^2+4b^2+9c^2)}$$

Agrupando términos semejantes

$$\frac{3x^2-2x(a+2b+3c)+a^2+4b^2+9c^2}{2(a^2+4b^2+9c^2)}$$

Reemplazando $a+2b+3c=1{,}5x$

se obtiene

$$\frac{\cancel{3x^2}-\cancel{3x^2}+a^2+4b^2+9c^2}{2(a^2+4b^2+9c^2)}=\frac{1}{2}$$

Problema 20

Si $\left(\frac{a}{b}\right)^n+\left(\frac{b}{a}\right)^n=11$,

calcule un valor de $\frac{a^n-b^n}{\sqrt{(ab)^n}}$, con $a>b$.

Resolución

Al tener una sola condición y existir tres incógnitas no queda otra alternativa más que buscar una relación entre el numerador y denominador de lo buscado a partir del dato. Esta característica nacerá de un trinomio cuadrado perfecto. Efectuando

$$\frac{a^n}{b^n}+\frac{b^n}{a^n}=11 \quad \text{multiplicando por } (a^nb^n)$$

$$(a^n)^2+(b^n)^2=11a^n\cdot b^n \quad \text{sumemos } (-2a^nb^n)$$

$$\underbrace{(a^n)^2-2a^nb^n+(b^n)^2}_{\text{es un trinomio cuadrado perfecto}}=9a^nb^n$$

Extrayendo la raíz cuadrada

$$(a^n-b^n)^2=9a^nb^n$$

$$a^n-b^n=\pm 3\sqrt{a^nb^n}$$

Ahora, reemplazando en

$$\frac{a^nb^n}{\sqrt{a^nb^n}}=\frac{\pm 3\sqrt{a^nb^n}}{\sqrt{a^nb^n}}=\pm 3$$

Problema 21

Si x; y; z son tres números reales que verifican la igualdad

$$x^2+y^2+z^2+14=2(x+2y+3z),$$

proporcione el valor de $\frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$.

Resolución

Como la condicional establece que x, y, z son reales, su análisis podrá darse buscando la formación de cuadrados perfectos. En nuestro ejemplo, si agrupamos términos buscando la formación de un trinomio cuadrado perfecto, tendremos:

$$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)+(z^2-6z+9)=0$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=0$$

Llegando a esta forma será fácil interpretar que la única razón de que esta igualdad se justifique (en R) será cuando

$$x-1=0 \wedge y-2=0 \wedge z-3=0$$

$$x=1 \wedge y=2 \wedge z=3$$

Finalmente, reemplazamos en

$$\frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}=\frac{(1)(2)(3)}{1^3+2^3+3^3}=\frac{1}{6}$$

Problema 22

Para $a\cdot b\neq 0$,

simplifique la expresión M.

$$M=\frac{\left[(a+b)^2+(a-b)^2\right]^2-4(a^2-b^2)^2}{(a^3-b^3)^2-(a^3+b^3)^2}.$$

Resolución

Operemos y ordenemos convenientemente, buscando tener la identidad conocida.

Así, por ejemplo, en

$$\underbrace{(a+b)^2+(a-b)^2}_{\text{1.ª identidad de Legendre}} \equiv 2(a^2+b^2)$$

Pero en

$$\underbrace{(a^3-b^3)^2-(a^3+b^3)^2}_{\text{2.ª identidad de Legendre con signo negativo}} \equiv -4a^3b^3$$

Luego, al reemplazar en M tenemos:

$$M=\frac{\left[2\left(a^2+b^2\right)\right]^2-4\left(a^2-b^2\right)^2}{-4a^3b^3}$$

$$\rightarrow\ M=\frac{\overbrace{4\left\{\left(a^2+b^2\right)^2-\left(a^2-b^2\right)^2\right\}}^{2.^a\text{ identidad de Legendre}}}{-4a^3b^3}$$

$$\therefore\ M=\frac{4a^2b^2}{-a^3b^3}=-\frac{4}{ab}$$

Problema 23

Al reducir la expresión

$[(a+2b)^2-(a-2b)^2+a^2+16b^2]-(4b-a)^2$,

indique lo que se obtiene.

Resolución

Como

$$\underbrace{(a+2b)^2-(a-2b)^2}_{2.^a\text{ identidad de Legendre}}\equiv 4a(2b)=8ab,$$

entonces reemplazamos en la expresión inicial

$$\underbrace{\left[8ab+a^2+16b^2\right]}_{\text{es un TCP}}-(4b-a)^2=\underbrace{(a+4b)^2-(4b-a)^2}_{2.^a\text{ identidad de Legendre}}$$

$$=4(4b)a=16ab$$

Problema 24

Con $(x+z+y+z)^2+(x-z+y-z)^2=8z(x+y)$,

reduzca la expresión S.

$$S=\left(\frac{x-y}{z-y}\right)^3+\left(\frac{y-z}{x-z}\right)^3+\left(\frac{2z}{x+y}\right)^3.$$

Resolución

Como la condición es única pero existen tres variables, reduzcamos a fin de visualizar alguna relación.

$$\underbrace{(x+y+2z)^2+(x+y-2z)^2}_{1.^a\text{ identidad de Legendre}}=\underset{\substack{\text{proviene de}\\(x+y+2z)^2-(x+y-2z)^2}}{4(2z)(x+y)}$$

Luego

$$(x+y-2z)^2=0\ \rightarrow\ x+y-2z=0$$

obteniéndose

$$x-y=2(z-y)$$
$$y-z=z-x$$
$$x+y=2z$$

Al reemplazar las equivalencias se tiene

$$S=\left[\frac{2(z-y)}{z-y}\right]^3+\left[\frac{z-x}{x-z}\right]^3+\left[\frac{2z}{2z}\right]^3$$

$$\therefore\ S=(2)^3+(-1)^3+(1)^3=8$$

Problema 25

Con $x^2+y^3=1\ \wedge\ x^4+y^6=2$,

calcule el valor de $\left(x^2-y^3\right)^2-x^4-2x^2y^3-y^6$.

Resolución

Se quiere conocer

$$\left(x^2-y^3\right)^2-\left(x^4+2x^2y^3+y^6\right)$$

$$\rightarrow\ \underbrace{\left(x^2-y^3\right)^2-\left(x^2+y^3\right)^2}_{2.^a\text{ identidad de Legendre}}=-4x^2y^3$$

Por otra parte, elevando al cuadrado la primera condición

$$\underbrace{x^4+y^6}_{2}+2x^2y^3=1\ \rightarrow\ 2x^2y^3=-1$$

Finalmente: $-4x^2y^3=-2\left(2x^2y^3\right)=2$

Por lo tanto, lo pedido resulta ser 2.

Problema 26

Para $x \neq 0$, simplifique la expresión E.

$$E = \frac{x^2+3y^4}{(x+y^2)^3+(x-y^2)^3}$$

Resolución

En el denominador, desarrollemos los binomios:

$$(x+y^2)^3 = x^3+3x^2y^2+3xy^4+y^6$$

$$(x-y^2)^3 = x^3-3x^2y^2+3xy^4-y^6$$

Sumemos

$$(x+y^2)^3+(x-y^2)^3 = 2x^3+6xy^4$$

$$= 2x(x^2+3y^4)$$

Por lo tanto

$$E = \frac{x^2+3y^4}{(x+y^2)^3+(x-y^2)^3} = \frac{x^2+3y^4}{2x(x^2+3y^4)} = \frac{1}{2x}$$

Problema 27

Cumpliéndose que

$ab(a+b)=1;$ (I)

$a^3b^3(a^3+b^3)=\frac{5}{2},$ (II)

calcule el valor de $a^2b^2(a^2+b^2)$.

Resolución

Como $a^2b+ab^2=1$, de la condición (I),

elevemos al cubo

$$\underbrace{a^6b^3+a^3b^6}_{\frac{5}{2}}+3a^3b^3\underbrace{(a^2b+ab^2)}_{1}=1$$

De aquí: $a^3b^3=-\frac{1}{2}$

De (I) elevemos al cuadrado

$$\underbrace{a^4b^2+a^2b^4}+2a^3b^3=1$$

$$a^2b^2(a^2+b^2)+2\left(-\frac{1}{2}\right)=1$$

$$\rightarrow\ a^2b^2(a^2+b^2)=2$$

Problema 28

Sea

$$x=\sqrt[3]{-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}}.$$

Obtenga el valor de x^3+bx+a.

Resolución

En la condición, elevemos al cubo haciendo que

$$\Delta=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3$$

Entonces

$$x=\underbrace{\sqrt[3]{-\frac{a}{2}+\sqrt{\Delta}}}_{m}+\underbrace{\sqrt[3]{-\frac{a}{2}-\sqrt{\Delta}}}_{n}$$

Aquí, elevemos al cubo y desarrollemos en su segundo miembro

$$x^3=\left(-\frac{a}{2}+\sqrt{\Delta}\right)+\left(-\frac{a}{2}-\sqrt{\Delta}\right)+3mn\underbrace{(m+n)}_{x}$$

pero

$$mn=\sqrt[3]{\left(-\frac{a}{2}\right)^2-\Delta}=\sqrt[3]{\left(-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3}$$

$$\rightarrow\ mn=\sqrt[3]{-\left(\frac{b}{3}\right)^3}=-\frac{b}{3}$$

Luego: $x^3=-a+3\left(-\frac{b}{3}\right)x$

$\therefore\ x^3+bx+a=0$

Problema 29

Simplifique la expresión

$$\sqrt[3]{(m^2-n^2)[m^4+m^2n^2+n^4]-3m^2n^2(m+n)(m-n)}.$$

Resolución

Operemos en el radicando

$$\underbrace{(m^2-n^2)[m^4+m^2n^2+n^4]}_{\text{generará una diferencia de cubos}}-3m^2n^2(m^2-n^2)$$

$$\underbrace{(m^2)^3-(n^2)^3-3m^2n^2(m^2-n^2)}_{\text{es el desarrollo de un binomio al cubo}}=(m^2-n^2)^3$$

Luego, al reemplazar se obtiene

$$\sqrt[3]{(m^2-n^2)^3}=m^2-n^2$$

Problema 30

Si $a^3=b^3$; $a\neq b$, halle el valor de $S=\dfrac{ab}{(a-b)^2}$.

Resolución

De la condición $a^3-b^3=0$,

$$(a-b)[a^2+ab+b^2]=0$$

Esta igualdad se verificaría si

$$a-b=0 \rightarrow a=b \vee a^2+ab+b^2=0$$

Por dato, esta solución queda denegada

Adicionando $-3ab$:
$a^2-2ab+b^2=-3ab$
$(a-b)^2=-3ab$

Como $a\neq b \rightarrow (a-b)^2=-3ab$

Al reemplazar en S se obtiene:

$$S=\frac{ab}{(a-b)^2}=\frac{ab}{-3(ab)}=-\frac{1}{3}$$

Problema 31

Con $x^3+y^3+z^3=3$, reduzca la expresión N.

$$N=\frac{(x+y+z)^3-2}{9+(x^3+y^3+z^3)^3(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Resolución

Recuerde

$$(x+y+z)^3\equiv\underbrace{x^3+y^3+z^3}_{3}+3(x+y)(y+z)(z+x)$$

Entonces, si llamamos $(x+y)(x+z)(z+y)=A$,
se tiene $(x+y+z)^3=3+3A$,
que al sustituir en lo requerido

$$\frac{3+3A-2}{9+3^3\cdot A}=\frac{1+3A}{9(1+3A)}=\frac{1}{9}$$

$$\therefore\ N=\frac{1}{9}$$

Problema 32

Con $abc=0 \wedge a+b+c=1$, halle el valor de

$$K=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

Resolución

Como $a+b+c=1$, elevemos al cuadrado

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1$$

Llamemos α a: $ab+bc+ca$,

luego se tiene $a^2+b^2+c^2=1-2\alpha$.

Asimismo, elevando al cubo $a+b+c=1$

$$a^3+b^3+c^3+3\underbrace{(a+b+c)}_{1}\underbrace{[ab+bc+ca]}_{\alpha}-\underbrace{3abc}_{0}=1,$$

Luego se tiene $a^3+b^3+c^3=1-3\alpha$.

Reemplazando en K se tiene

$$\left(\frac{1-2\alpha}{2}\right)-\left(\frac{1-3\alpha}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\ K=\frac{1}{6}$$

Problema 33

Con $a^3+b^3+c^3=0$,

reduzca la expresión E.

$$E=\frac{3abc}{a(b-a)+b(c-b)+c(a-c)}.$$

Resolución

Planteando la identidad gaussiana

$$\underbrace{a^3+b^3+c^3}_{0}-3abc\equiv(a+b+c)x$$

donde

$$x=a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$$

De aquí: $3abc=(a+b+c)(-x)$

Reemplazando en la expresión, se tiene

$$E=\frac{(a+b+c)(-x)}{\underbrace{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}_{-x}}=a+b+c$$

$\therefore\ E=a+b+c$

Problema 34

Sabiendo que

$a+b+c=x\ \wedge\ ab+bc+ca=x^2$,

exprese

$T=(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3-3abc$

en términos de x.

Resolución

Al desarrollar la expresión

$$T=3x^3+3(a+b+c)x^2+3(a^2+b^2+c^2)x+$$
$$+(a^3+b^3+c^3)-3abc$$

De (I) al cuadrado:

$$a^2+b^2+c^2+\underbrace{2(ab+bc+ca)}_{x^2}=x^2$$

$\rightarrow\ a^2+b^2+c^2=-x^2$

De modo que la expresión queda reducida a

$$T=3x^3+3(x)x^2+3(-x^2)x+a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$T=3x^3+\cancel{3x^3}-\cancel{3x^3}+a^3+b^3+c^3-3abc$$

Pero

$$a^3+b^3+c^3-3abc\equiv\underbrace{(a+b+c)}_{x}\underbrace{[a^2+b^2+c^2}_{-x^2}-$$
$$-\underbrace{(ab+ac+bc)}_{x^2}]=-2x^3$$

Entonces

$$T=3x^3+(-2x^3)$$

$\therefore\ T=x^3$

Problema 35

Se cumple que

$x+b+c=3a$ (I)

$y+c+a=3b$ (II)

$z+a+b=3c,\ abc\neq 0$ (III)

donde a; b; c son diferentes.

Determine el valor de

$$S=\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{a(a^2-bc)+b(b^2-ca)+c(c^2-ab)}$$

con $abc\neq 0$.

Resolución

Sumando las condiciones (I), (II) y (III)

$$x+y+z+2(a+b+c)=3(a+b+c)$$

$$x+y+z=a+b+c$$

Usando la identidad de Gauss en

$$S=\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{a^3+b^3+c^3-3abc}$$

$$S=\frac{\cancel{(x+y+z)}[x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx]}{\cancel{(a+b+c)}[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca]}$$

$$\rightarrow S=\frac{2\{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\}}{2\{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\}}$$

$$\rightarrow S=\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$$

De

(I)-(II) : $x-y=4(a-b)$

(II)-(III) : $y-z=4(b-c)$

(III)-(I) : $z-x=4(c-a)$

Reemplazando en S se obtiene

$$S=\frac{[4(a-b)]^2+[4(b-c)]^2+[4(c-a)]^2}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}=16$$

Problema 36

Si el polinomio $P_{(x;\,y;\,z)}=(x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2$

se anula en $\left(\frac{1}{a};\ \frac{1}{b};\ \frac{1}{c}\right)$,

reduzca la expresión $S=\dfrac{2a^3-b^3-c^3}{ab+bc+ca}$.

Resolución

Como $P_{(x;\,y;\,z)}=2(xy+yz+zx)$,

por condición

$$P_{\left(\frac{1}{a};\,\frac{1}{b};\,\frac{1}{c}\right)}=2\left\{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right\}=0,$$

de donde $a+b+c=0$.

Por identidad condicional

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

Ahora acondicionemos la expresión

$$S=\frac{3a^3-(a^3+b^3+c^3)}{ab+bc+ca}=\frac{3a^3-3abc}{ab+bc+ca}$$

$$\therefore\ S=\frac{3a(a^2-bc)}{\underbrace{a(b+c)}_{-a^2}+bc}=\frac{-3a\cancel{(bc-a^2)}}{\cancel{(bc-a^2)}}=-3a$$

Problema 37

Si se cumple que

$$\sqrt[9]{\frac{a^2}{b^2}}+\sqrt[9]{\frac{a}{c}}+\sqrt[9]{\frac{b^2}{c^2}}=0,$$

determine el valor de

$$\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{c}}\right)^2.$$

Resolución

Usando la identidad condicional se tiene

$$\left(\sqrt[9]{\frac{a^2}{b^2}}\right)^3+\left(\sqrt[9]{\frac{a}{c}}\right)^3+\left(\sqrt[9]{\frac{b^2}{c^2}}\right)^3=3\cdot\sqrt[9]{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b^2}{c^2}}$$

Operando

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{a}{c}}+\left(\sqrt[3]{\frac{b}{c}}\right)^2=3\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{c}}$$

De donde

$$\underbrace{\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^2-2\sqrt[3]{\frac{a}{c}}+\left(\sqrt[3]{\frac{b}{c}}\right)^2}_{\text{TCP}}=0$$

$$\rightarrow\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}-\sqrt[3]{\frac{b}{c}}\right)^2=0\ \rightarrow\ \frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

Entonces

$$\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{c}}\right)^2=\left(\frac{\frac{b}{c}}{\frac{b}{c}}\right)^2=1^2=1$$

Problema 38

Si $a^{12}+b^{12}+c^{12}=8$ (I)

además

$$\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{abc}=\frac{-6}{a+b+c},\qquad \text{(II)}$$

calcule $a^6+b^6+c^6$.

Resolución

De la condición (II) se tiene

$$\frac{2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}{abc}=\frac{-6}{a+b+c}$$

Luego

$$\underbrace{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}_{a^3+b^3+c^3-3abc \text{ (por la identidad de Gauss)}}=-3abc$$

de donde $a^3+b^3+c^3=0$.

Haciendo que

$$a^3=x;\ b^3=y;\ c^3=z$$

y reestructurando en función a estas letras.

$$x^4+y^4+z^4=8 \qquad \text{(I)}$$

$$x+y+z=0 \qquad \text{(II)}$$

$$x^2+y^2+z^2=??$$

Recordemos que según la condicional (II)

$$(x^2+y^2+z^2)^4=4(x^4+y^4+z^4)^2$$

$$\rightarrow\ (x^2+y^2+z^2)^4=4\cdot 8^2=4^4$$

$$\therefore\ x^2+y^2+z^2=4$$

Problema 39

Si el polinomio

$$P_{(x)}=(x^2+m^2+n^2)^2+\lambda(x^4+m^4+n^4)$$

se anula para $x=-m-n$, halle el valor de λ.

Resolución

De $x=-m-n\ \rightarrow\ x+m+n=0$

Recordando el producto notable condicional:

Si $x+m+n=0$

$$\rightarrow\ (x^2+m^2+n^2)^2=2(x^4+m^4+n^4)$$

$$\rightarrow\ P_{(x)}=2(x^4+m^4+n^4)+\lambda(x^4+m^4+n^4)=0$$

$$\rightarrow\ P_{(-m-n)}=\underbrace{(\lambda+2)}_{0}(x^4+m^4+n^4)=0$$

$$\therefore\ \lambda=-2$$

Problema 40

Sabiendo que

$$ab-1=\sqrt[3]{10}(\sqrt[3]{10}-1)\ \wedge\ (a^2+b^2-1)^3=10,$$

halle el valor de

$$K=\sqrt[4]{-7+(a+b)^4-(a-b)^4}.$$

Resolución

Usamos identidades de Legendre:

$$K=\sqrt[4]{-7+8ab(a^2+b^2)}$$

De las condiciones

$$ab=1-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{100}\ \wedge\ a^2+b^2=1+\sqrt[3]{10}$$

$$\rightarrow\ ab(a^2+b^2)=\underbrace{(1+\sqrt[3]{10})(1-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{100})}_{\text{suma de cubos}}=$$

$$=1+10=11$$

$$\rightarrow\ K=\sqrt[4]{-7+8(11)}=\sqrt[4]{81}$$

$$\therefore\ K=3$$

Problema 41

Si $x+y+z=1$;

$$x^3+y^3+z^3=4,$$

calcule

$$E=\frac{1}{x+yz}+\frac{1}{y+xz}+\frac{1}{z+xy}.$$

Resolución

Analizando por partes

$$x+yz=x\cdot 1+yz=x(x+y+z)+yz$$

$$=x^2+(y+z)x+yz=(x+y)(x+z)$$

Análogamente

$$y+xz=(y+x)(y+z)$$

$$z+xy=(z+x)(z+y)$$

Luego tenemos

$$E=\frac{1}{(x+y)(x+z)}+\frac{1}{(y+x)(y+z)}+\frac{1}{(z+x)(z+y)}$$

$$E=\frac{(y+z)+(x+z)+(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$E=\frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{2\cdot 1}{(x+y)(y+z)(z+x)} \qquad \text{(I)}$$

Cálculo de $(x+y)(y+z)(z+x)$

$(x+y+z)^3=1^3 \rightarrow \underbrace{x^3+y^3+z^3}+3(x+y)(x+z)(y+z)=1$

$\rightarrow 4+3(x+y)(x+z)(y+z)=1$

$\rightarrow (x+y)(x+z)(y+z)=-1 \qquad \text{(II)}$

Reemplazando (II) en (I)

$$E=\frac{2}{-1}=-2$$

Problema 42

Partiendo de

$x^{-1}-y^{-1}=4(x-y-1)^{-1}$;

$y^{-1}-z^{-1}=4(y-z-1)^{-1}$;

$z^{-1}-x^{-1}=4(z-x-1)^{-1}$

calcule el valor de R.

$$R=\frac{\sqrt[3]{(x+y)^9+(y+z)^9+(z+x)^9}}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Resolución

Analizando por partes

$$x^{-1}-y^{-1}=4(x-y-1)^{-1} \rightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{4}{x-y-1}$$

$\rightarrow \underbrace{(y-x)}\underbrace{(x-y-1)}=4xy$

$\rightarrow -(y-x)^2-(y-x)=4xy$

$\rightarrow x-y=(y-x)^2+4xy$

$\rightarrow x-y=x^2-2xy+y^2+4xy=x^2+2xy+y^2$

$\rightarrow (x+y)^2=(x-y)$

$\rightarrow (x+y)^3=(x-y)(x+y)=x^2-y^2$

$\rightarrow (x+y)^3=x^2-y^2 \qquad \text{(I)}$

Análogamente, de las otras dos condiciones tenemos

$(y+z)^3=y^2-z^2 \qquad \text{(II)}$

$(z+x)^3=z^2-x^2 \qquad \text{(III)}$

Sumando (I)+(II)+(III)

$(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3=0$

$\rightarrow (x+y)^9+(y+z)^9+(z+x)^9=3(x+y)^3(y+z)^3(z+x)^3$

Reemplazando

$$R=\frac{\sqrt[3]{3(x+y)^3(y+z)^3(z+x)^3}}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\sqrt[3]{3}$$

Problema 43

Halle el valor numérico de

$$E=(x+y)^{\frac{2}{3}}-(x-y)^{\frac{2}{3}},$$

cuando

$$x=1{,}5a+0{,}5\frac{b^2}{a};$$

$$y=1{,}5b+0{,}5\frac{a^2}{b};$$

$ab=32.$

Resolución

Sean

$$x=\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}\frac{b^2}{a};$$

$$y=\frac{3}{2}b+\frac{1}{2}\frac{a^2}{b},$$

$$\rightarrow \quad x+y=\frac{1}{2}\left(\frac{3ab(a+b)+a^3+b^3}{ab}\right)$$

$$\rightarrow \quad x+y=\frac{(a+b)^3}{2ab}$$

Análogamente

$$x-y=\frac{(b-a)^3}{2ab}$$

Reemplazando

$$E=\left[\frac{(a+b)^3}{2ab}\right]^{\frac{2}{3}}-\left[\frac{(b-a)^3}{2ab}\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{(a+b)^2}{\left(\sqrt[3]{2ab}\right)^2}-\frac{(b-a)^2}{\left(\sqrt[3]{2ab}\right)^2}$$

Reemplazando el valor de $ab=32$

$$E=\frac{(a+b)^2}{16}-\frac{(b-a)^2}{16}=\frac{\cancel{4}ab}{\cancel{16}}=\frac{32}{4}$$

$\therefore \quad E=8$

Problema 44

Sean $\{a; b; c\} \subset \mathbb{R}$.

Calcule $\dfrac{a^3}{b^2c}$ si se cumple que

$a^2+2b^2=2a(b+c)-2c^2$.

Resolución

Multiplicamos por 2 la condición

$$2a^2+4b^2-4ab-4ac+4c^2=0$$

Agrupando convenientemente se tiene

$$\underbrace{(a^2+4b^2-4ab)}_{0}+\underbrace{(a^2-4ac+4c^2)}_{0}=0$$

$$(a-2b)^2+(a-2c)^2=0$$

$\rightarrow \quad a=2b,\ a=2c$

Luego, lo pedido es

$$\frac{a^3}{b^2c}=\frac{a^2\cdot a}{b^2\cdot c}=\frac{(2b)^2\cdot(2c)}{b^2\cdot c}=8$$

Test 4

1. Si $a+b=5 \wedge ab=2$,
¿cuál es el valor de a^2+b^2?

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

2. Al desarrollar $(2x^2+1)^2+(3x^2-x)^2$ se obtuvo $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$.
¿Cuál es el valor de $a+b$?

A) 2 B) 5 C) 7
D) 9 E) 13

3. ¿Cuál es el valor de $2M+3N$?, donde
$M=(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$;
$N=(\sqrt{8}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{8}-\sqrt{2})^2$.

A) 80 B) 96 C) 63
D) 54 E) 37

4. Simplifique la expresión
$3(\sqrt{3}+1)(\sqrt[4]{9}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt[4]{25}+\sqrt{2})$.

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 9

5. ¿Cuál es el equivalente simplificado de M?
$M=\sqrt[4]{3(2^2+1)(2^4+1)+1}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

6. Indique el valor de verdad con respecto a cada proposición.
I. $(a+b)^2=a^2+b^2$
II. $a(bc)=(ab)(ac)$
III. $(a+b)^3=a^3+b(3a^2+3ab+b^2)$

A) FFF B) FFV C) VVV
D) FVV E) VFF

7. Si se cumple que $x+4=5$; $xy=2$;
calcule el valor de $(x-y)$.

A) -1 B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{14}$
D) 2 E) $\sqrt{19}$

8. ¿Cuál es el valor de $=\frac{2p}{m}$ si se cumple que $(m+p)^2+(m-p)^2=4mp$?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

9. Si $a^3+b^3=7 \wedge a^2b+ab^2=\frac{1}{3}$,
¿cuál es el valor de $(a+b)^6$?

A) 10 B) 100 C) 1000
D) 64 E) 729

10. Reduzca la expresión
$\sqrt[3]{3xy(x+y)+(x+y)(x^2+y^2-xy)}$.

A) $x+y$ B) $x-y$ C) x
D) y E) xy

11. Si se tiene que $a+b+c=0$, ¿cuál es el equivalente de $\dfrac{a^3+b^3-(a+b)^3}{ab}-3c$?

A) 0 B) 3 C) $-2c$
D) $2c$ E) 1

12. Sean a; b; c números reales tales que $a^2+5b^2+9c^2=4ab+6bc$.

¿Cuál es el valor de $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{6c}{a}$?

A) 5 B) 6 C) 8
D) 14 E) 9

Claves

1 B	3 A	5 D	7 A	9 D	11 A
2 C	4 E	6 B	8 B	10 A	12 B

Problemas PROPUESTOS

Nivel I

1. Simplifique la expresión

$$\frac{(x+1)^2+(x+2)^2+2x}{(x-1)^2+(x-2)^2+14x}.$$

A) $3x+1$ B) 2 C) $\frac{x}{2}$
D) 1 E) 0

2. Sean a; b; c números reales tales que $\frac{b+a}{b+c}=\frac{c}{a}$.

¿Cuál es el valor de $a+b+c$ si $a\neq c$?

A) 1 B) a C) b
D) c E) 0

3. Si se cumple que $\frac{a}{b}+\frac{9b}{a}=6$,

¿cuál es el valor de $\frac{a^3-27b^3}{a^3+27b^3}$?

A) 1 B) 0 C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) -1

4. Si $a+\frac{1}{b}=1$ y $b+\frac{1}{c}=1$,

¿cuál es el valor de abc?

A) 0 B) -1 C) 1
D) 2 E) 1/2

5. Si $x_n=\underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3}}}}}_{n \text{ radicales}}$,

¿cuál es el valor de $x_{30}^4-x_{29}^2-6x_{29}$?

A) 9 B) 27 C) 18
D) 3 E) 6

6. Sean a; $b\in\mathbb{N}$, tal que $4(a+b)+(a-b)^2=(a+b)^2$.

Calcule el valor de $a+a^3+a^5+b^2+b^4+b^6$.

A) 42 B) 36 C) 126
D) 142 E) 150

7. Si $b=ka \wedge a^2+b^2=c^2$, ¿cuál es el valor de

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^2}{c^2}?$$

A) k^2 B) k^2-1 C) k^2+1
D) k E) 1

8. Calcule el valor de $\frac{(ax+1)(by+1)}{(ax-1)(by-1)}$.

Considere $1+abxy=0$.

A) 1 B) 0 C) -1
D) $\frac{a}{b}$ E) $\frac{b}{a}$

9. Si se cumplen las siguientes condiciones:

I. $(x-1)A=x^2-1,\ x\neq 1$
II. $(x+2)B=x^2+4x+4,\ x\neq -2$
III. $(x^2+x+1)C=x^3-1,\ x\in\mathbb{R}$

Indique lo correcto.

A) $A=B$ B) $B=2C$ C) $B+1=C$
D) $A+1=B$ E) $C+1=B$

10. Si $a+b=4$, ¿cuál es el valor numérico de

$$\frac{(a+1)(a-1)+(b+1)(b-1)}{7-ab}?$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) -1 E) 3

11. Si $P_{(x)}=x^3-3x^2+3x-5$, ¿cuál es el valor numérico de $P_{(x)}$ en $\sqrt[3]{7}+1$?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) −4

12. Si $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$,
además $E=x^3-3x+6$, ¿cuál es el valor de E^2+1?

A) 50 B) 26 C) 37
D) 17 E) 101

13. Si $x+\dfrac{4}{x}=2$, calcule
el valor numérico de $\dfrac{x^6}{x^2-2x+5}$

A) 64 B) 0 C) 16
D) 9 E) 81

14. ¿Cuál es el valor numérico que toma la expresión
$f_{(x)}=(x^2-10x+24)(x^2+12x+35)(x^2+x)$
si se cumple que $x^2+x-1=0$?

A) 777 B) 665 C) 0
D) 779 E) 879

15. ¿Qué se puede afirmar de la siguiente expresión?
$\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}$; $n\in\mathbb{Z}^+$.

A) Es un número impar.
B) Es un número par.
C) Es un número primo.
D) Es un número irracional.
E) Siempre es múltiplo de 3.

16. ¿Cuál es el valor numérico de x^4+y^4 cuando $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$?

A) 16 B) 12 C) 10
D) 14 E) 8

17. Si se cumple que $4x^2+1=2x$, ¿cuál es el valor numérico de $\dfrac{x^6+1}{x^6}$?

A) 16 B) $\dfrac{64}{65}$ C) 62
D) 65 E) $\dfrac{65}{64}$

18. Si $a+b=0$, simplifique la expresión
$\dfrac{a^3+b^3+3b^2+3b}{b+1}$, $b\neq-1$.

A) 1 B) $3a$ C) a
D) $-a$ E) $-3a$

19. Calcule el valor reducido de
$\left(\dfrac{253\cdot247+9}{15\,625}\right)^2-1$.

A) 3 B) 24 C) 8
D) 35 E) 15

20. Si $a^2+c^2=2b(a+c-b)\ \wedge\ abc\neq0$,
además a; b; c son números reales, ¿cuál es el valor numérico de $\dfrac{ab+ac+bc}{2b^2}$?

A) 1 B) $\dfrac{3}{2}$ C) 2
D) 3 E) 4

Nivel II

21. Halle el equivalente reducido de

$$\frac{(ax+by)^2+(ay-bx)^2}{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}.$$

A) ab B) xy C) $abxy$
D) -1 E) 1

22. Si $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{x+y}$, determine el valor de

$$\sqrt{\frac{x}{y^3}}-\frac{2}{x+y},\ x>0.$$

A) 0 B) -1 C) 1
D) 2 E) $\frac{1}{y}$

23. Sean x; y números reales tales que

$x^2+2y^2+2=2x-2xy$,

entonces el valor de $\frac{3xy}{x^2+y^3}$ es

A) -2 B) -1 C) 1
D) 2 E) $\frac{1}{4}$

24. Si se verifica que

$$\frac{a+b+c}{a+b-c}-\frac{a+b-c}{a+b+c}=\frac{b+c-a}{a+c-b}-\frac{a-b+c}{b+c-a},$$

determine el valor de $\frac{a^2}{a^2+b^2-c^2}$.

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$
D) 2 E) -2

25. Calcule el equivalente simplificado de

$$\sqrt[9]{(m^6-m^3n^3+n^6)(m^6-n^6)[m^6+m^3n^3+n^6]+n^{18}}.$$

A) 0 B) m^2 C) m^3
D) m^6 E) n^9

26. Si $n+\frac{1}{n}=1$,

calcule el valor de $\left(n^3-\frac{1}{n^3}\right)^3$.

A) -1 B) 3 C) 0
D) -2 E) 2

27. Si $xy+xz+xw+yz+yw+zw=0$, reduzca M.

$$M=\frac{(x^2+y^2)(x^2+z^2)-(y^2+w^2)(z^2+w^2)}{(x+y+z+w)^2}.$$

A) 1 B) x^2w^2 C) x^2-w^2
D) y^2+z^2 E) y^2-z^2

28. Sabiendo que a; b; c son números reales positivos que cumplen

$$\frac{1}{a}(b+c)+\frac{1}{b}(a+c)+\frac{1}{c}(a+b)=6,$$

simplifique la expresión $\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+abc}$.

A) 1 B) 3 C) 9
D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{27}$

29. Si $r^4-r^2+1=0$, calcule el valor de $r^7-\frac{1}{r^7}$.

A) i B) $-2i$ C) 0
D) 7 E) -7

30. A partir de

I. $x+y+z=1$;

II. $x^2+y^2+z^2=9$;

III. $x^3+y^3+z^3=1$,

determine el valor de $\dfrac{4}{x^4+y^4+z^4}$.

A) $\dfrac{1}{33}$ B) $\dfrac{2}{33}$ C) $\dfrac{4}{33}$

D) $\dfrac{16}{33}$ E) $\dfrac{64}{33}$

31. Sean a, b y c números reales que verifican las igualdades

I. $a^4+b^4+c^4=98$;

II. $(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2=49$;

III. $ab+ac+bc=-7$.

Determine el valor de E.

$$E=\frac{(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3}{abc}.$$

A) -24 B) -12 C) -6

D) 8 E) 9

32. Si $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=0$,

reduzca la expresión $\dfrac{a^4+b^4+c^4}{a^3+b^3+c^3+abc}$.

A) $a+b+c$

B) $ab+ac+bc$

C) abc

D) $a^2+b^2+c^2$

E) 1

33. Sean a, b y c tres números reales que cumplen la igualdad $a^3+b^3+c^3=3abc$, y además $a+b+c\neq 0$.

Calcule el valor de $\dfrac{(ab^2c^3)^2}{a^{12}+b^{12}+c^{12}}$.

A) a B) b^2 C) c^3

D) abc E) $\dfrac{1}{3}$

34. Simplifique

$$\frac{[(y-x)+(z-x)+(p-x)+q][(y+2x)+(z+2x)+(p+2x)+(q+x)]}{y^2+z^2+p^2+q^2}$$

si

$(x+y+z+P+q+x)^2=5^2(x^2+y^2+z^2+P^2+q^2)$.

A) 0 B) 5 C) 25

D) x^2 E) -25

35. Basándose en las siguientes condiciones

I. $\left[\left(\dfrac{x}{\sqrt{y}}\right)^3+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)^3\right]^2+\left[\left(\dfrac{x}{\sqrt{y}}\right)^3-\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)^3\right]^2=$

$=10(x^3+y^3)$;

II. $x^6-y^6=6x^4y^4\sqrt[3]{x^3+y^3}$,

calcule el valor de $\dfrac{3}{x^{-3}-y^{-3}}$.

A) 1 B) -1 C) 3

D) $\dfrac{3}{2}xy$ E) $\dfrac{3}{2xy}$

36. Si cumple que $a+b+c=0$, calcule el valor reducido de

$$\frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^4-3(a^4+b^4+c^4)^2}}{a^4+b^4+c^4}.$$

A) -11

B) -7

C) 1

D) 7

E) 11

37. De acuerdo con las condiciones

I. $m^2+n^2+p^2=16$;

II. $mn+np+pm=-6$;

III. $mnp=4$,

calcule el valor de

$m^4n+n^4p+p^4m+m^4p+n^4m+p^4n$.

Considere $(m+n+P)^{-1}<0$.

A) 64 B) −56 C) 192
D) 128 E) 256

38. Dado el conjunto $\{a, b, c, x, y, z\} \subset \mathbb{R}$, si se verifica

$(a+b+c)^2=3[ab+ac+bc-x^2-y^2-z^2]$,

calcule el valor de

$$\left(x^3+y^3+z^3+3^3\right)\left[\frac{a^7+b^7+c^7}{(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)}\right].$$

A) 0 B) 1 C) 3
D) 9 E) $27abc$

39. Sabiendo que

I. $x^2+y^2+z^2=5,\widehat{6}$;

II. $x^3+y^3+z^3=7$;

III. $xyz=-2$;

determine uno de los valores de

$$\frac{x^3+y^3+(z-2)^3}{xy}-3z.$$

A) 0 B) −6 C) −2
D) 4 E) 2

40. Si $a+b+c=1$, halle el valor de S.

$$S=\frac{1-6abc}{2(a^3+b^3+c^3)-3(a^2+b^2+c^2)}.$$

A) −1 B) 1 C) $\frac{1}{2}$
D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{1}{6}$

41. Si $x^3+1=0 \wedge x\neq -1$, calcule el valor de

$$A=\frac{(x-1)^3}{x^2}-\frac{(x-1)^3}{x}.$$

A) 2 B) 0 C) 1
D) −1 E) −2

42. Si $\frac{a-b}{c}=\frac{b+c}{a} \wedge a+c>1$, determine el valor de

$$M=\left(\frac{a-2b-c}{b}\right)^2+\left(\frac{a-b-2c}{c}\right)^2+\left(\frac{b+c-2a}{a}\right)^2.$$

A) 3 B) 1 C) 1/3
D) 2 E) 0

43. Simplifique la expresión

$$\frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}+\frac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}.$$

A) 1 B) $a+b+c$ C) 0
D) abc E) 3

44. Halle el equivalente reducido de

$$\left(\frac{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}{\left(x^2-(y+z)x+yz\right)(z-y)}\right)^2 \text{ si } x\neq y\neq z.$$

A) 9 B) 4 C) 25
D) 2 E) 27

45. Si $a^2+bc+bd+cd=0$, calcule el valor de

$$\frac{(a+b)(a+c)(a+d)}{(c+b)(b+d)(c+d)}.$$

A) 1 B) −2 C) −1
D) 2 E) 0

46. A partir de $\frac{4}{a}+\frac{4}{b}=\frac{4^2}{(a+b)^2-(a-b)^2}$,

determine el valor de M.

$M=4ab+3(a^2+b^2)-2(a^3+b^3)+(a-b)^2$

A) 0 B) 2 C) −1
D) 1 E) 4

47. Si $a+\sqrt{ac}=b+\sqrt{bc}$, además $a\neq b \wedge abc\neq 0$, calcule el valor de S.

$S=\frac{a}{\sqrt{bc}}+\frac{b}{\sqrt{ac}}+\frac{c}{\sqrt{ab}}$

A) 0 B) 1 C) −3
D) 3 E) $\frac{3}{2}$

48. Sabiendo que se cumple

I. $\frac{a^2c+b^2a+c^2b}{12}=abc$;

II. $\frac{b^2c+c^2a+a^2b}{18}=abc$,

calcule el valor de

$\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(c+a)^2}{ac}$.

A) $\frac{3}{2}$ B) 24 C) $\frac{2}{3}$
D) 36 E) 32

49. Si $\frac{x-z}{z-y}+\frac{z^2}{(x+y)(z-y)}=1$,

halle el valor de

$\left(\frac{z-x}{y}\right)^2+\left(\frac{x+y}{z}\right)^2+\left(\frac{z-y}{x}\right)^2$.

A) 0 B) 3 C) 1
D) −1 E) 12

50. Si $a+b=\sqrt[3]{3} \wedge a-b=\sqrt[3]{2}$, determine el valor de $4ab(a^2+3b^2)(b^2+3a^2)$.

A) 4 B) 15 C) 5
D) 10 E) 16

51. Si $a+b+c=a^2+b^2+c^2=1$,

calcule el valor de $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^4+b^4+c^4-4abc}$.

A) 0 B) 2 C) −1
D) 1 E) −2

52. Si $\frac{x+1}{x-1}=-\frac{1}{y}$, calcule el valor de L.

$L=\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(x+y)^2}+\frac{(x+y)^2}{(1+x^2)(1+y^2)}$

A) 2 B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

53. Siendo $a+b+c=0$, halle el equivalente de M.

$M=\frac{(a^2+b^2+c^2)(2a^3-b^3-c^3)}{a^4+b^4+c^4}$

A) a B) $-2a$ C) $2a$
D) $-a$ E) $3a$

54. Halle el valor numérico del polinomio

$E_{(x)}=x^6-6x^4+9x^2$,

para $x=\sqrt[3]{\sqrt{7}-\sqrt{6}}+\sqrt[3]{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$.

A) 28 B) 14 C) 12
D) 18 E) 16

55. Reduzca la expresión T.

$$T=\sqrt{4(a^2+b^2+c^2)-(a+b-c)^2-(a-b+c)^2-(b+c-a)^2}$$

Considere $a+b+c=2p$, además $p>0$.

A) p B) $2p$ C) $4p$
D) $2(p-a)$ E) $2(p-b)$

56. Si $x^3+\frac{1}{y^3}=y^3+\frac{1}{z^3}=1$,

calcule el valor de $(xyz)^{102}-1$.

A) 2 B) -1 C) 0
D) 1 E) -2

57. Reduzca la expresión M.

$$M=\frac{(x^2+x+1)^2-2(x^4+x^2+1)+(x^2-x+1)^2}{(x^2+\sqrt{3})^2+2(x^4-3)+(x^2-\sqrt{3})^2}$$

A) x B) 1 C) x^2
D) x^{-2} E) x^{-1}

58. Dadas las siguientes condiciones

I. $a^2+b^2+c^2=2$;

II. $(a+b+c)(1+ab+ac+bc)=32$,

calcule el valor de $a+b+c$.

A) 4 B) 16 C) 64
D) $\sqrt[3]{32}$ E) 2

59. Siendo $ab=\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{10}+1$; $a+b-1=\sqrt[3]{10}$,

calcule el valor de $3ab(a+b)$.

A) 4 B) 16 C) 33
D) $\sqrt[3]{32}$ E) 2

60. Sabiendo que $a+4b+9c=0$, calcule el equivalente reducido de S.

$$S=\frac{(a-2b)^2}{ab}+\frac{(2b-3c)^2}{bc}+\frac{(3c-a)^2}{ac}$$

A) abc B) -36 C) 14
D) -14 E) $a+b+c$

CLAVES
Problemas propuestos

NIVEL I

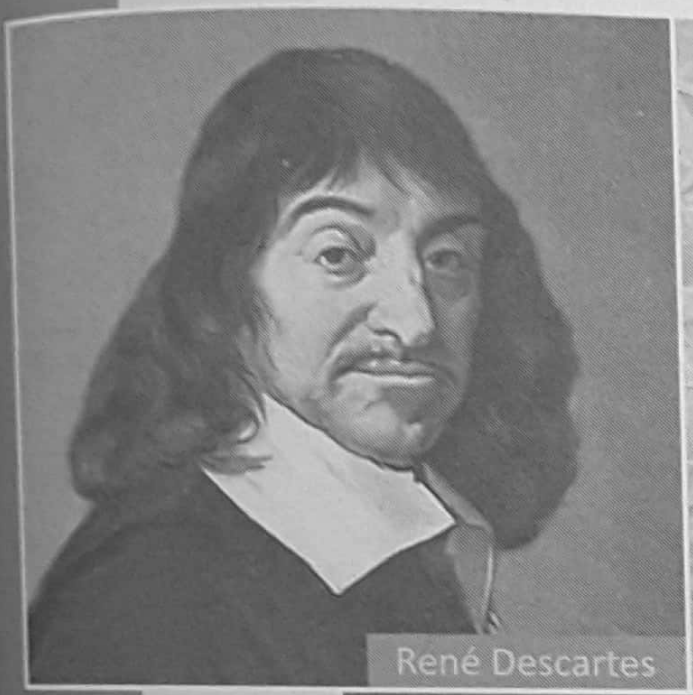
1 D	5 A	9 D	13 A	17 D
2 E	6 C	10 C	14 D	18 E
3 B	7 C	11 C	15 A	19 E
4 B	8 C	12 E	16 D	20 B

NIVEL II

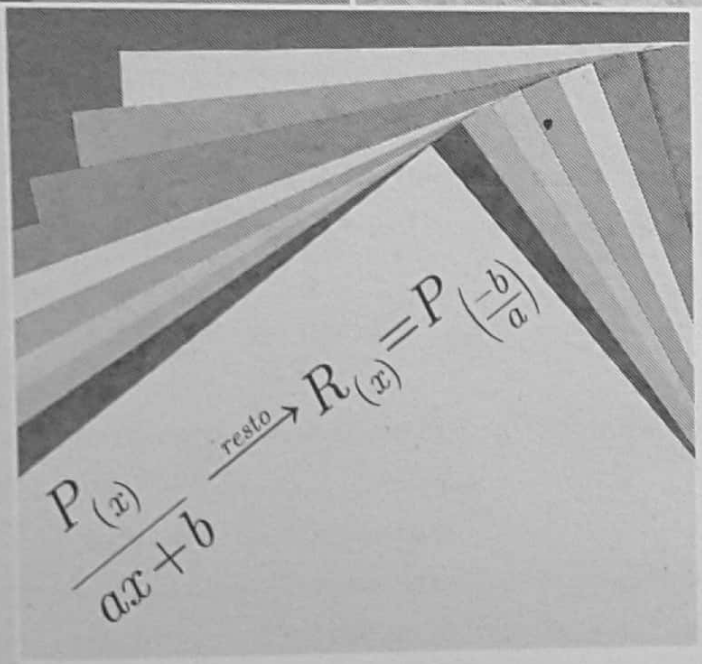
21 E	29 A	37 D	45 C	53 E
22 A	30 C	38 D	46 B	54 A
23 A	31 A	39 B	47 D	55 B
24 B	32 A	40 A	48 D	56 C
25 B	33 E	41 D	49 B	57 D
26 C	34 C	42 A	50 C	58 A
27 C	35 B	43 E	51 D	59 C
28 C	36 C	44 A	52 D	60 B

Capítulo

V


René Descartes

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & & +1 & x-2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +2x^2 & & & x^2+2x+4 \\ \cline{1-4}
 & 2x^2 & & +1 & \\
 & -2x^2 & +4x & & \\ \cline{2-4}
 & & 4x & +1 & \\
 & & -4x & +8 & \\ \cline{3-4}
 & & & 9 &
\end{array}
$$



División algebraica de polinomios

CAPÍTULO V

DIVISIÓN ALGEBRAICA DE POLINOMIOS

Objetivos

- Aplicar la identidad fundamental de la división en la búsqueda de residuos.
- Aplicar la regla de Ruffini y el método de Horner para dividir polinomios.
- Calcular residuos de manera inmediata sin efectuar la división.
- Hallar la expansión aproximada de una expresión mediante su equivalente polinomial.

Introducción

La división algebraica de polinomios se origina con la división entera de números naturales; como se verá, hay una relación entre las propiedades de ambas divisiones.

Se debe tener presente que los matemáticos Guillermo Horner y Paolo Ruffini fueron quienes desarrollaron y esquematizaron los métodos para efectuar dicha operación con los polinomios.

La división de polinomios tiene múltiples aplicaciones, por ejemplo:

I. En la obtención de los factores de un polinomio, mediante los divisores binómicos.

II. En la resolución de ecuaciones polinomiales, mediante la aproximación (aplicación de la regla de Ruffini).

III. En el desarrollo de las series de potencias como:

$$P_{(x)}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n;$$

que mediante divisiones sucesivas, por la regla de Ruffini, es posible escribirlas de la forma:

$$P_{(x)}=b_0(x-\alpha)^n+b_1(x-\alpha)^{n-1}+b_2(x-\alpha)^{n-2}+\ \ldots\ +b_m,$$

que en aritmética se conoce como el cambio de base.

Las operaciones algebraicas de polinomios son análogas a las operaciones de los números naturales. De este modo, vemos que la adición y multiplicación de números naturales generan números naturales; en cambio, la sustracción y la división de los números naturales no siempre generan números naturales. Del mismo modo, en la división de polinomios, las operaciones de adición, sustracción y multiplicación de polinomios han generado siempre otros polinomios llamados suma, diferencia o producto, respectivamente. Es decir, dentro de los polinomios son siempre posibles estas tres operaciones enteras; sin embargo, en dos polinomios $P_{(x)}$ y $h_{(x)}$ no siempre será posible hallar otro polinomio $q_{(x)}$ que multiplicado por $h_{(x)}$ genere $P_{(x)}$.

Es decir, dados los polinomios $P_{(x)}$ y $h_{(x)}$, no siempre existe $q_{(x)}$, de tal modo que se cumple:

$$\boxed{P_{(x)} \equiv h_{(x)} q_{(x)}}$$

Como es fácil darse cuenta, para un polinomio $P_{(x)}$ no siempre existe otro polinomio $P_{(x)}^{-1}$ tal que $P_{(x)} \cdot P_{(x)}^{-1} \equiv 1$, salvo que $P_{(x)}$ sea una constante no nula.

Para resolver el problema de la división algebraica de polinomios, se ha procedido de manera análoga a la división entera de números naturales, agregando la definición de residuo. .

Así, dividimos 425 entre 72

$$\begin{array}{r|l} 425 & 72 \\ \hline 65 & 5 \end{array}$$

cociente de los naturales

De tal modo $\boxed{425 = 72 \cdot 5 + 65}$

Esta división en el conjunto de los naturales no está bien definida, pero definiéndola como una división entera con un cierto residuo es posible efectuarla.

Veamos otro ejemplo: dividir 57 entre 429 no es posible en los naturales ni siquiera con residuo, puesto que 57 es menor que 429; del mismo modo, dividir $2x^3+3x-1$ entre x^7-2x+3 no será posible, puesto que el grado del primer polinomio (3) es menor que el segundo (7), imposibilitando esta operación.

En el presente capítulo efectuaremos operaciones de división algebraica de polinomios, para ello debemos tener en cuenta los conceptos teóricos que detallamos a continuación.

DIVISIÓN ALGEBRAICA DE POLINOMIOS

DEFINICIÓN

Dados dos polinomios $D_{(x)}$ y $d_{(x)}$ de grados m y n, donde $(m \geq n)$, llamados dividendo y divisor. Dividir $D_{(x)}$ entre $d_{(x)}$ consiste en hallar otros dos polinomios $q_{(x)}$ y $R_{(x)}$ llamados cociente y residuo, donde el grado de $R_{(x)}$ es menor que n o bien $R_{(x)} \equiv 0$, de tal manera que estos polinomios cumplan la identidad fundamental de la división algebraica.

Identidad fundamental

Dados los polinomios dividendo $(D_{(x)})$, divisor $(d_{(x)})$, cociente $(q_{(x)})$ y residuo $(R_{(x)})$, condicionados por la definición, se cumple:

$$\boxed{D_{(x)} \equiv d_{(x)} \cdot q_{(x)} + R_{(x)}}$$

Ejemplos

1. Divida $x^2 - 6x + 10$ entre $x - 4$.

   Veamos

$$\begin{array}{l|l} x^2-6x+10 & x-4 \\ \hline & \boxed{x-2} \\ 2 & \end{array}$$

cociente

residuo

$\rightarrow x^2 - 6x + 10 \equiv (x-4)(x-2) + 2$

2. Divida $x^3 + 8$ entre $x^2 - 2x + 4$.

   Veamos

$$\begin{array}{l|l} x^3-8 & x^2-2x+4 \\ \hline & \boxed{x+2} \\ 0 & \end{array}$$

cociente

residuo

$\rightarrow x^3 + 8 \equiv (x^2 - 2x + 4)(x+2)$

Importante

Dado el dividendo $D_{(x)}$ y el divisor $d_{(x)}$, los polinomios cociente $q_{(x)}$ y residuo $R_{(x)}$ son únicos.

CLASES DE DIVISIÓN

De acuerdo a su resto o residuo, podemos clasificar en:

División exacta $(R_{(x)} \equiv 0)$

La llamaremos así cuando el resto o residuo sea un polinomio idénticamente nulo. Luego

$$\boxed{D_{(x)} \equiv d_{(x)} \cdot q_{(x)}}$$

Ejemplos

1. Al dividir $x^2 - 5x - 14$ entre $x - 7$,

   vemos que $x^2 - 5x - 14 \equiv (x-7)(x+2)$

   $\rightarrow q_{(x)} = x + 2;\ R_{(x)} \equiv 0$

2. Al dividir $x^3 - 8$ entre $x - 2$,

   sabemos que $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

   $\rightarrow q_{(x)} = x^2 + 2x + 4;\ R_{(x)} \equiv 0$

División inexacta $(R_{(x)} \neq 0)$

Llamada también división no exacta. Toma este nombre cuando el residuo no es idénticamente nulo.

Ejemplos

1. Divida $x^2 - 5$ entre $x + 2$.

   Resolución

   Mediante las equivalencias algebraicas es fácil darse cuenta de la igualdad.

   $x^2 - 5 \equiv (x+2)(x-2) - 1$

   Luego, identificando mediante la identidad fundamental de la división, se tiene que $(x-2)$ es el cociente y -1 su resto.

Nota

$$D_{(x)} \equiv d_{(x)}q_{(x)} + R_{(x)}$$

Como $d_{(x)} \not\equiv 0$, se tendrá la equivalencia siguiente:

$$\frac{D_{(x)}}{d_{(x)}} \equiv q_{(x)} + \frac{R_{(x)}}{d_{(x)}}$$

2. Al dividir x^3-3x+4 entre x^2+x-1 tendremos

$$\underbrace{x^3-3x+4}_{D_{(x)}} \equiv \underbrace{(x^2+x-1)}_{d_{(x)}}\underbrace{(x-1)}_{q_{(x)}}+\underbrace{3-x}_{R_{(x)}}$$

De manera equivalente

$$\frac{x^3-3x+4}{x^2+x-1} \equiv x-1+\frac{3-x}{x^2+x-1}$$

PROPIEDADES DE GRADOS

1. El grado del cociente es equivalente a la diferencia del grado del dividendo y el grado del divisor.

$$\text{Grad}_{(q)} = \text{Grad}_{(D)} - \text{Grad}_{(d)}$$

Vemos

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

Ejemplo

$$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$$

Entonces

$$\begin{aligned}\text{Grad}_{(q)} &= \text{Grad}_{(D)} - \text{Grad}_{(d)}\\ &= 5 - 3\\ &= 2\end{aligned}$$

2. El grado máximo que puede tomar el residuo será uno menos que el grado del divisor. Si el divisor es de grado n, el residuo a lo más podrá ser de grado $(n-1)$.

$$\text{Grad}_{\text{máx}(R)} = \text{Grad}_{(d)} - 1$$

Ejemplo

Dada la división $\dfrac{x^5+2x^4-x-2}{x^3+5x^2-x+1}$

como el divisor es de grado 3, entonces el grado del resto será como máximo 2.

CASOS QUE SE PRESENTAN EN LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS

División de monomios

Recordando la propiedad (1), grado del cociente, se tiene:

$$\frac{a_0x^m}{b_0x^n} \equiv \frac{a_0}{b_0}x^{m-n};\ b_0 \neq 0$$

Ejemplos

Divida

- $\dfrac{28x^{15}}{7x^8} \equiv \dfrac{28}{7}x^{15-8} \equiv 4x^7$
- $\dfrac{16x^{23}}{32x^9} \equiv \dfrac{16}{32}x^{23-9} \equiv \dfrac{1}{2}x^{14}$

División de un polinomio entre un monomio

Se utilizará la propiedad distributiva.

$$\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}$$

Ejemplos

1. $\dfrac{3x^3-x^2+5x}{x}=\dfrac{3x^3}{x}-\dfrac{x^2}{x}+\dfrac{5x}{x}=3x^2-x+5$

2. $\dfrac{16x^{15}+6x^{10}-3x+9}{4x^3}$

Resolución

Aplicando la propiedad distributiva

$$\frac{16x^{15}}{4x^3}+\frac{6x^{10}}{4x^3}+\frac{-3x+9}{4x^3}$$

$$\underbrace{4x^{12}+\frac{3}{2}x^7}_{q_{(x)}}+\frac{\overbrace{-3x+9}^{R_{(x)}}}{\underbrace{4x^3}_{d_{(x)}}}$$

De donde podemos concluir

$q_{(x)}=4x^{12}+\dfrac{3}{2}x^7 \rightarrow$ cociente

$R_{(x)}=-3x+9 \rightarrow$ residuo

Nota

Podemos expresar $\dfrac{-3x+9}{4x^3}$ como $\dfrac{-3x}{4x^3}+\dfrac{9}{4x^3}$ porque no dejan como resultado polinomios que puedan sumarse en el cociente. Esto se debe a que el grado de $-3x+9$ es menor al grado de $4x^3$.

División de polinomios de más de un término

La división de polinomios de esta forma solo estará definida para una variable tomada como referencia, la cual se llama variable ordenatriz.

Teoremas

De la identidad fundamental de división entera:

$$P_{(x)}\equiv d_{(x)}q_{(x)}+R_{(x)}$$

I. Si $x=1 \rightarrow P_{(1)}=d_{(1)}q_{(1)}+R_{(1)}$
Se obtiene la suma de coeficientes.

II. Si $x=0 \rightarrow P_{(0)}=d_{(0)}q_{(0)}+R_{(0)}$
Se obtiene el término independiente.

Ejemplos

1. En la siguiente identidad de polinomios

$$x^3-3x+4\equiv(x^2+x-1)(x-1)+3-x$$

podemos notar que:

$D_{(x)}=x^3-3x+4 \rightarrow D_{(1)}=2$

$d_{(x)}=x^2+x-1 \rightarrow d_{(1)}=1$

$q_{(x)}=x-1 \rightarrow q_{(1)}=0$

$R_{(x)}=3-x \rightarrow R_{(1)}=2$

Luego: $D_{(x)}\equiv d_{(x)}q_{(x)}+R_{(x)}$.

Para verificar el teorema I hacemos

$x=1$: $D_{(1)}=d_{(1)}q_{(1)}+R_{(1)}$.

$\rightarrow 2=1\cdot 0+2$

Efectivamente $2=2$

2. En la división $ax^4+2x^3+bx^2-10x+c$ entre $2x+3$, halle el valor de $a+b+c$ si la suma de coeficientes del cociente es -5 y el resto es 15.

Resolución

De la identidad fundamental de la división

$$ax^4+2x^3+bx^2-10x+c\equiv(2x+3)q_{(x)}+15$$

Para $x=1$

$\rightarrow\ a+2+b-10+c=(2+3)\underbrace{q_{(1)}}_{-5}+15$

$\rightarrow\ a+b+c-8=-25+15$

$\rightarrow\ a+b+c=-2$

Criterios para dividir polinomios

Dados los polinomios en una sola variable, estos deben ser ordenados en forma descendente.

Ejemplo

Antes de efectuar la división

$$\frac{45x-22x^3-2x^4+7}{3x^3-1}$$

previamente se ordenará así:

$$\frac{-2x^4+22x^3+45x+7}{3x^3-1}$$

MÉTODOS PARA DIVIDIR POLINOMIOS ALGEBRAICAMENTE

Antes de dividir polinomios, veamos un ejemplo de la división entera de números enteros. Debemos tener en cuenta cada uno de los pasos para hacer una analogía con la división de polinomios.

Ejemplo

Divida 47 497 entre 295.

$$\begin{array}{r|l} 47497 & 295 \\ \cline{2-2} -295 & 161 \\ \hline 1799 & \\ -1750 & \\ \hline 00497 & \\ 295 & \\ \hline 202 & \end{array} \quad \rightarrow \quad 47\,497=295\cdot 161+202$$

Nota

Para los polinomios, cada cifra de los números naturales es comparable con un término del polinomio.

Método clásico o división normal

Método realizado en el nivel escolar. Veámoslo más claramente mediante ejemplos:

1. Divida $6x^2+5x-3$ entre $3x+1$.

Resolución

Por ser el primer ejemplo, se desarrollará indicando cada paso a dar.

Veamos: $6x^2+5x-3 \,\underline{|\,3x+1}$

I. Ordenar descendentemente los polinomios dividendo $(D_{(x)})$ y divisor $(d_{(x)})$.

II. Se divide el primer término de $D_{(x)}$ entre el primer término de $d_{(x)}$, es decir, $6x^2 \div 3x$, obteniéndose $2x$, que a su vez será el primer término del cociente.

$$\begin{array}{l|l} 6x^2+5x-3 & 3x+1 \\ \cline{2-2} & 2x \end{array}$$

III. Se multiplica $2x$ por cada uno de los términos de $d_{(x)}$ y los resultados se ubican debajo de $D_{(x)}$, pero con signos cambiados. Luego se suma:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{6x^2}+5x-3 & 3x+1 \\ \cline{2-2} -\cancel{6x^2}-2x & 2x \\ \hline \quad -3x-3 & \end{array}$$

IV. Si el grado del aparente residuo es mayor o igual al del divisor, la división aún continúa, como en el paso anterior.

$$
\begin{array}{r|l}
6x^2+5x-3 & 3x+1 \\
\hline
-6x^2-2x & 2x+1 \\
3x-3 & \\
-3x-1 & \\
\hline
-4 &
\end{array}
$$

Este proceso seguirá hasta que el resto sea de grado menor al divisor; de ser así, la división ha terminado.

Por lo tanto, ya se tendrá tanto el cociente como el resto.

$q_{(x)}=2x+1$ y $R_{(x)}=-4$

2. Divida x^3+2x-2 entre $x-1$.

Resolución

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+2x-2 & x-1 \\
\hline
-x^3+x^2 & x^2+x+3 \\
x^2+2x-2 & \\
-x^2+x & \\
\hline
3x-2 & \\
-3x+3 & \\
\hline
1 &
\end{array}
$$

De donde: $q_{(x)}=x^2+x+3$; $R_{(x)}=1$.

3. Divida $4x^4+2x^3-6x^2-10x$ entre $2x+3$.

Resolución

$$
\begin{array}{r|l}
4x^4+2x^3-6x^2-10x+0 & 2x+3 \\
\hline
-4x^4-6x^3 & 2x^3-2x^2-5 \\
-4x^3-6x^2 & \\
4x^3+6x^2 & \\
\hline
-10x+0 & \\
10x+15 & \\
\hline
15 &
\end{array}
$$

De donde: $q_{(x)}=2x^3-2x^2-5$; $R_{(x)}=15$.

4. Divida $x^7+x^6+x^4+2x^3+2x^2+2$ entre x^3+x^2+1.

Resolución

$$
\begin{array}{r|l}
x^7+x^6+x^4+2x^3+2x^2+2 & x^3+x^2+1 \\
\hline
-x^7-x^6-x^4 & x^4+2 \\
2x^3+2x^2+2 & \\
-2x^3+2x^2-2 & \\
\hline
\end{array}
$$

De donde: $q_{(x)}=x^4+2$; $R_{(x)}=0$.

5. Mediante este método es suficiente ordenar, aunque no completar. Así divida $6x^{56}+4x^{41}+15x^{16}-3x^{15}+17x^2+x-15$ entre $3x^{15}+2$.

Resolución

Usaremos la división normal

$$
\begin{array}{r|l}
6x^{56}+4x^{41}+15x^{16}-3x^{15}+17x^2+x-15 & 3x^{15}+2 \\
\hline
-6x^{56}-4x^{41} & 2x^{41}+5x-1 \\
15x^{16}-3x^{15} & \\
-15x^{16}-10x & \\
-3x^{15}-10x+17x^2+x-15 & \\
-3x^{15}+2 & \\
\hline
17x^2-9x-13 &
\end{array}
$$

De donde: $q_{(x)}=2x^{41}+5x-1$; $R_{(x)}=17x^2-9x-13$

Método de coeficientes separados

Es un caso similar a la división normal, con la diferencia que aquí solo se trabajan con los coeficientes. Lo que se exige es que los polinomios, tanto dividendo y divisor, sean completos y estén ordenados en forma descendente.

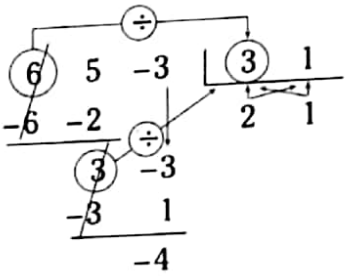
Usaremos el mismo ejemplo utilizado en el caso anterior para que el lector forme su propio criterio.

Ejemplos

1. Divida $6x^2+5x-3$ entre $3x+1$.

Resolución

Como se observa, solo se ubicarán los coeficientes.



Para nuestro problema:

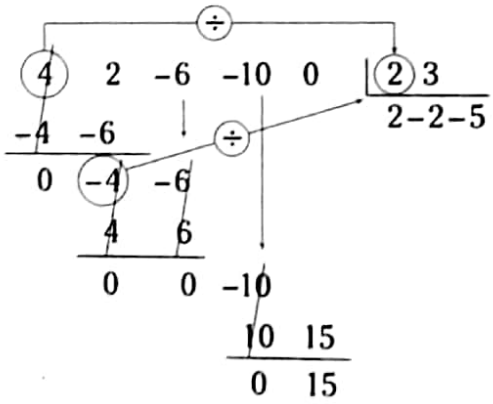
$$\text{Grad}_{(q_{(x)})}=2-1=1$$

Luego, el cociente es $2x+1$ y su resto es simplemente -4.

2. Divida $4x^4+2x^3-6x^2-10x$ entre $2x+3$.

Resolución

Usando únicamente los coeficientes.



Como el cociente y el residuo son también polinomios completos y están ordenados en forma descendente, entonces

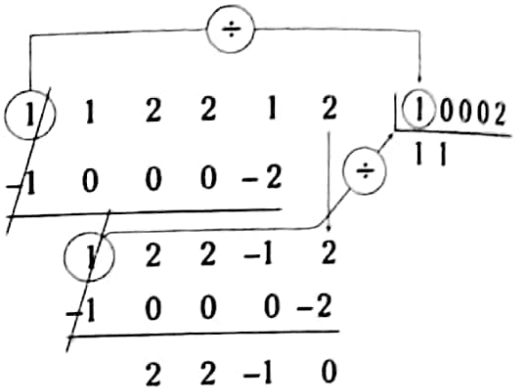
$$q_{(x)}=2x^2-2x-5;\quad R_{(x)}=15.$$

3. Divida $x+2x^3+x^5+2x^2+x^4+2$ entre x^4+2.

Resolución

Ordenando: $\dfrac{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+2}{x^4+2}$

Usando solo los coeficientes:



Luego

$$q_{(x)}=x+1;\ R_{(x)}=2x^3+2x^2-x.$$

Método de Guillermo Horner

Es un método sistematizado de coeficientes separados. Este método es más estructurado para efectuarse mediante algoritmos de computadora. Para dividir por este método hay que tener en cuenta lo siguiente:

I. Todos los polinomios, tanto dividendo, divisor, cociente y residuo, deben ser polinomios completos y ordenados con respecto a la variable en referencia.
Si faltase algún término, se completará pero con coeficiente cero.
Así, si $D_{(x)}=5x^2+3x^5-7x+9$
se debe escribir como
$$D_{(x)}=3x^5+0x^4+0x^3+5x^2-7x+9.$$

II. Se utilizarán solo los coeficientes, es decir 3; 0; 0; 5; -7; 9.

III. Se distribuyen los coeficientes tanto del dividendo, divisor, cociente y residuo en el esquema de Horner.

Así

$$\frac{4x^3-7x+3}{2x^2+x}$$

se debe escribir

$$\frac{4x^3+0x^2-7x+3}{2x^2+x+0}$$

Estructura del esquema de Horner

	d	dividendo
con signo cambiado	i v i s o r	
	cociente	residuo

En el esquema

2	4	0	−7	3
−1				
0				
	cociente		resto	

se separan tantos términos como indica el grado del divisor

Para su mejor comprensión, desarrollaremos el procedimiento mediante un ejemplo donde se detallarán sus pasos.

Ejemplos

1. Divida $6x^2+5x-3$ entre $3x+1$.

Resolución

Como los polinomios dividendo y divisor ya son completos y están ordenados descendentemente, los llevamos directamente al esquema de Horner.

Esquema de Horner

3	6	5	−3
−1		−2	−1
		3	
	2	1	−4

I. Se divide 6÷3 obteniéndose 2, que será el primer término del cociente.

II. Se multiplica 2 por cada uno de los términos del divisor a los cuales se les cambió de signo y el resultado se ubica en la fila siguiente, una columna más atrás.

III. Se suman los elementos de la segunda columna y el resultado se divide nuevamente entre 3 (primer coeficiente del divisor); el resultado obtenido es el segundo término del cociente.

IV. El proceso anterior se realiza hasta que la última de las multiplicaciones haya llegado a la última columna.

V. Para el residuo solo se suman de columna a columna.

VI. Recordando que el cociente y el residuo son también polinomios completos y ordenados en forma descendente, se tiene

$q_{(x)}=2x+1$ y $R_{(x)}=-4$.

2. Divida $4x^3-7x+3$ entre $x+2x^2$.

Resolución

I. Completando y ordenando en forma descendente se tendrá:

$$\frac{4x^3+0x^2-7x+3}{2x^2+x+0}$$

II. Teniendo en cuenta el esquema de Horner,

Esquema de Horner

2	4	0	−7	3
−1		−2	0	
0		−2	1	0
	2	−1	−6	3
	x		x	

luego $q_{(x)}=2x-1$; $R_{(x)}=-6x+3$.

3. Divida

$12x^5-x^4+3x^2+5$ entre $3x^3+2x^2-1$.

Resolución

Completando el dividendo y el divisor, en el esquema de Horner se tiene:

3	12	−1	0	3	0	5
−2		−8	0	4		
0		−9	6	0	−3	
1			6	−4	0	2
	4	−3	2	3	−3	7
	coef. del cociente			coef. del residuo		

Luego $q_{(x)}=4x^2-3x+2$; $R_{(x)}=3x^2-3x+7$.

Regla de Paolo Ruffini

Se considera como un caso particular del método de Horner; se utilizará cuando el divisor es de primer grado o transformable a esta forma.

Presentamos un ejemplo que inicialmente fue efectuado por el método de Horner, para ver la comparación con la regla de Ruffini.

Ejemplo

Divida $3x^4-5x+2$ entre $x+2$.

Por el método de Horner

1	3	0	0	−5	2
−2		−6	12	−24	58
		−6	12	−29	
	3	−6	12	−29	60

Luego

$q_{(x)}=3x^3-6x^2+12x-29$; $R_{(x)}=60$.

En general

Al dividir

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$$

entre $ax+b$; $ab\neq 0$,

se presentarán dos casos.

Caso I

Cuando $a=1$, se tendrá:

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n}{x+b}$$

Cuyo esquema será

	a_0	a_1	a_2 ...	a_n
		$-a_0b$		
$x=-b$				$-bc_{n-1}$
	c_0	c_1	$c_2 \ldots c_{n-1}$	$a_n-bc_{n-1}=R$

Donde $c_0=a_0$; $c_1=a_1-a_0b$, y así sucesivamente.

Por lo tanto

$$q_{(x)}=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\ldots+c_{n-1};$$

$$R_{(x)}=a_n-bc_{n-1}$$

Ejemplos

1. Efectúe la división.

$$\frac{6x^3+x^2+3x}{x-2}$$

Resolución

I. $x-2=0 \rightarrow x=2$

II. Llevando al esquema de Ruffini

		+	+	
	6	1	3	0
$x=2$		12	26	58
	6	13	29	58
	x^2	x		

Luego

$q_{(x)}=6x^2+13x+29;$

$R_{(x)}=58.$

2. Divida

$$\frac{3x^5-10x^2+12x-x^3+15}{x-3}.$$

Resolución

I. $x-3=0 \rightarrow x=3$

II. Usando el esquema (previamente ordenado)

	3	0	−1	−10	12	15
$x=3$		9	27	78	204	648
	3	9	26	68	216	663

Luego

$q_{(x)}=3x^4+9x^3+26x^2+68x+216;$

$R_{(x)}=663.$

3. Divida

$$\frac{2x^{28}-14x^7+2x^{21}-5}{x^7-3}.$$

Resolución

Haciendo un cambio de variable $x^7=y$

se tiene $\dfrac{2y^4-14y+2y^3-5}{y-3}$.

Utilizando el esquema

		+	+	+	+
	2	2	0	−14	−5
$y=3$		6	24	72	174
	2	8	24	58	169

$\rightarrow q_{(y)}=2y^3+8y^2+24y+58$

Como $y=x^7$, reemplazando se tiene:

$q_{(x)}=2x^{21}+8x^{14}+24x^7+58;\ R_{(x)}=169$

Caso II

Cuando $a \neq 1$, se tendrá:

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n}{ax+b}$$

Identidad fundamental

$$D_{(x)} \equiv (ax+b)q_{(x)}+R_{(x)}=\left(x+\frac{b}{a}\right)(aq_{(x)})+R_{(x)}$$

Se observa que el cociente queda multiplicado por a. Para corregir esta deficiencia, se dividirá cada término del aparente cociente entre a.

		+	+		+
	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
$x=-\frac{b}{a}$		$-\frac{b}{a}a_0$	$-\frac{b}{a}c_1$		$-\frac{b}{a}c_n-1$
	a_0	c_1	c_2	$\ldots$ c_{n-1}	R resto
$\div a$	$\frac{a_0}{a}$	$\frac{c_1}{a}$	$\frac{c_2}{a}$	$\ldots$ $\frac{c_{n-1}}{a}$	

coef. del cociente

Luego

$$q_{(x)}=\frac{a_0}{a}x^{n-1}+\frac{c_1}{a}x^{n-2}+\frac{c_2}{a}x^{n-2}\frac{c_2}{a}x^{n-2}+\ldots+\frac{c_{n-1}}{a}$$

$$R_{(x)}=a_n-\frac{b}{a}\cdot c_{n-1}$$

Ejemplos

1. Divida $6x^3+x^2+3x$ entre $2x+1$.

Resolución

I. $2x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2}$

II. En el esquema de Ruffini

		+	+	+
	6	1	3	0
$x=-\frac{1}{2}$		−3	1	−2
	6	−2	4	−2
	x^2	x		

Luego

$$2\cdot q_{(x)}=6x^2-2x+4;\ R_{(x)}=-2.$$

Dividiendo entre 2:

$$\rightarrow q_{(x)}=\frac{6x^2}{2}-\frac{2x}{2}+\frac{4}{2}$$

Por lo tanto, $q_{(x)}=3x^2-x+2$ es el cociente buscado.

2. Divida

$$\frac{27x^4-6x^2+x+15}{3x-1}.$$

Resolución

Esquematizando

		+	+	+	+
	27	0	−6	1	15
		9	3	−1	0
$x=1/3$					
	27	9	−3	0	15
$\div 3$					
	9	3	−1	0	

De donde

$$q_{(x)}=9x^3+3x^2-x;\ R_{(x)}=15$$

Por el método de Horner

$$\frac{27x^4-6x^2+x+15}{3x-1}$$

		+	+	+	+
3	27	0	−6	1	15
1		9	3	−1	0
		9	−3	0	
	9	3	−1	0	15
	x^3	x^2	x		

Luego

$$q_{(x)}=9x^3+3x^2-x;\ R_{(x)}=15.$$

Observación

Sea

$$f_{(x)}=P_0x^n+P_1x^{n-1}+P_2x^{n-2}+...+P_{n-1}x+P_n$$

Hagamos $x=y+h$ y supongamos que $f_{(x)}$ se convierte en

$$q_0y^n+q_1y^{n-1}+q_2y^{n-2}+...+q_{n-1}y+q_n$$

Luego, reemplazando $y=x-h$ se tendrá

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+...+p_n\equiv q_0(x-h)^n+q_1(x-h)^{n-1}+...+q_n$$

de donde podemos observar que q_n es el resto de dividir $f_{(x)}$ entre $x-h$,

y el cociente que se obtiene en la división es

$$q_0(x-h)^{n-1}+q_1(x-h)^{n-2}+...+q_{n-1}$$

y así sucesivamente. Luego q_n, q_{n-1}, q_{n-2}, ... pueden hallarse por divisiones sucesivas.

El último cociente es q_0 y es evidente que es igual a p_0.

Ejemplo

Sea $f_{(x)}=x^3+2x+5$. Halle $f_{(x-2)}$.

Resolución

	1	0	2	5
−2	↓	−2	4	−12
	1	−2	6	−7
−2	↓	−2	8	
	1	−4	14	
−2	↓	−2		
	1	−6		

En este caso, dividiremos sucesivamente por $x+2$ y se obtendrá $f_{(x-2)}=x^3-6x^2+14x-7$,

lo cual puede verificarse reemplazando x directamente en $f_{(x)}$ por $x-2$.

Vemos

$$f_{(x)}=x^3+2x+5$$

$$\rightarrow f_{(x-2)}=(x-2)^3+2(x-2)+5$$

$$=x^3-6x^2+12x-8+2x-4+5$$

$$\rightarrow f_{(x-2)}=x^3-6x^2+14x-7$$

TEOREMA DE RENÉ DESCARTES (Teorema del resto)

Teorema

En toda división de la forma $P_{(x)}$ entre $(ax+b)$, el resto se halla mediante el valor numérico del polinomio $P_{(x)}$ cuando x toma el valor de $\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Demostración

Utilizando la identidad fundamental de la división, será posible expresar así

$$P_{(x)}\equiv(ax+b)\underbrace{q_{(x)}}_{\text{cociente}}+\underbrace{R}_{\text{resto o residuo constante}}$$

Evaluando la identidad en $x=-\frac{b}{a}$

$$P_{\left(-\frac{b}{a}\right)}=\underbrace{\left[a\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right]}_{0}q_{\left(-\frac{b}{a}\right)}+R$$

$$\rightarrow P_{\left(-\frac{b}{a}\right)}=R$$

$$\therefore R=P_{\left(-\frac{b}{a}\right)}$$

Finalidad

Se utiliza para hallar el resto en una división de polinomios sin la necesidad de efectuar dicha operación, es decir, de una manera directa.

Ejemplos

1. Halle el resto en $\dfrac{4x^3-5x^2+3x-1}{x+2}$.

Resolución

Usando el teorema del resto:

I. $x+2=0 \rightarrow x=-2$

II. Reemplazamos $x=-2$ en el dividendo, con lo cual se halla el resto.

$\rightarrow R=4(-2)^3-5(-2)^2+3(-2)-1$

$=-32-20-6-1$

$\therefore R=-59$

2. Halle el resto en $\dfrac{27x^4-6x^2+x+15}{3x-1}$.

Resolución

El teorema del resto nos dice, en otras palabras, que iguale a cero al divisor para despejar x y luego reemplace en el dividendo; dicho valor numérico es el resto.

I. $3x-1=0 \rightarrow x=\dfrac{1}{3}$

II. En el dividendo:

$$R=27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4-6\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+15$$

$$\rightarrow R=27\cdot\frac{1}{81}-6\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+15$$

$$\rightarrow R=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+15$$

$$\therefore R=15$$

3. Halle el resto en $\dfrac{x^3(x+1)^3-5x+3}{x(x+1)-4}$.

Resolución

Si el divisor es de grado mayor o igual que 2 también se puede aplicar el teorema del resto tomando en cuenta la nota anterior. Haremos una ampliación del teorema del resto:

I. $x(x+1)-4=0 \rightarrow x^2+x=4$

II. Reemplazamos adecuadamente en el dividendo

$$D_{(x)}=[x(x+1)]^3-5x+3$$

Luego tenemos

$$R_{(x)}=(4)^3-5x+3=-5x+67$$

$$\therefore R_{(x)}=-5x+67$$

4. Halle el resto en

$$\frac{(2x+1)(2x+3)(2x+2)^2+x-5}{2(2x^2+4x)-1}.$$

Resolución

I. $2(2x^2+4x)-1=0$

$\rightarrow 4x^2+8x=1$

II. En el dividendo

$$D_{(x)}=(2x+1)(2x+3)(2x+2)^2+x-5$$

$$D_{(x)}=\underbrace{(4x^2+8x}_{1}+3)(\underbrace{4x^2+8x}_{1}+4)+x-5$$

Observe que en el dividendo, agrupando adecuadamente, es posible formar $4x^2+8x$ para luego reemplazar por 1.

$\rightarrow R_{(x)}=(1+3)(1+4)+x-5$

$\therefore R_{(x)}=x+15$

5. Calcule el resto en $\dfrac{x^{19}+3x-1}{x^2+x+1}$.

Resolución

Utilizando el teorema del resto:

I. $x^2+x+1=0$

II. Para reemplazar en el dividendo, utilizaremos el siguiente producto notable:

$$x^3-1=(x-1)\underbrace{(x^2+x+1)}_{0\text{ (dato)}} \rightarrow x^3-1=0 \rightarrow x^3=1$$

Luego, dando forma en el dividendo

$$D_{(x)}=x^{19}+3x-1$$

$$=(x^3)^6\cdot x+3x-1,$$

ya se tendrá el resto.

$\rightarrow\ R_{(x)}=x+3x-1=4x-1$

Nota

Después de igualar a cero al divisor se puede multiplicar por un polinomio no nulo; en el ejemplo vemos que

$$x^2+x+1=0$$

$$\rightarrow\ (x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$x^3-1=0$$

$$x^3=1$$

se multiplicó por $(x-1)$ porque junto con x^2+x+1 generan una diferencia de cubos y luego se obtiene una equivalencia como $x^3=1$, que nos permite degradar el dividendo.

6. Calcule el resto en $\dfrac{x^{17}+x+5}{x^2-x+1}$.

Resolución

Muy parecido al ejemplo anterior.

I. $x^2-x+1=0$

II. Recuerde que $x^3+1=(x+1)\underbrace{(x^2-x+1)}_{0}$

$\rightarrow\ x^3=-1$

III. Dando forma en el dividendo

$$D_{(x)}=(x^3)^5\cdot x^2+x+5$$

$$R_{(x)}=(-1)^5x^2+x+5=-x^2+x+5$$

Pero $-x^2+x+5$ no puede ser el resto, pues no puede ser del mismo grado del divisor.

Como: $x^2-x+1=0\ \rightarrow\ -x^2+x=1$

$\therefore\ R_{(x)}=1+5=6$

BIOGRAFÍA

Paolo Ruffini

Nació en Valentano el 22 de septiembre de 1765 y murió el 10 de mayo de 1822 en Módena. Fue un matemático, médico y filósofo italiano que hizo importantes aportes en matemáticas, entre los que se cuentan: resolver divisiones en las que el divisor es un binomio de grado 1 (del tipo $x \pm a$), calcular el resto de una división en la que el divisor es un binomio de grado 1 (del tipo $x \pm a$) y calcular las raíces de un polinomio.

Su familia se mudó al ducado de Módena, al norte de Italia, donde ingresó a la universidad a los dieciocho años a estudiar matemáticas, medicina, filosofía y literatura. Entre sus profesores tuvo a Luigi Fantini, quien le enseñó geometría, y a Paolo Cassiani en la asignatura de cálculo. Este último tuvo que dejar sus funciones magisteriales al ser elegido concejal de la ciudad, y fue reemplazado por el joven Paolo Ruffini, estudiante aún, en el curso sobre fundamentos del análisis, entre 1887 y 1888.

A los 23 años se graduó y consiguió su nombramiento como profesor de fundamentos de análisis. Tres años más tarde reemplazó a su maestro Fantini como profesor del curso Elementos de Matemáticas. Ese mismo año, 1791, obtuvo la licencia para ejercer la medicina en Módena.

Luego de la Revolución francesa, Napoleón toma la conducción del ejército francés y tras exitosas campañas forma la República Cisalpina, que tuvo a Módena entre sus principales ciudades. Ruffini fue elegido como representante en el Consejo de la nueva república, cargo al que renunciaría poco después para volver a sus actividades universitarias, en 1798. Pronto tuvo que dejar ese puesto también al negarse a jurar fidelidad al nuevo Estado por razones religiosas.

Tras siete años en los que se dedicó a ejercer la medicina, a la caída de Napoleón fue nombrado rector de la Universidad de Módena, en 1814. Ocupó las cátedras de matemáticas aplicadas, de medicina práctica y de medicina general. En 1817 se desata una epidemia de tifus, lo que no impide que siga tratando a los contagiados por esta enfermedad hasta que él mismo cae enfermo en 1819 y tiene que renunciar a la cátedra de medicina general. Al año siguiente escribirá un artículo acerca del tifus desde su propia experiencia.

Entre sus trabajos publicados tenemos: *Teoria generale delle equazioni* (Teoría general de las ecuaciones) de 1799; en 1802, *Riflessioni intorno alla rettificazione ed alla quadratura del circolo* (Reflexiones sobre la rectificación y la cuadratura del círculo) y la memoria *Della soluzione delle equazioni algebraiche determinata partocolari di grado sup. al 4.º* (La solución de ecuaciones algebraicas determinadas particularmente de grado superior al 4.º); en 1804 se publica la memoria *Sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado* (Sobre la determinación de las raíces en las ecuaciones numéricas de cualquier grado); en 1807, *Algebra elementare* (Álgebra elemental); en 1813 sale a la luz *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali* (Reflexiones sobre la solución general de las ecuaciones algebraicas); y *Memoria sul tifo contagioso* (Memoria del tifus contagioso) aparece en 1820.

Fuente:

http://divulgamat.echu.es/weborriak/historia/MateOspetsuak/Ruffini.asp

http://www.ugr.es/~eaznar/ruffini.htm

http://es.wikipedia.org/wiki/Paolo_Ruffini

Problemas RESUELTOS

Problema 1

Halle el cociente de dividir

$$\frac{8x^3-27}{2x-3}.$$

Resolución

Como bien recordamos con productos notables:

$$8x^3-27\equiv(2x)^3-3^3$$

$$\rightarrow\ 88x^3-27\equiv(2x-3)\underbrace{\left[(2x)^2+(2x)\cdot 3+3^2\right]}_{q_{(x)}}$$

$$\therefore\ q_{(x)}=4x^2+6x+9$$

Problema 2

Al dividir $\dfrac{x^{10}-(x-1)^5+2x-1}{x^2-2x}$, se obtiene como resto $R_{(x)}=Ax+B$. ¿Cuál es el valor numérico de R en 2?

Resolución

Usamos la identidad fundamental de división:

$$D_{(x)}\equiv d_{(x)}q_{(x)}+R_{(x)}$$

$$\rightarrow\ x^{10}-(x-1)^5+2x-1\equiv(x^2-2x)q_{(x)}+R_{(x)}$$

Como nos piden $R_{(2)}$, entonces, en la identidad reemplazamos $x=2$.

$$2^{10}-(2-1)^5+2\cdot 2-1\equiv\underbrace{(2^2-2\cdot 2)}_{0}q_{(2)}+R_{(2)}$$

$$1024-1+4-1=R_{(2)}$$

$$\therefore\ R_{(2)}=1026$$

Problema 3

En la división exacta $\dfrac{4x^4+2x^3+ax+b}{2x^2-3x+1}$, ¿cuál es el valor de $b-a$?

Resolución

Dividiendo por el método de Horner

		+	+		
2	4	2	0	a	b
3		6	−2		
−1		8	12	−4	
			10	15	−5
	2	4	5	0	0

Por ser exacta

$$a-4+15=0\ \rightarrow\ a=-11$$

$$b-5=0\ \rightarrow\ b=5$$

$$\therefore\ b-a=16$$

Problema 4

Dado el esquema de Horner adjunto de una división polinomial en x,

2	a	1	b	c
3		d	5	
1			24	8
	5	e	35	13

¿cuál es el valor de $a+b+c+d+e$?

Resolución

Verificando el procedimiento de Horner:

- $\dfrac{a}{2}=5\ \rightarrow\ a=10$
- $5\cdot 3=d\ \rightarrow\ d=15$
- $\dfrac{1+d}{2}=e\ \rightarrow\ e=\dfrac{1+15}{2}\ \rightarrow\ e=8$
- $b+5+24=35\ \rightarrow\ b=6$
- $c+8=13\ \rightarrow\ c=5$

$$\therefore\ a+b+c+d+e=10+6+5+15+8=44$$

Problema 5

Calcule el valor de n si al dividir

$$\frac{2x^3+nx^2+nx+1}{nx+2n}$$

se obtiene como resto 5.

Resolución

Usando el teorema del resto:

I. $nx+2n=0 \rightarrow x=-2$

II. En el dividendo

$$2(-2)^3+n(-2)^2+n(-2)+1=5$$

$$-16+4n-2n+1=5$$

$$\rightarrow 2n=5+16-1 \rightarrow n=10$$

Problema 6

Luego de dividir

$$\frac{4x^5+8x^4+6x^2+3x^3+1}{2x^3-x^2+2x-1},$$

indique la suma de coeficientes del cociente.

Resolución

Dividiendo por el método de Horner

		+	+			
2	4	8	3	6	0	1
1		2	−4	2		
−2		10	5	−10	5	
1			4	2	−4	2
	2	5	2	0	1	3

Luego $q_{(x)}=2x^2+5x+2$,

cuyos coeficientes suman $2+5+2=9$.

Problema 7

En la siguiente división

$$\frac{3ax^3+(2a-3)x^2+6x+4}{ax-1},$$

la suma de coeficientes del cociente es 10. Calcule su residuo.

Resolución

Aplicando el método de Horner

		+	+	
a	$3a$	$2a-3$	6	4
1		3	2	
		$2a$	8	$\frac{8}{a}$
	3	2	$\frac{8}{a}$	$4+\frac{8}{a}$

Luego el resto $R=4+\frac{8}{a}$

Por dato: $3+2+\frac{8}{a}=10$

$$\rightarrow \frac{8}{a}=5$$

$$\therefore \quad R=4+\frac{8}{a}=4+5=9.$$

Problema 8

Si el resto de la división

$$\frac{x^6-x^7+2x^5-x^3+x+1}{x^2-2}$$

es $R_{(x)}=Ax+B$, calcule $R_{(A)}$.

Resolución

Por el teorema del resto:

I. $x^2-2=0 \rightarrow x^2=2$

II. En el dividendo

$$D_{(x)}=(x^2)^3-(x^2)^3\cdot x+2(x^2)^2\cdot x-(x^2)\cdot x+x+1$$

Reemplazando $x^2=2$

$$\rightarrow R_{(x)}=2^3-2^3\cdot x+2\cdot 2^2\cdot x-2\cdot x+x+1$$

$$\rightarrow R_{(x)}=8-\cancel{8x}+\cancel{8x}-2x+x+1$$

$$R_{(x)}=-x+9=Ax+B \rightarrow A=-1 \text{ y } B=9$$

Luego $R_{(-1)}=-(-1)+9$

$$\therefore \quad R_{(-1)}=10$$

Problema 9

Sean los polinomios

$q_{(x)}=ax^2+bx+c \wedge R_{(x)}=mx+n$

el cociente y residuo, respectivamente, de la división

$$\frac{2x^4+3x^3-8x^2+1-4x}{x^2-(x+1)}.$$

Calcule $(a-b-c)^2$.

Resolución

Por el método de Horner

		+	+		
1	2	3	−8	−4	1
1		2	2		
1	÷	5	5	5	
			−1	−1	−1
	2	5	−1	0	0

Entonces $q_{(x)}=2x^2+5x-1$,

que será idéntico a $q_{(x)}=ax^2+bx+c$,

de donde: $a=2,\ b=5,\ c=1$.

Luego

$$(a-b-c)^2=[2-5-(-1)]^2=(2-5+1)^2=(-2)^2=4$$

Problema 10

Si en la siguiente división $\dfrac{5x^3+6x^4-1}{x+3x^2-2}$ se obtiene un resto de la forma $mx+n-3$, calcule $m-n$.

Resolución

Realizando la división por el método de Horner

		+	+		
3	6	5	0	0	−1
−1		−2	4		
2	÷	3	−1	2	
			3	−1	2
	2	1	1	1	1

Su resto es $R_{(x)}=x+1$, que será idéntico a

$R_{(x)}=mx+n-3$.

De donde

$m=1 \wedge n-3=1$

$\rightarrow m=1 \wedge n=4$

$\therefore\ m-n=1-4=-3$

Problema 11

Dada la división

$$\frac{4x^6+8x^5-5x^2+2x^4+7x^3-1}{-1+2x+4x^3},$$

enuncie el valor de verdad (V) o falsedad (F) de cada una de las proposiciones:

I. Su cociente es x^3+2x^2+1.

II. Su resto es $-3x^2-2x$.

III. La suma de coeficientes del cociente es 5.

Resolución

Efectuando la división por el método de Horner

	÷	+	+	+			
4	4	8	2	7	−5	0	−1
0		0	−2	1			
−2	÷	8	0	−4	2		
1			0	0	0	0	
				4	0	−2	1
	1	2	0	1	−3	−2	0

De donde:

$q_{(x)}=x^3+2x^2+1$;

$R_{(x)}=-3x^2-2x$.

Concluyendo que

I. Verdadero

II. Verdadero

III. Falso

Problema 12

Halle la suma de los cocientes que resulten de efectuar las siguientes divisiones:

I. $\dfrac{2x^3+4x^2+1}{x+1}$ II. $\dfrac{2x^3+3x^2+7}{2x-1}$

Resolución

Dividiendo por la regla de Ruffini

I.

		+	+	+
	2	4	0	1
$x=-1$		−2	−2	2
	2	2	−2	3

$\rightarrow q_{1(x)}=2x^2+2x-2$

II.

		+	+	+
	2	3	0	7
$x=1/2$		1	2	1
	2	4	2	8
÷2				
	1	2	1	

$\rightarrow q_{2(x)}=x^2+2x+1$

De donde

$$q_{1(x)}+q_{2(x)}=(2x^2+2x-2)+(x^2+2x+1)$$

$$\therefore\ q_{1(x)}+q_{2(x)}=3x^2+4x-1$$

Problema 13

En el esquema de Horner mostrado

1	3	a	1	b	c
m		9	d		
2			e	f	
				g	h
	n	−2	p	4	−3

determine el valor de

$$T=\frac{3+a+b+c}{n+p-2}+m.$$

Resolución

Verificando el procedimiento de Horner, se obtiene:

$n=3$

$n\cdot m=9 \rightarrow m=3$

$2n=d \rightarrow d=6$

$a+9=-2 \rightarrow a=-11$

$e=-2m \rightarrow e=-6$

$f=-2\cdot 2 \rightarrow f=-4$

$p=1+d+e \rightarrow p=1$

$g=pm \rightarrow g=3$

$h=2p \rightarrow h=2$

$b+f+g=4 \rightarrow b=5$

$c+h=-3 \rightarrow c=-5$

Reemplazando

$$T=\frac{3-11+5-5}{3+1-2}+3=\frac{-8}{2}+3=-1$$

Otro método

Del esquema se tiene:

$D_{(x)}=3x^4+ax^3+x^2+bx+c$

$d_{(x)}=x^2-mx-2$

$q_{(x)}=nx^2-2x+p$

$R_{(x)}=4x-3$

Pero sabemos: $D_{(1)}=d_{(1)}q_{(1)}+R_{(1)}$

$\rightarrow 3+a+1+b+c=(1-m-2)(n-2+p)+4-3$

$\rightarrow 4+a+b+c=(-1-m)(n+p-2)+1$

$\rightarrow 3+a+b+c=(-1-m)(n+p-2)$

$\rightarrow \dfrac{3+a+b+c}{n+p-2}=-1-m$

$\therefore\ \dfrac{3+a+b+c}{n+p-2}+m=-1$

Problema 14

Calcule el valor de n si la división

$$\frac{x^4-x^3-x+n}{x-2}$$

admite un residuo igual a 10.

Resolución

Por teorema del resto:

I. $x-2=0 \rightarrow x=2$

II. $R=2^4-2^3-2+n=16-8-2+n=n+6$

Por dato: $n+6=10$

$\therefore\ n=4$

Problema 15

Halle el resto en

$$\frac{27x^{425}+81x^{424}-5x-19}{x+3}.$$

Resolución

Usando el teorema del resto:

I. $x+3=0 \rightarrow x=-3$

II. $R=27(-3)^{425}+81(-3)^{424}-5(-3)-19$

$=-3^3\cdot 3^{425}+3^4\cdot 3^{424}+15-19$

$=-\cancel{3^{428}}+\cancel{3^{428}}-4$

$\therefore\ R=-4$

Problema 16

En la siguiente división $\dfrac{(2x^{40}+n)x+5}{x-1}$, se sabe que la suma de coeficientes del cociente sea 93.

Calcule el residuo.

Resolución

De la división $\dfrac{2x^{41}+nx+5}{x-1}$

Por la regla de Ruffini

	2	0	0	...	0	n	5
$x=1$	↓	2	2	...	2	2	$n+2$
	2	2	2		2	$n+2$	$n+7$

41 términos

Por dato

$$q_{(1)}=\underbrace{2+2+2+2...+2}_{40\text{ sumandos}}+n+2=93$$

$2\cdot 40+n+2=93$

$\rightarrow\ n=11$

Como el residuo es $R=n+7$, entonces $R=18$.

Problema 17

Halle el valor de $\dfrac{a-b}{c-1}$ si la división algebraica

$$\frac{-ax^5+bx^4+(c-1)x^3-x^2+4}{-4x^3+2x^2-3x+2}$$

es una división exacta.

Resolución

Cuando se trata de una división exacta, los polinomios pueden ordenarse en forma ascendente, es decir

$D_{(x)}=4+0x-x^2+(c-1)x^3+Bx^4-Ax^5$

$d_{(x)}=2-3x+2x^2-4x^3$

En tal sentido, el esquema será:

	÷	+	+			
2	4	0	−1	$c-1$	b	$-a$
3		6	−4	8		
−2	÷	6	9	−6	12	
4			4	6	−4	8
	2	3	2	0	0	0

Del resto

$$c-1+8-6+6=0 \rightarrow c=-7$$

$$b+12-4=0 \rightarrow b=-8$$

$$-a+8=0 \rightarrow a=8$$

Luego

$$\frac{a-b}{c-1}=\frac{8-(-8)}{-7-1}=\frac{16}{-8}=-2$$

Problema 18

Al efectuar la división del polinomio $P_{(x)}=x^3(3ax-4d)-2(cx^2-x-1)$ entre $3x^2+2x-a$, se obtiene un cociente $q_{(x)}$, cuya suma de coeficientes es 30 y un resto idéntico a $5ax+a+2$; $a\neq 0$.

Calcule el valor de $\dfrac{a}{q_{(1)}-a}$.

Resolución

Ordenando

$$\frac{3ax^4-4dx^3-2cx^2+2x+2}{3x^2+2x-a}$$

Por el método de Horner

		+	+		
3	3a	−4d	−2c	2	2
−2		−2a	a^2		
a			−2M	aM	
				−2N	aN
	a	M	N	5a	a+2

Del resto

$$2+aN=a+2 \rightarrow N=1$$

$$2+aM-2N=5a \rightarrow M=5$$

Del dato

$$a+M+N=30 \rightarrow a=24$$

de donde

$$\frac{a}{q_{(1)}-a}=\frac{24}{30-24}=4$$

Problema 19

Obtenga el residuo de efectuar la división indicada

$$\frac{(3x^2)^2+2(2x)^2+mx+3^m}{2-3x}$$

si el cociente evaluado en cero resulta ser −3.

Resolución

El dividendo es $9x^4+0x^3+8x^2+mx+3^m$; luego lo ordenamos en el esquema para usar el método de Horner.

		+	+	+	
−3	9	0	8	m	3^m
−2		6	4	8	6
	−3	−2	−4	$\frac{m+8}{-3}$	3^m+6

Como el término independiente del cociente es −3, entonces

$$\frac{m+8}{-3}=-3 \rightarrow m=1$$

Luego

el resto es 3^m+6

$\therefore\ R=3+6=9$

Problema 20

Halle el resultado de sustituir x por $x+3$ en la expresión $f_{(x)}=2x^4-x^3-2x^2+5x-1$.

Resolución

Haremos divisiones sucesivas por Ruffini de $f_{(x)}$ entre $x-3$.

	2	−1	−2	5	−1
3	↓	6	15	39	132
	2	5	13	44	131
3	↓	6	33	138	
	2	11	46	182	
3	↓	6	51		
	2	17	97		
3	↓	6			
	2	23			

$\rightarrow\ f_{(x+3)}=2x^4+23x^3+97x^2+182x+131$

Problema 21

Sea el polinomio

$$f_{(x)}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})x^4-(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})x^3+2\sqrt{6}-(4-2\sqrt{6})x^2.$$

Halle su valor numérico en $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Resolución

Recordemos que $P_{(\alpha)}$ es el residuo de dividir $P_{(x)}$ entre $(x-\alpha)$, entonces $P_{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$ será el residuo de dividir $P_{(x)}$ entre $x-\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Luego, por la regla de Ruffini

	$\sqrt{3}+\sqrt{2}$	$-(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$	$-(4-2-\sqrt{6})$	0	$2\sqrt{6}$
$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	↓	1	$5-2\sqrt{6}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$5-2\sqrt{6}$
	$\sqrt{3}+\sqrt{2}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	5

De donde $P_{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=5$

Observación

$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=3+2-2\sqrt{3\cdot 2}=5-2\sqrt{6}$

Problema 22

Calcule el valor de $a+b$ en la división de $55x^3+(166+p)x-8-bx^2$ entre $ax^2-39x+2$ si deja como residuo a $R_{(x)}=px$.

Resolución

De $D_{(x)}\equiv d_{(x)}q_{(x)}+R_{(x)}$, división inexacta, se tiene:

$D_{(x)}-R_{(x)}\equiv d_{(x)}q_{(x)}$, división exacta.

Luego

$$\frac{D_{(x)}-R_{(x)}}{d_{(x)}}=\frac{-8+166x+55x^3-bx^2}{2-39x+ax^2}$$

es exacta. Entonces podemos ordenar ascendentemente y aplicar el método de Horner.

		+		
2	-8	166	$-b$	55
39		-156	$4a$	
$-a$		10	195	$-5a$
	-4	5	$\underbrace{195+4a-b}_{\text{cero}}$	$\underbrace{55-5a}_{\text{cero}}$

Por ser exacta

$55-5a=0 \rightarrow a=11$

$195+4a-b=0 \rightarrow b=195+4a$

Reemplazando el valor de A se tiene $b=239$

$\therefore\ a+b=250$

Problema 23

Determine la suma de coeficientes del cociente que se obtiene al dividir $4x^{80}-2x^{79}+x+b$ entre $x-1$.

Resolución

Por la regla de Ruffini

	4	-2	0	0	...	0	1	b
$x=1$		4	2	2	...	2	2	3
	4	2	2	2	...	2	3	$b+3$

80 términos

$\sum$Coeficientes: $q=4+3+78(2)=163$

Problema 24

El residuo de la división $(x+1)^n+1$ entre x^2+2x tiene la siguiente forma: $R_{(x)}=\left(\frac{1-a}{2}\right)x+b$. Según ello, calcule el valor de a.

Resolución

Sea $q_{(x)}$ el cociente, entonces

$$(x+1)^n+1\equiv(x^2+2x)q_{(x)}+\left(\frac{1-a}{2}\right)x+b$$

Como es una identidad, podemos evaluar en $x=0$; $x=-2$. Así:

I. $x=0$: $1^n+1=0q_{(0)}+0+b \rightarrow b=2$

II. $x=-2$: $(-2+1)^n+1=0\cdot q_{(-2)}+\left(\frac{1-a}{2}\right)(-2)+2$

Luego

$(-1)^n+1=-1+a+2$

$\therefore\ a=(-1)^n$

Problema 25

Halle el residuo en la siguiente división.

$$\frac{(x+1)(x^2-x)^2(x^2-5x+6)}{x^2-2x-4}$$

Resolución

Por el teorema del resto

$$x^2-2x-4=0 \rightarrow x^2-2x=4$$

En el dividendo

$$(x+1)(x-1)^2x^2(x-3)(x-2)$$

Efectuando como se indica

$$(x^2-2x-3)(x^2-2x+1)(x)(x^2-2x)$$

Como

$$x^2-2x=4 \rightarrow R_{(x)}=(4-3)(4+1)x\cdot 4$$

$$\therefore \ R_{(x)}=20x$$

Problema 26

En la división algebraica

$$\frac{x^{n-1}-(n+2)x+n+1}{x-1},$$

el término independiente del cociente es -10. ¿De qué grado es el dividendo?

Resolución

Por la regla de Ruffini

	1	0	0	0 . . . 0	$-n-2$	$n+1$
1	↓	1	1	1	1	$-n-1$
	1	1	1	1	$-n-1$	0

Como el término independiente es -10

$\rightarrow -n-1=-10 \rightarrow n=9$

Por lo tanto, el grado del dividendo es 8.

Problema 27

Halle el resto de

$$\frac{(x^3+1)^{41}+x^{66}+13}{x^6+x^3+1}.$$

Resolución

$$x^6+x^3+1=0 \qquad \text{(I)}$$

$$\rightarrow x^3+1=-x^6$$

Multiplicando por (x^3-1) a (I), se tiene

$$(x^3-1)(x^6+x^3+1)=0$$

$$\rightarrow x^9-1=0 \rightarrow x^9=1$$

Luego, en el dividendo $D_{(x)}$ se tiene

$$D_{(x)}=(-x^6)^{41}+x^{66}+13=-x^{246}+x^{66}+13$$

$$\rightarrow D_{(x)}=-(x^9)^{81}x^3+(x^9)^7x^3+13$$

Luego $R_{(x)}=-(1)^{81}\cdot x^3+(1)^7\cdot x^3+13$

$$\rightarrow R_{(x)}=-x^3+x^3+13$$

$$\therefore \ R_{(x)}=13$$

Problema 28

Calcule el valor numérico del polinomio

$$P_{(x)}=\sqrt{2}x^5+(1-\sqrt{10})x^4+2\sqrt{5}x^3-3\sqrt{5x}+3\sqrt{10},$$

cuando $x=\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

Resolución

Análogamente al problema 21

$$P_{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\text{Residuo de } \frac{P_{(x)}}{x-\sqrt{5}+\sqrt{2}}.$$

Por la regla de Ruffini

	$\sqrt{2}$	$1-\sqrt{10}$	$2\sqrt{5}$	0	$-3\sqrt{5}$	$3\sqrt{10}$
$\sqrt{5}-\sqrt{2}$	↓	$\sqrt{10}-2$	$-\sqrt{5}+\sqrt{2}$	3	$3\sqrt{5}-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{10}+6$
	$\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{5}+\sqrt{2}$	3	$-3\sqrt{2}$	6

$$\therefore \ P_{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=6$$

Problema 29

Siendo $D_{(x)}=2x^4-5x^3+2$ y $d_{(x)}=2x^2-3x$, dividendo y divisor respectivamente, halle el polinomio cociente y el polinomio residuo.

Resolución

Se puede resolver por Horner, pero lo resolveremos aplicando la identidad fundamental de la división. De la propiedad de grado se determina que el cociente será de segundo grado y el residuo de primer grado.

Entonces $q_{(x)}$ y $R_{(x)}$ es de la forma

$$q_{(x)}=C_0x^2+C_1x+C_2;\ R_{(x)}=r_0x+r_1.$$

Aplicando la identidad fundamental de la división se tiene:

$$2x^4-5x^3+2\equiv(2x^2-3x)(C_0x^2+C_1x+C_2)+r_0x+r_1$$

$$\equiv 2C_0x^4+(2C_1-3C_0)x^3+(2C_2-3C_1)x^2+(r_0-3C_2)x+r_1$$

Luego

$$2C_0=2 \rightarrow C_0=1$$

$$2C_1-3C_0=-5 \rightarrow C_1=-1$$

$$2C_2-3C_1=0 \rightarrow C_2=-\frac{3}{2}$$

$$r_0-3C_2=0 \rightarrow r_0=\frac{9}{2}$$

$$r_1=2$$

De donde se tendrá

$$q_{(x)}=x^2-x-\frac{3}{2};\ r_{(x)}=-\frac{9}{2}x+2.$$

Problema 30

Si la siguiente división

$$\frac{2bx^4+3ax^3-[\![\sqrt{5}]\!]x^2+8x+[\![\sqrt{6}]\!]}{-2x^3+[\![\sqrt{2}]\!]x^2-3}$$

tiene como resto $[\![5]\!]x-4$, calcule $6ab$.

> **Observación**
>
> $[\![\Delta]\!]=n \leftrightarrow n\leq\Delta<n+1;\ n\in\mathbb{Z},\ \Delta\in\mathbb{R}$

Resolución

De acuerdo con la definición de $[\![\Delta]\!]$

$$2\leq\sqrt{5}<3 \rightarrow [\![\sqrt{5}]\!]=2$$

$$2\leq\sqrt{6}<3 \rightarrow [\![\sqrt{6}]\!]=2$$

$$1\leq\sqrt{2}<2 \rightarrow [\![\sqrt{2}]\!]=1$$

$$5\leq 5<6 \rightarrow [\![5]\!]=5$$

Luego, la división es

$$\frac{2bx^4+3ax^3-2x^2+8x+2}{-2x^3+x^2-3} \wedge R_{(x)}=5x-4$$

De la identidad

$$D_{(x)}=d_{(x)}q_{(x)}+R_{(x)}$$

$$\rightarrow D_{(x)}-R_{(x)}=d_{(x)}q_{(x)}$$

Vemos que

$$D_{(x)}-R_{(x)}=2bx^4+3ax^3-2x^2+3x+6$$

Luego $\dfrac{2bx^4+3ax^3-2x^2+3x+6}{-2x^3+x^2-3}$ es exacta.

Por ser exacta, puede aplicarse el método de Horner invertidamente

		+			
-3	6	$\boxed{3}$	-2	$3a$	$2b$
0		$\boxed{0}$	2	-4	
-1			0	1	-2
2					
	-2	-1	0	0	0

Del resto

$$3a-4+1=0 \rightarrow a=1$$

$$2b-2=0 \rightarrow b=1$$

$$\therefore\ 6ab=6$$

Problema 31

Determine el valor de m y n para que el polinomio $P_{(x)}=nx^{20}-mx^{19}+mx-1$ sea divisible por $(x-1)^2$. Dé como respuesta $9mn$.

Resolución

Puesto que es divisible por $(x-1)^2$, es también divisible por $x-1$.

Por teorema del resto

$$P_{(1)}=0 \rightarrow P_{(1)}=n-m+m-1=0 \rightarrow n=1$$

Luego: $P_{(x)}=x^{20}-mx^{19}+mx-1$

Para la división es posible aplicar una vez el método de Horner, de divisor $(x-1)^2$, o aplicar dos veces la regla de Ruffini, de divisores $(x-1)$.

Por la regla de Ruffini

	1	$-m$	0	0	0	...	m	-1
$x=1$		1	$1-m$				$1-m$	1
	1	$1-m$	$1-m$	...		$1-m$	1	0
$x=1$		1	$2-m$				$19-18m$	
	1	$2-m$	$3-2m$	...		$19-18m$	$20-18m$	

Por ser exacta

$$20-18m=0$$

$$\rightarrow m=\frac{10}{9}$$

$$\therefore 9mn=9\left(\frac{10}{9}\right)(1)=10$$

Otro método

Si es divisible por $(x-1)^2$

$$\rightarrow P_{(1)}=0 \wedge P'_{(1)}=0$$

I. $P_{(1)}=n-m+m-1=0 \rightarrow n=1$

II. $P'_{(x)}=20x^{19}-19mx^{18}+m$

Como $P'_{(1)}=0$

$$\rightarrow 20-19m+m=0$$

$$\rightarrow m=\frac{10}{9}$$

$$\therefore 9mn=9=\left(\frac{10}{9}\right)(1)=10$$

> **Nota**
> $P'_{(x)}$ es la primera derivada de $P_{(x)}$.

Problema 32

Sea el polinomio $\varphi_{(x)}=x^2+px+q$, de coeficientes naturales y de suma mínima que verifican las siguientes condiciones adicionales:

I. $\varphi_{(3)}$ es divisible por 6.

II. $\varphi_{(4)}$ es divisible por 7.

III. $\varphi_{(5)}$ es divisible por 10.

Halle $\varphi_{(1)}$.

Resolución

De las condiciones:

$$\varphi_{(3)}=3^2+3p+q=\overset{o}{6} \qquad (\alpha)$$

$$\varphi_{(4)}=4^2+4p+q=\overset{o}{7} \qquad (\beta)$$

$$\varphi_{(5)}=5^2+5p+q=\overset{o}{10} \qquad (\theta)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{De } (\alpha)\ q=\overset{o}{3}\\ \text{De } (\theta)\ q=\overset{o}{5}\end{array}\right\} q=\overset{o}{15} \rightarrow q_{min}=15$$

En (α): como $q=15 \rightarrow p$ es par

En (β) $\rightarrow$ $16+4p+15=\overset{o}{7}$

$\rightarrow$ $p=\dfrac{\overset{o}{7}-31}{4}=\dfrac{7K-31}{4}$

Como K es entero y p es par se obtendrá $K=9$ y el valor de p será 8.

Conocido p y q, tenemos que:

$$\varphi_{(x)}=x^2+8x+15$$

$$\therefore\ \varphi_{(1)}=1+8+15=24$$

Problema 33

Dada la división algebraica

$$\frac{(x-1)^2+(x^2-1)^3+(x^3-1)^4+(x^4-1)^5+\ldots+(x^{2n-1}-1)^{2n}}{x^2-1},$$

indique el término independiente del residuo.

Resolución

En la identidad fundamental:

$$D_{(x)}\equiv d_{(x)}q_{(x)}+R_{(x)}$$

Como el divisor es de segundo grado, entonces el residuo podrá ser de primer grado, es decir, de la forma $R_{(x)}=ax+b$.

Luego

$$D_{(x)}\equiv(x^2-1)q_{(x)}+ax+b \qquad (*)$$

donde

$$D_{(x)}=(x-1)^2+(x^2-1)^3+(x^3-1)^4+\ldots+(x^{2n-1}-1)^{2n}$$

Luego en (*) evaluando en $x=1$ tenemos:

$$D_{(1)}=(1^2-1)q_{(1)}+a+b$$

$$\rightarrow\ 0=0\cdot q_{(1)}+a+b$$

Recuerde

$D_{(1)}=0+0+\ldots+0=0$

$$\rightarrow\ a+b=0 \qquad (I)$$

Similarmente en (*), evaluando en $x=-1$ tenemos:

$$D_{(-1)}=((-1)^2-1)q_{(-1)}-a+b$$

pero

$$D_{(-1)}=2^2+0+2^4+\ldots+2^{2n}=4+4^2+\ldots+4^n$$

$$\rightarrow\ D_{(-1)}=4(1+4+4^2+\ldots+4^{n-1})$$

$$\rightarrow\ D_{(-1)}=4\left(\frac{4^n-1}{4-1}\right)=\frac{4}{3}(4^n-1)$$

Luego reemplazando tenemos:

$$-a+b=\frac{4}{3}(4^n-1) \qquad (II)$$

De (I)+(II)

$$2b=\frac{4}{3}(4^n-1)\ \rightarrow\ b=\frac{2}{3}(4^n-1)$$

Por lo tanto, el término independiente del residuo es $\frac{2}{3}(4^n-1)$.

Problema 34

En la siguiente división indicada

$$\frac{nx^{n+3}+(n+1)x^{n+2}+3nx^2-(5n-2)x+\dfrac{-n-3}{3}}{3x-3},$$

la suma de coeficientes del cociente con el resto es 6470. Halle n.

Resolución

Por el método de Horner

3	n	$n+1$	0	$0\ldots0$	$3n$	$-(5n-2)$	
		n	$2n+1$		$2n+1$	$5n+1$	
3							3
	$\frac{n}{3}$	$\frac{2n+1}{3}$	$\frac{2n+1}{3}$	$\ldots$	$\frac{2n+1}{3}$	$\frac{5n+1}{3}$	1	$-\frac{n+3}{3}+3$

n términos

Por dato $\sum$coeficientes de $q_{(x)}+R_{(x)}=6470$

$$\frac{n}{3}+\underbrace{\left(\frac{2n+1}{3}+\frac{2n+1}{3}+\ldots+\frac{2n+1}{3}\right)}_{n\text{ veces}}+\frac{5n+1}{3}+1-\frac{n+3}{3}+3=6470$$

$$\rightarrow\quad \frac{n}{3}+\frac{n(2n+1)}{3}+\frac{5n+1}{3}+1-\frac{n+3}{3}+3=6470$$

$$\rightarrow\quad \frac{n+2n^2+n+5n+1+3-n-3+9}{3}=6470$$

Entonces

$$\frac{2n^2+6n+10}{3}=6470 \quad\leftrightarrow\quad \frac{n^2+3n+5}{3}=3235$$

$\rightarrow\ n^2+3n+5=9705\ \rightarrow\ n(n+3)=9700$

$\rightarrow\ n(n+3)=97(100)$

$\therefore\ n=97$

Problema 35

Al dividir $P_{(x)}=x^4+Ax^3+Bx^2+2x-1$ entre un polinomio de segundo grado se obtiene como cociente x^2-1 y como residuo $2x+1$. Indique el valor de B.

Resolución

De la identidad fundamental

$$D_{(x)} = d_{(x)}q_{(x)} + R_{(x)}$$

tenemos

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + 2x - 1 = (x^2 - 1)q_{(x)} + 2x + 1. \quad (*)$$

Evaluando en la identidad (*)

I. Si $x = 1$

$\rightarrow\ 1 + A + B + 2 - 1 = 0 + 2 + 1$

$A + B = 1 \qquad (\alpha)$

II. Si $x = -1$

$\rightarrow\ 1 - A + B - 2 - 1 = 0 - 2 + 1$

$B - A = 1 \qquad (\beta)$

De (α) y (β) sumando obtenemos $2B = 2$, entonces $B = 1$.

Problema 36

Si el polinomio

$F_{(x)} = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 0$

es divisible por

$E_{(x)} = x^2 + \dfrac{2\alpha}{3}x + \dfrac{\beta}{3}$; con $\alpha\beta 0 \neq 0$,

halle el equivalente de $\left[F_{\left(\frac{2\alpha}{3}\right)} E_{\left(\frac{2\alpha}{3}\right)}\right]^{\frac{3}{5}}$.

Resolución

Como $F_{(x)}$ es divisible por $E_{(x)}$, su división es exacta. Luego

1	1	α	β	0
$-\dfrac{2\alpha}{3}$		$-\dfrac{2\alpha}{3}$	$-\dfrac{\beta}{3}$	
$-\dfrac{\beta}{3}$			$-\dfrac{2\alpha^2}{9}$	$-\dfrac{\alpha\beta^2}{9}$
	1	$+\dfrac{\alpha}{3}$	0	0

Del resto

$$\beta - \frac{\beta}{3} - \frac{2\alpha^2}{9} = 0 \rightarrow \beta = \frac{\alpha^2}{3}$$

$$0 - \frac{\alpha\beta}{9} = 0 \rightarrow 0 = \frac{\alpha^3}{27}$$

Reemplazando

$$F_{\left(\frac{2\alpha}{3}\right)} = \left(\frac{2\alpha}{3}\right)^3 + \alpha\left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2 + \beta\left(\frac{2\alpha}{3}\right) + 0$$

$$= \frac{8\alpha^3}{27} + \frac{4\alpha^3}{9} + \left(\frac{\alpha^2}{3}\right)\left(\frac{2\alpha}{3}\right) + \frac{\alpha^3}{27}$$

$$= \frac{8\alpha^3 + 12\alpha^3 + 6\alpha^3 + \alpha^3}{27}$$

$$\rightarrow F_{\left(\frac{2\alpha}{3}\right)} = \alpha^3 \qquad (I)$$

Asimismo

$$E_{\left(\frac{2\alpha}{3}\right)} = \left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2 + \frac{2\alpha}{3}\cdot\frac{2\alpha}{3} + \frac{\beta}{3}$$

$$= \frac{4\alpha^2}{9} + \frac{4\alpha^2}{9} + \frac{\alpha^2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \alpha^2$$

$$\rightarrow E_{\left(\frac{2\alpha}{3}\right)} = \alpha^2 \qquad (II)$$

$$\therefore \left[F_{\left(\frac{2\alpha}{3}\right)} \cdot E_{\left(\frac{2\alpha}{3}\right)}\right]^{\frac{3}{5}} = (\alpha^3 \cdot \alpha^2)^{\frac{3}{5}} = \alpha^3$$

Problema 37

Se sabe que el polinomio

$P_{(x)} = x^{n+2} + Ax^{n+1} + ABx^n$

es divisible por

$Q_{(x)} = x^2 - (A+B)x + AB$,

con $AB \neq 0$.

Calcule el valor que asume $\dfrac{A}{B}$.

Resolución

Es importante observar que $A \neq 0$ y $B \neq 0$.

Como $P_{(x)}$ es divisible por $x^2-(A+B)x+AB$, que es equivalente a $(x-A)(x-B)$, también es divisible por $x-A$ y $x-B$.

Por teorema del resto:

$\rightarrow x-A=0 \rightarrow x=A$

Luego

$$P_{(A)}=0 \rightarrow A^{n+2}+AA^{n+1}+ABA^n=0$$

$$\rightarrow A(A^{n+1})+A(A^{n+1})+B(A^{n+1})=0$$

$$A^{n+1}(A+A+B)=0$$

$$A^{n+1}(2A+B)=0$$

Como $A^{n+1} \neq 0$, entonces

$$2A+B=0$$

$$B=-2A$$

$$\therefore \frac{A}{B}=\frac{\cancel{A}}{-2\cancel{A}}=-\frac{1}{2}$$

Problema 38

Determine el valor de a_0 si se sabe que al dividir el polinomio $P_{(x)}=a_0x^4+a_1x^3+x^2+1$ entre x^2+1 y x^2-1 se obtienen dos residuos que suman 8.

Resolución

Por teorema del resto:

I. $x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1$

$$\rightarrow R_{1(x)}=a_0(-1)^2+a_1(-1)x+(-1)+1$$

$$R_{1(x)}=-a_1x+a_0 \qquad (\alpha)$$

II. $x^2-1=0 \rightarrow x^2=1$

$$\rightarrow R_{2(x)}=a_0+a_1x+1+1$$

$$R_{2(x)}=a_1x+a_0+2 \qquad (\beta)$$

De (α) y (β)

$$(-a_1x+a_0)+(a_1x+a_0+2)=8$$

$\rightarrow 2a_0+2=8 \rightarrow 2a_0=6$

$\therefore a_0=3$

Problema 39

Sean P y $Q_{(x)}=2x^3-3x+1$ dos polinomios. Si al dividir $P_{(x^2-1)}+Q_{(x)}$ entre $2x^2-1$ se obtiene un residuo $R_{(x)}=mx+3$, calcule el valor de $P_{\left(\frac{1}{m}\right)}$.

Resolución

Tenemos que

$$\frac{P_{(x^2-1)}+2x^3-3x+1}{2x^2-1}$$

deja resto: $R_{(x)}=mx+3$. Podemos aplicar el teorema del resto para calcular el residuo, y este debe ser igual a $R_{(x)}=mx+3$.

Así

$$2x^2-1=0 \rightarrow x^2=\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow R_{(x)}=P_{\left(-\frac{1}{2}\right)}+2\left(\frac{1}{2}\right)x-3x+1$$

$$\rightarrow R_{(x)}=P_{\left(-\frac{1}{2}\right)}-2x+1$$

Como $R_{(x)}=mx+3$

$$\rightarrow P_{\left(-\frac{1}{2}\right)}-2x+1=mx+3$$

$$\rightarrow -2x+P_{\left(-\frac{1}{2}\right)}=mx+2$$

$$\rightarrow m=-2 \wedge P_{\left(\frac{1}{-2}\right)}=2$$

$$\therefore P_{\left(\frac{1}{m}\right)}=2$$

Problema 40

Si la siguiente división algebraica

$$\frac{(x+1)^{2^{2011}}+x^{2^{2010}}-3x+1}{x^2+x}$$

deja resto $R_{(x)}=Ax+B$, calcule el valor de $R_{(2)}$.

Resolución

Por la identidad fundamental de la división tenemos

$$D_{(x)}\equiv d_{(x)}\cdot q_{(x)}+R_{(x)} \qquad (*)$$

Donde

$$D_{(x)}=(x+1)^{2^{2011}}+x^{2^{2010}}-3x+1$$

$$d_{(x)}=x^2+x \;\rightarrow\; d_{(x)}=x(x+1)$$

$$q_{(x)}=? \text{ y } R_{(x)}=Ax+B$$

En (*) hacemos $x=-1$:

$$D_{(-1)}=d_{(-1)}q_{(-1)}+R_{(-1)}$$

$$\rightarrow\; 5=0\cdot \cancel{q}_{(-1)}+(-A+B)$$

$$\rightarrow\; -A+B=5$$

En (*) hacemos $x=0$:

$$D_{(0)}=d_{(0)}\cdot q_{(0)}+R_{(0)}$$

$$\rightarrow\; 2=0\cdot \cancel{q}_{(0)}+B \;\rightarrow\; B=2$$

Como

$$B=2 \;\rightarrow\; -A+2=5 \;\rightarrow\; A=-3$$

Luego

$$R_{(x)}=-3x+2$$

$$\therefore\; R_{(2)}=-3(2)+2=-4.$$

Test 5

1. Al dividir ax^4-8x^2+5x-1 entre x^2+3x-1, se obtiene como cociente x^2-3x+2 y como residuo $mx+1$. ¿Cuál es el valor de $8a+m$?

A) -4 B) -2 C) 7
D) 4 E) 2

2. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
   I. En una división algebraica, si el grado del divisor es m, su cociente será a lo más de grado $m-1$.
   II. El grado del cociente puede ser menor que el grado del residuo.
   III. El grado del divisor es mayor que el grado del cociente.

A) VVV B) VFF C) FFV
D) VVF E) FVF

3. ¿Cuál es el cociente en la siguiente división $\dfrac{x^{31}-x^{29}+x^5-x^3+3x-1}{x^2-1}$?

A) $x^{29}+x^4-1$
B) $x^{29}-x^{27}+x^3-x+3$
C) $x^{29}+x^3$
D) $x^{29}+x^3+1$
E) $x^{29}+x^3+x-1$

4. ¿Cuál es el resto en la siguiente división $\dfrac{x^{31}+x^{29}-x^5-x^3-2x+1}{x^2+1}$?

A) $2x-1$ B) $1-2x$ C) $3-2x$
D) $4-2x$ E) $-2x$

5. ¿Cuál es el resto en la siguiente división $\dfrac{x^3-3x^2+3x-2}{x^2-x+1}$?

A) 0 B) $x+1$ C) $x-1$
D) $x+2$ E) $x-2$

6. Si la división indicada $\dfrac{a^2x^4+5ax^3-14x^2+a^3x-9}{ax^2-2x-3}$ es exacta, ¿cuál es el valor de $a+\dfrac{9}{a}+1$?

A) 7 B) -3 C) -6
D) 2 E) -5

7. Si la división $\dfrac{2x^4+x^3+4x^2+n}{x+1}$ deja como resto 5, ¿cuál es el valor de n?

A) 5 B) -5 C) 1
D) 7 E) 0

8. ¿Cuál es el resto en $\dfrac{12x^4+x^3-24-12x}{4x^2-x-5}$?

A) $-3x+4$ B) $3x+4$ C) $-3x+2$
D) $-3x-4$ E) $3x-4$

9. Luego de dividir $\dfrac{mx^4+nx^3+14x^2+5x+10}{2x^2+x+3}$, se obtuvo como residuo 4. ¿Cuál es el valor de $m\cdot n$?

A) 6 B) 10 C) 20
D) 30 E) 15

10. Calcule la suma de los coeficientes del cociente de

$$\frac{nx^4 - x^3 + 3nx - 3}{nx - 1}.$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) −1 E) 7

11. Halle el resto en

$$\frac{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + x - 6)}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}.$$

A) $-4(x-1)^2$ B) $3-3x$ C) $4x-4$
D) $4x-1$ E) $4(x-1)^2$

12. Halle el resto en

$$\frac{x^{35} + (x-1)^{34} + x}{x(x-1)}.$$

A) $2x$ B) x C) $x-1$
D) $x+1$ E) $2x+1$

CLAVES

1 D	3 C	5 A	7 B	9 D	11 A
2 E	4 B	6 B	8 D	10 C	12 D

Problemas PROPUESTOS

Nivel I

1. En la siguiente división

$$\frac{ax^5+bx^2-3x+5}{x^3-2x+1} \text{ el resto es } x^2.$$

¿Cuál es el valor de $a+b$?

A) 1 B) 0 C) −1
D) 2 E) −2

2. Halle el cociente de la división

$$\frac{x^4+x^3+5x^2-10x+10}{x^2+2x+1}.$$

A) x^2-x+4 B) x^2-x+5 C) x^2-x+7
D) x^2-x+3 E) x^2-x+6

3. Del esquema de Horner adjunto de una división en variable x,

1	3	5	a	13
−2		b	d	m
	a	c	e	n

calcule el valor de $m+n$.

A) 4 B) 3 C) 1
D) −7 E) −10

4. Halle el cociente y el resto que se obtiene luego de efectuar la división

$$\frac{(x+1)^3+x-1}{x-2}.$$

A) x^2-3x+4; 4
B) x^2-x+2; 2
C) x^2+x+2; 4
D) x^2+3x+2; 2
E) x^2-3x-2; 4

5. ¿Cuál es el resto de la división

$$\frac{6x^4-5x^3-3+x^2}{3x-1}?$$

A) 3 B) 0 C) −3
D) −2 E) −1

6. Calcule la suma de coeficientes del cociente de dividir $\dfrac{x^5-x+1}{x-1}$.

A) 5 B) 4 C) 3
D) 6 E) 0

7. ¿Cuántos términos no nulos tiene el cociente de la división $\dfrac{5x^6-5x^4+3x+1}{x+1}$?

A) 2 B) 5 C) 7
D) 8 E) 3

8. Indique el resto de la división algebraica

$$\frac{(\sqrt{2}+1)x^4-\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}+1}{x+1-\sqrt{2}}.$$

A) 2 B) 4 C) $\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}+1$

9. Halle el resto en la división $\dfrac{x^5+nx+2}{x-1}$ si se sabe que la suma de coeficientes del cociente es 10.

A) 8 B) 10 C) 4
D) 0 E) 15

10. Halle el cociente que se obtiene luego de dividir

$$\frac{16x^4-9x^2-2x}{x-\frac{1}{4}}.$$

A) $4x^3+x^2-2x-1$
B) $16x^2+4x-8$
C) $16x^3+4x-8$
D) $16x^3+4x^2-8x-4$
E) $64x^3+16x^2-32x-16$

11. ¿Cuál es el resto en la división

$$\frac{x^{2n}+x^{2n-1}+4x-7}{x+1}?$$

A) −11 B) −3 C) 3
D) 4 E) 11

12. Al efectuar la división algebraica

$$\frac{7x^9-14x^{10}+7}{2x^2+3x-2}$$

se obtiene como resto $R_{(x)}=mx+n$. ¿Cuál es el valor de $\sqrt{m+2n+2}$?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

13. Determine el resto de la división

$$\frac{6x^6+5x^5+(n+1)x^2-n}{5x-5}.$$

A) 55 B) 11/5 C) 12
D) 7 E) 35

14. En la siguiente división algebraica

$$\frac{mx^3+mx^2-5mx+2m}{x^2-2x-2};\ m\neq 0,$$

la suma de coeficientes del cociente es 12. Halle el término independiente del residuo.

A) 3 B) 12 C) 15
D) 21 E) 24

15. Calcule el valor de $(m+n)$ si el resto de la siguiente división es $R_{(x)}=-4x-1$.

$$\frac{3x^5+(m+9)x^3+nx^2-x+2}{x^2+3}$$

A) 1 B) 0 C) −1
D) 2 E) −2

16. Luego de efectuar la división

$$\frac{nx^3+n^2x^2-nx+n^3+n^2}{x+n+1}$$

se obtiene que la suma de coeficientes del cociente es igual a $f_{(n)}$. ¿Cuál es el valor de $f_{(1)}+f_{(2)}+\ldots+f_{(20)}$?

A) 2170 B) 2870 C) 3870
D) 20 E) 70

17. Dados los polinomios
dividendo: $D_{(x)}=x^3+bx^2+cx+d$
divisor: $d_{(x)}=3x^2+2bx+c$
cociente: $q_{(x)}=mx+n$
de una división exacta, calcule el valor de $9m(m+1)$.

A) $\frac{1}{3}$ B) 4 C) 1
D) 2 E) 18

18. Halle el resto de la división algebraica

$$\frac{(x^2+2x-1)^2-x+3}{x^2-1}.$$

A) $x-7$ B) 9 C) $x+5$
D) $-x+7$ E) $-x+3$

19. Halle el resto de la división

$$\frac{(8x-3)^{2n}+(6x-2)^{n}+4x+2}{2x-1}.$$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 0 E) −6

20. ¿Cuál es el resto de la división $\dfrac{x^8-x+1}{x^2+x+1}$?

A) $-2x$ B) $2x$ C) $3x$
D) $x+1$ E) $2x-1$

Nivel II

21. Si al dividir $5x^3+6x^4-1$ entre $x+3x^2-2$ se obtiene un resto de la forma $mx+n$, calcule el valor de $m-n$.

A) −4 B) −1 C) 0
D) 5 E) 4

22. Sea $q_{(x)}=ax^2+bx+c$ el cociente de la división de $2x^4+3x^3-8x^2+1-4x$ entre $x^2-(x+1)$. Calcule el valor de $(a-b-c)^2$.

A) −3 B) 4 C) 1
D) 2 E) 3

23. En el esquema de Horner mostrado (de una división de polinomios en x), determine el valor de $(m+n+p)-(a+b+c)$.

1	3	a	1	b	c
m	↓	9	d		
2			e	f	
				g	h
	n	−2	p	4	−3

A) 20 B) 18 C) 15
D) 5 E) −3

24. Calcule el valor de $(m+n)$ si se sabe que la división

$$\frac{3x^5+mx^3+nx^2-x+2}{x^2+3}$$

deja un residuo $5x-10$.

A) 11 B) 5 C) 1
D) 7 E) 4

25. Halle el resto de la división algebraica

$$\frac{2x^{119}+1}{x^2-x+1}.$$

A) $x-3$ B) $4-2x$ C) $3-2x$
D) $2x-3$ E) $3-x$

26. Al efectuar la división

$$\frac{8x^5+14x^4+5x^3+16x^2+3x+2}{4x^2+x+3}$$

se obtiene de residuo: $(5m+4n)x+(m+2n)$.

Encuentre el valor de $m^{\frac{m}{n}}$.

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 4
D) $-\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

27. Halle el residuo de la división algebraica

$$\frac{3+(x-3)^{3^{n+3}}}{x^3-26+27x-9x^2}.$$

A) 3 B) 2 C) 4
D) 5 E) 6

28. Halle el resto de la división algebraica

$$\frac{x+x^{199}+1}{\frac{x^5-1}{x-1}}.$$

A) $x^2(x-1)$ B) $x^3(x-1)$ C) $x(x-1)$
D) $-x^2(x+1)$ E) $x^4(x+1)$

29. Calcule el valor de $(a+b+c)$ si el resto de la división

$$\frac{ax^5+bx^4+cx^3-5x-3}{2x^3+x^2-x-2}$$

es $R_{(x)}=7x^2+8x-3$.

A) 21 B) 20 C) 30
D) 40 E) 50

30. Calcule el valor de n si el residuo de la división

$$\frac{(x+3)^n(x+1)^n+nx(x-1)(x+5)+1}{(x+2)^2}$$

es $R_{(x)}=2(1-18x)$. Considere n par.

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

31. En la siguiente división algebraica

$$\frac{2x^5+3x^4+bx^3+6bx^2+x+a}{x^2-x+b}$$

se sabe que el resto es $2x+3$ y que la suma de coeficientes del cociente es mayor que 15. Calcule $a\cdot b$.

A) 4 B) 9 C) 7
D) 2 E) 8

32. Calcule el valor de a si al dividir

$$\frac{x^{a+17}+x^{a+16}+x^{a+15}+\ldots+x^3+x^2+x+1}{x-1}$$

se observa que la suma de los coeficientes del cociente es igual a 90 veces su resto.

A) 13 B) 155 C) 160
D) 163 E) 165

33. Del esquema de Paolo Ruffini (de una división de polinomios en x)

	A	B	C	D	E	F
-1	↓	1	3	5	7	9
	e	d	c	b	a	0

calcule la suma de coeficientes del polinomio dividendo.

A) 100 B) -50 C) 50
D) -25 E) 0

34. Al dividir $P_{(x)}\equiv ax^4+bx^3+cx^2+3x+1$ entre x^2-x+1 se obtiene un cociente cuya suma de coeficientes es 22 y un resto $R_{(x)}=10x-1$. Calcule el valor de $a+c$.

A) 77 B) 78 C) 79
D) 80 E) 57

35. Al dividir $F_{(x)}$ entre $(4x^2-9)(x+3)$ se obtuvo como residuo $2(x-3)^2$. Halle el residuo de dividir $F_{(x)}$ entre $2x^2+9x+9$.

A) $-21x+$ B) $12x+3$ C) $-20x+11$
D) $2x+1$ E) $-3x+10$

36. Si se sabe que en la división del polinomio completo

$$F_{(x)}=ax^n+(3a-b)x^{n-1}+(5a-3b)x^{n-2}+(7a-5b)x^{n-3}+\ldots$$

entre $(ax-b)$ el residuo es $11a$; $(a\neq b)$, calcule el valor de n.

A) 5 B) 6 C) 4
D) 3 E) 7

37. ¿Qué valor toma $p\cdot q$ en la división algebraica

$$\frac{x^4+px^2+q}{x^2+x+1},$$

de modo que su resto sea idéntico a $3x+4$?

A) 4 B) -4 C) -1
D) -6 E) 6

38. Calcule el valor de $(b-a)$ si la división

$$\frac{ax^5+2(3+a)x^4+(12-a)x^3-(6-b)x^2+b(2x-1)}{x^2+2x-1}$$

deja un cociente que evaluado en $x=2$ es 39. Considere $\{a;b\}\subset\mathbb{Z}^+$.

A) 6 B) 4 C) 5
D) 1 E) -6

39. Calcule el residuo de la siguiente división

$$\frac{(x-1)^7-(x-2)^7-1}{x^2-3x+2}.$$

A) $x-1$ B) $x-2$ C) 1
D) 0 E) -1

40. Al efectuar la división algebraica

$$\frac{(x^2+1)^5+(x-1)^3+3x}{x^3-x^2+x-1}$$

se obtuvo un resto $R_{(x)}$.

Calcule el valor de $\dfrac{R_{(-1)}}{R_{(1)}}$.

A) $\frac{5}{7}$ B) $\frac{7}{5}$ C) $\frac{8}{7}$
D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{1}{7}$

41. Al dividir un polinomio $P_{(x)}$ entre el producto de $(x+1)(x+3)(x-2)$, el resto obtenido es x^2-5x+1. Calcule el resto de $P_{(x)}$ entre x^2-x-2.

A) $x+5$ B) $-2x+3$ C) $-4x+3$
D) $2x-1$ E) $-4x$

42. En la siguiente división algebraica

$$\frac{3x^{12}-5x^{10}+3x^3+3x^2-5x-5}{ax^2-b},\ a<4$$

determine el valor entero y positivo de a y b para que dicha división sea exacta.

A) $a=1$; $b=5$
B) $a=3$; $b=5$
C) $a=3$; $b=3$
D) $a=3$; $b=6$
E) $a=2$; $b=6$

43. Al efectuar la división algebraica

$$\frac{ax^4+bx^3+cx^2+x+3}{3x^2-x+1},$$

se obtuvo como residuo $2x+1$. Determine la relación correcta si el producto de los coeficientes del cociente es 8.

A) $c-a=9$
B) $|b|=2$
C) $|a|-|b|=13$
D) $|b-c|>9$
E) $ab>0$

44. Halle el resto de la división algebraica

$$\frac{(x+1)^{35}+7(x+1)^{28}+3(x+1)^{17}+3}{x^2+2x+2}.$$

A) $2x$ B) $2x-12$ C) $2x+5$
D) $2x+12$ E) $2x+7$

45. Se sabe que al dividir el polinomio $P_{(x)}$ entre $x^2-(1+b)x+b$ y $x^2-(b+2)x+2b$ se obtuvo por restos $7x-4$ y $5x-8$, respectivamente. Calcule la suma de coeficientes del resto de dividir $P_{(x)}$ entre $x^3-(b+3)x^2+(3b+2)x-2b$.

A) 3 B) 1 C) 4
D) 2 E) 0

46. Si al efectuar la división algebraica

$$\frac{abx^5+b^2x^4+bcx^3-abx+acx^2+c^2}{ax^2+bx+c}$$

se obtiene un resto acx, calcule $\dfrac{b(a+c)}{ac}$.

A) 0 B) -1 C) -2
D) -3 E) 1

47. Halle el resto de la división algebraica

$$\frac{x^3}{(x+1)(x+2)}$$

A) $7x+5$ B) $76x+2$ C) $7x+6$
D) $6x-1$ E) $3x-1$

48. El cociente de dividir un polinomio de tercer grado entre $2x-1$ es x^2+2x-3, y el residuo de dividir dicho polinomio entre $2x+1$ es 1. Halle el resto obtenido al dividir el mismo polinomio entre $2x-1$.

A) $-6{,}5$ B) $-1{,}5$ C) $4{,}5$
D) 4 E) 5

49. Dada la siguiente división exacta

$$\frac{abcx^3-(a^2c+b^2a+c^2b)x^2+(a^2b+b^2c+c^2a)x-abc}{\left(x-\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{c}{a}\right)}.$$

Si $abc\neq 0$, determine el valor de x que anula al cociente de la división.

A) $\dfrac{c}{b}$ B) $\dfrac{a}{b}$ C) 1
D) $\dfrac{b}{a}$ E) $\dfrac{b}{c}$

50. Calcule la suma de coeficientes del cociente de la división indicada

$$\frac{x^6-14x^4+29x^2-36}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

A) 13 B) 12 C) 18
D) 24 E) 6

51. Halle el resto en la división algebraica

$$\frac{(\sqrt{2}+1)x^4-(2\sqrt{2}+2)x^3-(\sqrt{2}+4)x+2}{x-\sqrt{2}-1}.$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

52. Si la división algebraica

$$\frac{ax^4+bx^3+16x-25}{2x^2-x+4}$$

deja residuo $3x-5$, calcule el valor de $a+b$.

A) 2 B) 11 C) 33
D) 36 E) 7

53. Calcule la suma de coeficientes del cociente que se obtiene al dividir

$$\frac{4x^{80}-2x^{79}+x+b}{x-1}.$$

A) 165
B) 162
C) 163
D) 164
E) 161

54. Halle el valor numérico del polinomio

$$P_{(x)}=x^4+3\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{3}x^2-(5+\sqrt[3]{5}-2\sqrt{3})x+\sqrt[3]{25}+4$$

cuando x toma el valor $\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}$.

A) $-1+\sqrt[3]{5}$
B) 0
C) $2\sqrt[3]{25}$
D) 7
E) $2\sqrt[3]{25}+7$

55. Halle el residuo de la división algebraica

$$\frac{1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{4n-1}}{(1+x)(1+x^2)}.$$

A) $(10-n)x+4$
B) $(4n-1)x+n$
C) 0
D) $2x+4^n$
E) x^2-x+1

56. Luego de efectuar la división algebraica

$$\frac{x^{19}+x^{16}+2x^{12}-7x^5+9x-1}{x^2+1},$$

dé el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. Su resto es un polinomio constante.
II. Su resto es $x+2$.
III. La división es exacta.
IV. Su resto es $x-2$.

A) VVFF B) FVFF C) VFFF
D) FVVV E) FFFF

57. Si el polimonio $2x^5+x^4+ax^2+bx+c$ es divisible por (x^4-1), halle $\frac{a+b}{a-b}$.

A) $\frac{3}{2}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $-\frac{2}{3}$ E) -1

58. Al efectuar la división algebraica

$$\frac{2x^5+7x^4-3x^3+5x+1}{x^3+3x^2-4x+k}$$

se obtiene un residuo de primer grado. Halle el residuo.

A) $14x+1$
B) $14x+3$
C) $3x+14$
D) $14x-2$
E) $14x+2$

59. Halle el coeficiente de aquel único término central que ofrece en su desarrollo el cociente de la división

$$\frac{ab(a^n+b^n)x^{n+2}-ab(a^nb^{-1}+b^na^{-1})x^{n+1}-abx^2+1}{(ax-1)(bx-1)},$$

$ab \neq 0$.

A) $a^{\frac{n}{2}}+b^{\frac{n}{2}}$

B) $a^{n-1}+b^{n-1}$

C) $a+b$

D) $a^{\frac{n-1}{2}}+b^{\frac{n-1}{2}}$

E) $a^{\frac{n+1}{2}}+b^{\frac{n+1}{2}}$

60. Al dividir $P_{(x)}$ entre (x^2+x+1) se obtuvo por residuo $x+1$, y al dividir $P_{(x)}$ entre (x^2-x+1) el resto es $x-1$. Calcule el resto de dividir $P_{(x)}$ entre (x^4+x^2+1).

A) $x+1$ B) x^3 C) x^3-x
D) x^3+x E) x^3-1

CLAVES
Problemas propuestos

NIVEL I

1 C	5 C	9 A	13 C	17 B
2 E	6 B	10 D	14 E	18 D
3 D	7 E	11 A	15 D	19 C
4 B	8 D	12 D	16 B	20 A

NIVEL II

21 C	29 B	37 B	45 A	53 C
22 B	30 B	38 A	46 B	54 D
23 B	31 E	39 D	47 C	55 C
24 A	32 D	40 A	48 A	56 B
25 C	33 B	41 C	49 E	57 E
26 E	34 E	42 B	50 D	58 B
27 B	35 A	43 D	51 C	59 A
28 D	36 A	44 D	52 E	60 D

Capítulo

VI

Federico Villarreal Villarreal

$$\frac{x^n - y^n}{x \mp y} = x^{n-1} \pm x^{n-2}y + x^{n-3}y \pm \cdots \pm y^{n-1}$$

$$T_k = x^{n-k}y^{k-1} \quad \text{o}$$

$$T_k = (-1)^{k-1}x^{n-k}y^{k-1}$$

Divisibilidad de polinomios y cocientes notables

CAPÍTULO VI

DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS Y COCIENTES NOTABLES

Objetivos

- Conocer y aplicar los teoremas sobre divisibilidad de polinomios.
- Interpretar la teoría de divisibilidad para su aplicación en la factorización de polinomios.
- Calcular cocientes de ciertas divisiones sin efectuarlas.
- Hallar un término cualquiera de un cociente notable.

Introducción

En la división numérica de los enteros, la divisibilidad nos da a conocer diversos criterios para reconocer divisiones exactas, con lo cual la parte operativa se reduce notablemente y sobresale la parte analítica.

En los polinomios, la división (de elementos: dividendo, divisor, cociente y residuo) también tiene propiedades de divisibilidad, que son herramientas para reconocer divisiones algebraicas exactas, pues esto permite encontrar las raíces en un polinomio, lo cual es fundamental en la teoría de ecuaciones.

Es necesario conocer al menos una teoría básica de divisibilidad de polinomios para afrontar con éxito situaciones problemáticas que se dan en los diversos capítulos del curso de álgebra.

Una aplicación de la divisibilidad de polinomios es la factorización; cuando decimos que un polinomio $P_{(x)}$ es divisible por otro polinomio $f_{(x)}$, debe entenderse que $f_{(x)}$ es un factor algebraico de $P_{(x)}$ y es muy probable que sea un factor primo de $P_{(x)}$. Existen diversos criterios de divisibilidad (teorema de divisibilidad, teorema del resto y/o cocientes notables) que nos facilitan la factorización de un polinomio sobre Q, criterios que nos van a permitir hallar los factores primos de dicho polinomio.

Asimismo, los cocientes notables (al igual que los productos notables) nos permiten encontrar cocientes de manera rápida y directa de una división algebraica (o no algebraica) y nos ayudan en la factorización de un polinomio.

Por ejemplo, dado el siguiente cociente notable

$$\frac{x^7-1}{x-1}=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$$

Entonces el polinomio x^7-1 queda factorizado así:

$$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

▸ DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS

DEFINICIÓN

Sean $f_{(x)}$ y $g_{(x)}$ dos polinomios de grados no nulos con coeficientes reales o complejos. Si el resto de la división de $f_{(x)}$ entre $g_{(x)}$ es idénticamente nulo, $g_{(x)}$ se llama divisor de $f_{(x)}$. Entonces, se dirá que $f_{(x)}$ es divisible por $g_{(x)}$ si existe un único polinomio $h_{(x)}$, tal que se verifique la identidad de división exacta.

$$f_{(x)} \text{ es divisible por } g_{(x)} \leftrightarrow \exists! h_{(x)};\ f_{(x)} \equiv g_{(x)} \cdot h_{(x)}$$

En efecto, si $g_{(x)}$ es divisor de $f_{(x)}$, el cociente de la división $f_{(x)}$ entre $g_{(x)}$ es $h_{(x)}$.

Si $f_{(x)}$ es divisible por $g_{(x)}$, entonces $g_{(x)}$ es un factor de $f_{(x)}$.

Ejemplos

1. ¿Es $f_{(x)}=x^2-x-2$ divisible por $x-2$?

   Resolución

   No es difícil darse cuenta que

   $f_{(x)} \equiv (x-2)(x+1)$, es decir, existe un $h_{(x)}=x+1$, de tal manera que $f_{(x)}=(x-2)\cdot h_{(x)}$

   Por lo tanto, f es divisible por $(x-2)$.

   Otro método

   Se tiene que $f_{(x)}$ es divisible por $x-2$ si y solo si el resto de $f_{(x)} \div (x-2)$ es nulo.

   Por el teorema del resto

   $$R=f_{(2)}=2^2-2-2=0$$

   Por lo tanto, f es divisible por $(x-2)$.

2. ¿Es $f_{(x)}=(x^2-4)(x+5)$ divisible por $g_{(x)}=x^2+3x-10$?

   Resolución

   $$f_{(x)}=(x^2-4)(x+5)=(x+2)\underbrace{(x-2)(x+5)}_{x^2+3x-10}$$

   $$\rightarrow\ f_{(x)}=(x^2+3x-10)(x+2)=g_{(x)}(x+2)$$

   Por lo tanto, $f_{(x)}$ es divisible por $g_{(x)}$.

   Otro método

   $$f_{(x)}=(x^2-4)(x+5)\equiv x^3+5x^2-4x-20;$$
   $$g_{(x)}=x^2+3x-10$$

   Dividiendo por la regla de Horner $f_{(x)} \div g_{(x)}$, se debe tener una división exacta

1	1	5	−4	−20
−3		−3	10	
10			−6	20
	1	2	0	0

   donde $h_{(x)}=x+2$

   Luego, $f_{(x)}=h_{(x)}\cdot g_{(x)}$.

   Por lo tanto, $f_{(x)}$ sí es divisible por $g_{(x)}$.

Teorema del factor

α es una raíz del polinomio $P_{(x)}$ si y solo si $(x-\alpha)$ es un factor.

Demostración

De la identidad fundamental de la división se tiene

$$P_{(x)} \equiv (x-\alpha)f_{(x)}+R$$

Como α es raíz, entonces

$$P_{(\alpha)}=(\alpha-\alpha)\,f_{(\alpha)}+R$$
$$0=0+R$$
$$R=0$$
$$\rightarrow\ P_{(x)} \equiv (x-\alpha)f_{(x)}$$

Con lo cual se prueba que $(x-\alpha)$ es un factor $P_{(x)}\equiv(x-\alpha)f_{(x)}$, pues $(x-\alpha)$ es factor

$\rightarrow P_{(\alpha)}=0$

Esto prueba que α es una raíz.

Ejemplos

1. ¿Es $x+1$ un factor de $f_{(x)}=x^5+x+2$?

Resolución

Si $x+1$ es un factor de $f_{(x)}$, necesariamente $f_{(x)}\div(x+1)$ es exacta.

Por el teorema del resto:

I. $x+1=0 \rightarrow x=-1$

II. $R=f_{(-1)}=(-1)^5+(-1)+2=0$

Por lo tanto, $x+1$ es un factor de $f_{(x)}$.

2. ¿Es $P_{(x)}=2x^3+5x^2-7x-12$ divisible por $x+3$?

Resolución

$P_{(x)}=2x^3+5x^2-7x-12$, evaluando en $x=-3$

$\rightarrow P_{(-3)}=0 \rightarrow (x+3)$ es un factor de $P_{(x)}$

$\rightarrow P_{(x)}\equiv(x+3)g_{(x)}$; $g_{(x)}$ es de segundo grado.

Para conocer $g_{(x)}$, se tendrá que dividir $P_{(x)}$ entre $x+3$ por la regla de Ruffini.

		+	+	
	2	5	−7	−12
$x=-3$		−6	3	12
	2	−1	−4	0

De donde $g_{(x)}=2x^2-x-4$.

TEOREMAS DE DIVISIBILIDAD

Teorema 1

Si $f_{(x)}$ es divisible por $g_{(x)}$ y $g_{(x)}$ es divisible por $h_{(x)}$, entonces $f_{(x)}$ es divisible por $h_{(x)}$.

Demostración

Por condición

$f_{(x)}\equiv m_{(x)}\cdot g_{(x)}$ (I)

$g_{(x)}\equiv n_{(x)}\cdot h_{(x)}$ (II)

Reemplazando (II) en (I)

$$f_{(x)}=m_{(x)}\cdot[n_{(x)}\cdot h_{(x)}]\equiv h_{(x)}[m_{(x)}\cdot n_{(x)}],$$

de donde vemos que $f_{(x)}$ es divisible por $h_{(x)}$.

Ejemplo

Si $f_{(x)}=x^4-16$ es divisible por $g_{(x)}=x^2-4$ y a su vez $g_{(x)}$ es divisible por $h_{(x)}=x-2$, se tendrá que $f_{(x)}$ es divisible por $h_{(x)}$.

Resolución

En efecto, por el teorema del resto en $\dfrac{f_{(x)}}{h_{(x)}}$

I. $h_{(x)}=x-2=0 \rightarrow x=2$

II. $R=f_{(2)}=2^4-16=0$

Por lo tanto, $f_{(x)}$ es divisible por $h_{(x)}$.

Teorema 2

Si $f_{(x)}$ y $g_{(x)}$ son divisibles por $h_{(x)}$, la suma y la diferencia de $f_{(x)}$ y $g_{(x)}$ es divisible por $h_{(x)}$.

Demostración

De la condición

$f_{(x)} \equiv m_{(x)} h_{(x)}$ (I)

$g_{(x)} \equiv n_{(x)} h_{(x)}$ (II)

De (I)+(II)

$f_{(x)} + g_{(x)} \equiv [m_{(x)} + n_{(x)}] h_{(x)}; \; m_{(x)} + n_{(x)} \not\equiv 0$

De (I)−(II)

$f_{(x)} - g_{(x)} = [m_{(x)} - n_{(x)}] h_{(x)}; \; m_{(x)} - n_{(x)} \not\equiv 0$

$\therefore \; f_{(x)} + g_{(x)} \wedge f_{(x)} - g_{(x)}$ son divisibles por $h_{(x)}$.

Ejemplo

Si $f_{(x)} = x^3 - 8$ es divisible por $x-2$;

$g_{(x)} = x^2 - 4$ es divisible por $x-2$,

¿entonces $f_{(x)} + g_{(x)}$ será divisible por $x-2$?

Resolución

En efecto, por el teorema del resto en $\dfrac{f_{(x)} + g_{(x)}}{x-2}$

I. $x-2=0 \;\rightarrow\; x=2$

II. $R = f_{(2)} + g_{(2)} = 2^3 - 8 + 2^2 - 4 = 0$

Por lo tanto, $f_{(x)} + g_{(x)}$ es divisible por $x-2$.

Teorema 3

Si $f_{(x)}$ es divisible por $g_{(x)}$, el producto de $f_{(x)}$ por cualquier otro polinomio no nulo $h_{(x)}$ es también divisible por $g_{(x)}$.

Demostración

De la condición $f_{(x)} \equiv m_{(x)} \cdot g_{(x)}$.

Multiplicando por $h_{(x)} \not\equiv 0$

$\rightarrow \; f_{(x)} \cdot h_{(x)} \equiv m_{(x)} \cdot g_{(x)} \cdot h_{(x)}$

Se observa que $f_{(x)} \cdot h_{(x)}$ es divisible por $g_{(x)}$.

Ejemplo

Si $f_{(x)} = x^2 - 4$ es divisible por $x+2$,

¿entonces $H_{(x)} = f_{(x)} \cdot g_{(x)}$ será divisible por $x+2$?

Resolución

Veamos por el teorema del resto:

I. $x+2=0 \;\rightarrow\; x=-2$ en $\dfrac{H_{(x)}}{x+2}$

II. $H_{(-2)} = [(-2)^2 - 4] \cdot g_{(-2)} = 0 \cdot g_{(-2)} = 0$

Por lo tanto, $H_{(x)}$ es divisible por $x+2$.

De los teoremas 2 y 3 se deduce que

I. Si cada uno de los polinomios: $f_{1(x)}, f_{2(x)}, \ldots, f_{k(x)}$ es divisible por $g_{(x)}$; el polinomio $f_{1(x)} g_{1(x)} + f_{2(x)} g_{2(x)} + \ldots + f_{k(x)} g_{k(x)}$, donde $g_{1(x)}, g_{2(x)}, \ldots, g_{k(x)}$ son unos polinomios arbitrarios, también es divisible por $g_{(x)}$.

II. Todo polinomio $f_{(x)}$ es divisible por cualquier polinomio de grado cero.

En efecto:

Sea $f_{(x)} \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ y $g_{(x)} = c$, donde c es constante no nula, un polinomio arbitrario de grado cero.

Entonces

$$f_{(x)} \equiv c\left(\frac{a_0}{c} x^n + \frac{a_1}{c} x^{n-1} + \ldots + \frac{a_n}{c}\right)$$

III. Si el polinomio $f_{(x)}$ es divisible por $g_{(x)}$, $f_{(x)}$ es también divisible por $c \cdot g_{(x)}$, donde c es una constante no nula.

En efecto, de la igualdad $f_{(x)} \equiv h_{(x)} g_{(x)}$ resulta la igualdad $f_{(x)} \equiv (c^{-1} h_{(x)}) \cdot (c \cdot g_{(x)})$.

IV. Los polinomios $f_{(x)}$ y $g_{(x)}$ son divisibles entre sí cuando y solo cuando $f_{(x)} = c \cdot g_{(x)}$, siendo c una constante no nula.

Teorema 4

Si el polinomio $P_{(x)}$ es divisible separadamente por los binomios $(x-a)$, $(x-b)$ y $(x-c)$ tal que $a \neq b \neq c$, entonces $P_{(x)}$ es divisible por el producto $(x-a)(x-b)(x-c)$.

Demostración

I. Como $P_{(x)}$ es divisible por $(x-a)$

$\rightarrow P_{(x)} \equiv (x-a)q_{1(x)}$

II. Como $P_{(x)}$ es divisible por $(x-b)$ / $a \neq b$

$\rightarrow q_{1(x)} = (x-b)q_{2(x)}$

III. Como $P_{(x)}$ es divisible por $(x-c)$ / $a \neq b \neq c$

$\rightarrow q_{2(x)} \equiv (x-c)\, q_{3(x)}$

De donde $P_{(x)} \equiv (x-a)(x-b)(x-c)q_{3(x)}$.

Luego se concluye que $P_{(x)}$ es divisible por $(x-a)(x-b)(x-c)$.

Nota

Recíprocamente, si $P_{(x)}$ es divisible por $(x-a)$ $(x-b)(x-c)$; $a \neq b \neq c$, será divisible separadamente por $(x-a)$, $(x-b)$ y $(x-c)$.

Ejemplos

1. Si $f_{(x)} = x^4 - 16$ es divisible por $x-2$ y también por $x+2$, ¿entonces $f_{(x)}$ será divisible por $(x-2)(x+2)$?

Resolución

Por el teorema del resto en $\dfrac{f_{(x)}}{x^2-4}$

I. $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4$

II. $f_{(x)} = (x^2)^2 - 16$

$\rightarrow R = 4^2 - 16 = 0$

Por lo tanto, f es divisible por $x^2 - 4$.

2. Si $P_{(x)} = 3x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + c$ es divisible por $(x-2)(x+3)(x+2)$,

calcule el valor de $4a - 2b + c$.

Resolución

Como $P_{(x)}$ es divisible por $(x-2)(x+3)(x+2)$, entonces será divisible separadamente por $(x-2)$, $(x+3)$ y $(x+2)$. Luego, $P_{(x)} \div (x+2)$ es exacta.

Por el teorema del resto: $P_{(-2)} = 0$

$\rightarrow P_{(-2)} = 3(-2)^4 + 2(-2)^3 + a(-2)^2 + b(-2) + c = 0$

$\rightarrow 48 - 16 + 4a - 2b + c = 0$

$\therefore 4a - 2b + c = -32$

Teorema 5

Si al dividir un polinomio $P_{(x)}$ entre $(x-a)$; $(x-b)$ y $(x-c)/a \neq b \neq c$ en forma separada deja el mismo resto en cada caso, entonces al dividir dicho polinomio entre $(x-a)(x-b)(x-c)$ dejará el mismo resto común.

Así

$P_{(x)} \div (x-a) \rightarrow R_{1(x)} = R$

$P_{(x)} \div (x-b) \rightarrow R_{2(x)} = R$

$P_{(x)} \div (x-c) \rightarrow R_{3(x)} = R$

$\rightarrow P_{(x)} \div (x-a)(x-b)(x-c)$

$\rightarrow R_{(x)} = R$

Demostración

I. $P_{(x)}-R$ es divisible entre $(x-a)$

$\rightarrow P_{(x)}-R\equiv(x-a)\,q_{1(x)}$

II. $P_{(x)}-R$ es divisible por $(x-b)$

$\rightarrow P_{(x)}-R\equiv(x-b)\,q_{2(x)}$

III. $P_{(x)}-R$ es divisible por $(x-c)$

$\rightarrow P_{(x)}-R\equiv(x-c)\,q_{3(x)}$

De (I), (II) y (III) por el teorema anterior

$P_{(x)}-R$ es divisible por $(x-a)(x-b)(x-c)$

$\rightarrow P_{(x)}-R\equiv(x-a)(x-b)(x-c)q_{(x)}$

$\rightarrow P_{(x)}\equiv(x-a)(x-b)(x-c)q_{(x)}+R$

Ejemplo

Sea $P_{(x)}=(x^2-3x+2)(x+1)+3$

En $\dfrac{P_{(x)}}{x-1}$, su resto es 3

En $\dfrac{P_{(x)}}{x-2}$, su resto es 3

En $\dfrac{P_{(x)}}{(x-1)(x-2)}$, ¿su resto también es 3?

Resolución

En efecto, por el teorema del resto

I. $(x-1)(x-2)=0 \rightarrow x^2-3x+2=0$

II. $P_{(x)}=\underbrace{(x^2-3x+2)}_{0}(x+1)+3$

$\rightarrow R=0(x+1)+3=3$

Por lo tanto, $\dfrac{P_{(x)}}{(x-1)(x-2)}$ deja también resto 3.

Teorema 6

En toda división de polinomios, si al dividendo y al divisor se les multiplica por un polinomio de grado no nulo, el cociente no se altera, pero el residuo queda multiplicado por dicho polinomio.

Demostración

I. $D_{(x)}\equiv d_{(x)}q_{(x)}+R_{(x)}$

II. Multiplicando por $S_{(x)}$; $S_{(x)}\not\equiv 0$

$$D_{(x)}\cdot S_{(x)}\equiv[d_{(x)}\cdot S_{(x)}]q_{(x)}+[R_{(x)}\cdot S_{(x)}]$$

De donde se observa que el residuo queda multiplicado por $S_{(x)}$ y el cociente es el mismo.

Ejemplo

Halle el resto en $\dfrac{2x^{34}-7x+4}{x^2-x+1}$.

Resolución

Multiplicando el dividendo y divisor por $x+1$

$$\frac{(2x^{34}-7x+4)(x+1)}{(x^2-x+1)(x+1)} \rightarrow \frac{(2x^{34}-7x+4)(x+1)}{x^3+1}$$

Por el teorema del resto: $x^3+1=0 \rightarrow x^3=-1$

Luego, el resto es $[2(x^3)^{11}\cdot x-7x+4](x+1)$

$R'_{(x)}=[2(-1)^{11}\cdot x-7x+4](x+1)$

$R'_{(x)}=(-9x+4)(x+1)$

Como el resto quedó multiplicado por $x+1$, se tendrá que $R_{(x)}=-9x+4$.

Teorema 7

En toda división de polinomios, si al dividendo y al divisor se les divide por un polinomio de grado no nulo, el cociente no se altera, pero el residuo queda dividido por dicho polinomio.

Demostración

I. $D_{(x)}\equiv d_{(x)}q_{(x)}+R_{(x)}$

II. Dividiendo por $S_{(x)}\not\equiv 0$

$$\frac{D_{(x)}}{S_{(x)}}\equiv\frac{d_{(x)}}{S_{(x)}}\cdot q_{(x)}+\frac{R_{(x)}}{S_{(x)}}$$

De donde se observa que el residuo queda dividido entre $S_{(x)}$ y el cociente es el mismo.

Ejemplos

1. Halle el residuo en

$$\frac{(2x+1)(x-2)^3(x+1)(x+2)}{(x-2)^4(x+1)}.$$

Resolución

Dividiendo al dividendo y divisor por $(x-2)^3(x+1)$ se tiene

$$\frac{(2x+1)(x+2)}{x-2}.$$

Por el teorema del resto: $x-2=0 \rightarrow x=2$

$\therefore\ R'_{(x)}=(2(2)+1)(2+2)=20$

Como el resto quedó dividido por $(x-2)^3(x+1)$

$\rightarrow R_{(x)}=20(x-2)^3(x+1)$

2. Sea $P_{(x)}$ un polinomio con las siguientes características:

I. Mónico cúbico

II. Divisible por x^2-1

III. $P_{(2)}=12$

¿Cuánto vale su término independiente?

Resolución

Un polinomio mónico y cúbico es de la forma $P_{(x)}=x^3+mx^2+nx+q$, como es divisible por x^2-1 entonces escribimos

$$P_{(x)}=(x^2-1)(x+a)$$

Además, $P_{(2)}=(2^2-1)(2+a)=12$

$\rightarrow 3(a+2)=12 \rightarrow a=2$

$\rightarrow P_{(x)}=(x^2-1)(x+2)$

Luego, su término independiente

T.I. $P=P_{(0)}=(0^2-1)(0+2)=-2$

Ejercicios para el lector

Halle el resto en cada una de las divisiones.

I. $\dfrac{5(x+1)^{28}-x-9}{x^2+3x+3}$

II. $\dfrac{(x^2-2x+1)^{31}+x}{(x-1)^2-x}$

III. $\dfrac{x^{37}+x-15}{x^3+x^2+x+1}$

IV. $\dfrac{(2x-5)^7(3x+1)(x-2)^5}{(3x+1)(x-2)^6}$

V. $\dfrac{x^{332}+4x^{15}-10x+12}{x^3-1-x(x-1)}$

VI. $\dfrac{x^7+2x^2-1}{x^3+x^2-x-1}$

VII. $\dfrac{2x^5(x-2)^5-(x^2-x)+1}{x^2-2x-1}$

VIII. $\dfrac{(x-4)^{201}+(x-3)^{210}-x+2}{(x-3)(x-4)}$

IX. $\dfrac{(1-x)^{2010}-x^{2015}-3x+1}{x^2-x}$

X. $\dfrac{(x^2-1)(x+2)^2-(x^2+x-2)+x+2}{x^2+3x+2}$

XI. $\dfrac{(x-4)^{2n^2}+(x-5)^{2n-1}+8}{(x-4)(x-5)}$; $n\in\mathbb{Z}^+$

XII. $\dfrac{(x-1)^{n+2}+x^{2n+1}+x+1}{x^2-x+1}$; $n\geq 2011$

COCIENTES NOTABLES

DEFINICIÓN

Llamaremos cocientes notables (CN) a los cocientes que se obtienen en forma directa, es decir, sin la necesidad de efectuar la operación de división.

Las divisiones indicadas que dan origen a estos cocientes notables son de la forma

$$\boxed{\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y};\quad n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2}$$

Mediante la combinación de los signos se presentarán cuatro casos.

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} \qquad \frac{x^n + y^n}{x + y}$$

$$\frac{x^n - y^n}{x + y} \qquad \frac{x^n + y^n}{x - y}$$

Caso I

$$\boxed{\frac{x^n - y^n}{x - y};\quad n \in \mathbb{N}}$$

a. **Veamos su resto**

Por el teorema del resto: $x-y=0 \rightarrow x=y$; luego se tendrá $R=y^n-y^n=0$.

Nos indica que para cualquier valor natural de n la división será exacta.

b. **Su cociente**

Efectuando la división por la regla de Ruffini $\left(\frac{x^n - y^n}{x - y}\right)$ se tendrá

	1	0	0	...	0	$-y^n$
$x=y$	↓	y	y^2	y^3		y^n
	1	y	y^2	y^3 ...	y^{n-1}	0

Siendo el cociente de la forma

$$x^{n-1}+yx^{n-2}+y^2x^{n-3}+\ldots+y^{n-1}$$

En general, el cociente se obtendrá de la siguiente forma:

$$\boxed{\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+y^{n-1};\ n \in \mathbb{N}}$$

Observe que todos los términos tienen signo (+)

Ejemplos

1. Simplifique

a. $\dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1$

b. $\dfrac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1$

c. $\dfrac{x^4-1}{x-1} = x^3+x^2+x+1$

En general, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n+1}+x^{n+2}+\ldots+x+1$$

2. Simplifique

a. $\dfrac{x^3-y^3}{x-y} = x^2+xy+y^2$

b. $\dfrac{x^4-y^4}{x-y} = x^3+x^2y+xy^2+y^3$

c. $\dfrac{x^5-y^5}{x-y} = x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$

3. En $\dfrac{x^{-7}-y^{-7}}{x-y}$ no se genera cociente notable porque $-7 \notin \mathbb{N}$.

4. En $\dfrac{x^{3/2}-y^{3/2}}{x-y}$ no se genera cociente notable porque $3/2 \notin \mathbb{N}$.

5. Halle el cociente notable generado por $\dfrac{(3x)^5-1}{(3x)-1}$.

Resolución

Su cociente notable es

$$(3x)^4+(3x)^3+(3x)^2+(3x)+1,$$

que es equivalente a

$$81x^4+27x^3+9x^2+3x+1.$$

TEOREMA DEL TÉRMINO GENERAL

Finalidad

El teorema tiene por finalidad calcular un término cualquiera (t_k) del cociente sin necesidad de efectuar el desarrollo de dicha división.

Teorema

Dado el cociente notable $\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$, un término cualesquiera t_k es igual

$$t_k=x^{n-k}y^{k-1};\quad k=1;2;3;\ldots;n$$

Demostración

$$\frac{x^n-x^n}{x-y}=\underbrace{x^{n-1}}_{t_1}+\underbrace{x^{n-2}y}_{t_2}+\underbrace{x^{n-3}y^2}_{t_3}+$$

$$+\underbrace{x^{n-4}y^3}_{t_4}+\ldots+\underbrace{y^{n-1}}_{t_n}$$

Vemos

$t_1=x^{n-1}$ → término de lugar 1

$t_2=x^{n-2}y$ → término de lugar 2

$t_3=x^{n-3}y^2$ → término de lugar 3

⋮ ⋮

$t_k=??$ → término de lugar k

Por inducción

$t_1=x^{n-1}y^{1-1}$

$t_2=x^{n-2}y^{2-1}$

$t_3=x^{n-3}y^{3-1}$

⋮ ⋮

$$t_k=x^{n-k}y^{k-1};\quad k=1;2;3;\ldots;n$$

Ejemplos

1. En el cociente notable de $\dfrac{x^{60}-y^{60}}{x-y}$, halle el término de lugar 15.

Resolución

Recordando en $\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$ → $t_k=x^{n-k}y^{k-1}$

En el problema: $n=60 \wedge k=15$

→ $t_{15}=x^{60-15}\cdot y^{15-1}$

∴ $t_{15}=x^{45}y^{14}$

2. En el cociente notable de $\dfrac{a^{40}-b^{80}}{a-b^2}$, halle el término de lugar 21.

Resolución

Para aplicar la fórmula general, hay que expresarlo antes como

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}.$$

Así

$$\frac{a^{40}-(b^2)^{40}}{a-b^2}$$

Luego, el término de lugar 21 es

$$t_{21}=(a)^{40-21}\cdot(b^2)^{21-1}=a^{19}b^{40}$$

Nota

I. El cociente notable de $\frac{x^n-y^n}{x-y}$ es un polinomio homogéneo de grado de homogeneidad $(n-1)$; es un polinomio de n términos completo y ordenado con respecto a ambas variables.

II. Si contamos los términos a partir del último, para hallar el término de lugar k solo intercambiamos los exponentes así

$$\overline{t_k}=x^{k-1}y^{n-k}$$

3. ¿Es x^5y^{10} un término del cociente notable de $\frac{x^{16}-y^{16}}{x-y}$?

Resolución

Como el término es de grado 15 y 15 es el grado de homogeneidad del cociente notable generado por $\frac{x^{16}-y^{16}}{x-y}\rightarrow x^5y^{10}$, entonces x^5y^{10} sí es un término de su cociente notable.

4. ¿Es x^5y^{11} un término del cociente notable de $\frac{x^{19}-y^{19}}{x-y}$?

Resolución

No, puesto que el grado de homogeneidad del cociente notable será 18 y este término es de grado 16.

5. Del cociente notable generado por $\frac{x^{19}-y^{19}}{x-y}$, calcule el valor de $\left(\frac{t_{17}\cdot t_{18}}{t_{16}\cdot y^{18}}\right)$.

Resolución

Utilizando la fórmula general se tiene:

$$t_{17}=x^{19-17}\cdot y^{17-1}=x^2y^{16}$$

$$t_{18}=x^{19-18}\cdot y^{18-1}=xy^{17}$$

$$t_{16}=x^{19-16}\cdot y^{16-1}=x^3y^{15}$$

Luego lo buscado

$$\frac{t_{17}\cdot t_{18}}{t_{16}\cdot y^{18}}=\frac{x^2y^{16}\cdot xy^{17}}{x^3y^{15}\cdot y^{18}}=1$$

Caso II

$$\boxed{\frac{x^n-y^n}{x+y};\ n\in\mathbf{N}}$$

a. **Veamos su resto**

Por el teorema del resto: $x+y=0$

$\rightarrow\ x=-y\ \rightarrow\ R=(-y)^n-y^n$

$\rightarrow$ Si $\begin{cases} n \text{ es par} \rightarrow R=0 \\ n \text{ es impar} \rightarrow R=-2y^n \end{cases}$

b. **Su cociente**

Por la regla de Ruffini

I. Si n es par

	1	0	0	0	...	0	$-y^n$
$x=-y$	↓	$-y$	y^2	$-y^3$	...	$-y^{n-1}$	y^n
	1	$-y$	y^2	$-y^3$	...	$-y^{n-1}$	0

Entonces

$$\frac{x^n-y^n}{x+y}=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\ldots-y^{n-1}$$

II. Si n es impar

	1	0	0	0	...	0	$-y^n$
$x=-y$	↓	$-y$	y^2	$-y^3$	...	y^{n-1}	$-y^n$
	1	$-y$	y^2	$-y^3$	...	y^{n-1}	$-2y^n$

Entonces

$$\frac{x^n - y^n}{x+y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + y^{n-1} + \frac{-2y^n}{x+y}$$

Recuerde

En una división inexacta se tiene

$$D_{(x)} \equiv d_{(x)}q_{(x)} + R_{(x)}$$

$$\leftrightarrow \frac{D_{(x)}}{d_{(x)}} = q_{(x)} + \frac{R_{(x)}}{d_{(x)}}$$

Su cociente sigue siendo notable, pero la división no es exacta.

De este modo lo resumimos en el siguiente cuadro.

División indicada	Cociente notable	Resto o residuo
$\frac{x^n - y^n}{x-y}$	$x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+y^{n-1}$	nulo $\forall\, n \in \mathbb{N}$
$\frac{x^n - y^n}{x+y}$	$x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\ldots-y^{n-1}$ $x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y-\ldots+y^{n-1}$	nulo si n es par; $-2y^n$ si n es impar
$\frac{x^n + y^n}{x+y}$	$x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\ldots+y^{n-1}$ $x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots-y^{n-1}$	nulo si n es impar; $2y^n$ si n es par
$\frac{x^n + y^n}{x-y}$	$x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+y^{n-1}$	$2y^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

En general:

Se tendrá también que algunas divisiones de la forma $\dfrac{x^n \pm y^m}{x^a \pm y^b}$ generan cocientes notables. La única condición necesaria y suficiente es que

$$\boxed{\frac{n}{a}=\frac{m}{b}=r;\quad r\in\mathbb{N}}$$

donde r representará el número de términos del cociente notable.

Ejemplos

1. ¿Genera $\dfrac{x^{40}-y^{30}}{x^4-y^3}$ cociente notable?

   Veamos $\dfrac{40}{4}=\dfrac{30}{3}=10$. Sí genera cociente notable y tendrá 10 términos.

2. ¿Genera $\dfrac{x^{30}-y^{30}}{x^4+y^4}$ cociente notable?

   Veamos $\dfrac{30}{4}=\dfrac{30}{4}=\dfrac{15}{2}$. No es entero, entonces no genera cociente notable.

3. ¿Qué lugar ocupa el término de grado 34 en el cociente notable generado por $\dfrac{x^{40}-y^{20}}{x^2-y}$?

   Resolución

   Sea el término del lugar k en

   $$\frac{(x^2)^{20}-y^{20}}{x^2-y};\quad t_k=(x^2)^{20-k}y^{k-1}$$

   Por dato, el grado del término será

   $$2(20-k)+k-1=34 \quad\rightarrow\quad k=5$$

   Luego, el término en mención ocupa el quinto lugar.

4. Calcule m si la división $\dfrac{x^{13m+1}-y^{8m+2}}{x^{m+1}-y^m}$ genera cociente notable.

   Resolución

   Si genera cociente notable, entonces

   $$\underbrace{\frac{13m+1}{m+1}=\frac{8m+2}{m}}_{(*)}=r;\quad n\in\mathbb{N}$$

   De (*)

   $$\frac{13m+1}{m+1}=\frac{8m+2}{m}$$

   $\rightarrow\ 13m^2+m=8m^2+10m+2$

   $\rightarrow\ 5m^2-9m-2=0$

   $\leftrightarrow\ (5m+1)(m-2)=0;\ m\in\mathbb{Z}^+\ \rightarrow\ m=2$

   Asimismo, para $m=2$ se obtiene $r=9$.

   Por lo tanto, para $m=2$ se obtendrá un cociente notable de 9 términos.

BIOGRAFÍA

René Descartes

Nació en La Haye, Touraine, Francia, el 31 de marzo de 1596 y murió en Estocolmo el 11 de febrero de 1650. Fue un filósofo, matemático y científico francés, considerado como el padre de la filosofía moderna. Su obra más conocida es *El discurso del método* (1637).

Fue el tercer hijo del jurista Joachim Descartes y de Jeanne Brochard, quien murió un año después del nacimiento de René, durante el parto de un niño que tampoco sobrevivió. René y sus dos hermanos fueron educados por su abuela, pues su padre los dejó al contraer nuevas nupcias con una doncella inglesa.

En 1604 ingresó a estudiar en La Flèche, un colegio jesuita, durante ocho años; ahí adquirió una sólida formación en la cultura clásica, donde aprendió latín y griego con las lecturas de autores como Cicerón, Horacio y Virgilio, por un lado, y Homero, Píndaro y Platón, por otro. También estuvo en contacto con los textos filosóficos de Aristóteles, así como con otros de tipo matemático, de los que obtuvo nociones de las matemáticas puras y aplicadas como la astronomía, la música y la arquitectura. Posteriormente, ingresó a la Universidad de Poitiers para estudiar Derecho y Medicina, de donde se gradúa en 1616.

Dos años después se enlistó en el ejército del príncipe Mauricio de Nassau y fue enviado a Breda, en donde conoció a Isaac Beeckman, el mejor matemático de Holanda de la época, gracias a que resolvió un problema matemático que se encontraba en un cartel en medio de la calle. El contacto con Beeckman estimuló en gran medida el interés de Descartes por las matemáticas y la física.

Tras abandonar su carrera militar, Descartes viajó por Alemania y los Países Bajos, y regresó a Francia en 1622 para vender sus posesiones y asegurarse así una vida independiente. Pasó una temporada en Italia (1623-1625) y se instaló luego en París, donde se relacionó con la mayoría de científicos de la época. En 1628 decidió irse a Holanda, pues consideró que era el lugar más favorable para cumplir los objetivos filosóficos y científicos que se había fijado, y residió allí hasta 1649.

Durante el tiempo que permaneció en ese país, un poco más de veinte años, escribió y publicó sus principales obras: *El discurso del método*, *Dióptrica*, *Meteoros* y *Geometría*, en 1637; las *Meditaciones metafísicas*, en 1641; los *Principios de la filosofía*, en 1644, y el *Tratado de las pasiones humanas*, en 1650.

En septiembre de 1649, la reina Cristina de Suecia, admiradora suya, invitó a Descartes a Estocolmo, porque requería de sus servicios como profesor de filosofía. Cinco meses después, el 11 de febrero de 1650, a los 53 años de edad, Descartes murió de neumonía.

Algunos han especulado sobre la posibilidad de que hubiese sido envenenado por los luteranos (para impedir que un católico influyese en la reina sueca), pero, probablemente, las frías madrugadas de Estocolmo propiciaron su muerte, debido a que la reina iniciaba sus clases diarias a las 5 de la mañana, a pesar de que a Descartes se le había hecho costumbre, desde muy niño, levantarse cerca del mediodía.

En 1676 se exhumaron sus restos, y fueron colocados en un ataúd de cobre y trasladados a París para ser sepultados en la iglesia de Sainte-Geneviève-du-Mont. Sin embargo, durante la Revolución francesa sus restos fueron removidos y colocados en el Panthéon, la basílica dedicada a los grandes hombres de la nación francesa. Nuevamente, en 1819, los restos de René Descartes cambiaron de lugar y fueron llevados esta vez a la iglesia de Saint-Germain-des-Prés, donde se encuentran en la actualidad.

El legado que Descartes ha dejado es extraordinario. Considerado como el padre del mecanicismo, aplicó las matemáticas a las ciencias y a la filosofía. También creó el método deductivo, la geometría analítica e introdujo un sistema de coordenadas, llamadas cartesianas en su honor. Además, fue el fundador del racionalismo. Logró influenciar en las generaciones posteriores debido a que su obra marcó un antes y un después en la historia del pensamiento, consiguiendo dejar el camino abierto hacia una concepción moderna del mundo.

Fuente:

http://es.wikipedia.org/wiki/René_Descartes

http://www.biografiasyvidas.com/biografia/d/descartes.htm

http://www.webdianoia.com/moderna/descartes/desc_bio.htm

Problemas RESUELTOS

Problema 1

Halle un polinomio mónico cuadrático que sea divisible por $(x-2)$ y que tenga por suma de coeficientes a: -4.

Resolución

- Si $P_{(x)}$ es un cuadrático divisible por $(x-2)$, será de la forma $P_{(x)}=(x-2)q_{(x)}$.
- Si $P_{(x)}$ es mónico, entonces $q_{(x)}$ es también mónico y será lineal, es decir, $q_{(x)}=x+a$.

  Luego, $P_{(x)}=(x-2)(x+a)$
- Recordando que la suma de coeficientes se consigue con $P_{(1)}$ y se tiene como dato

  $P_{(1)}=(1-2)(1+a)=-4 \quad \rightarrow \quad -1-a=-4$

  $\rightarrow \quad a=3$

  Por lo tanto, el polinomio buscado es

  $P_{(x)}=(x-2)(x+3)$

Problema 2

Halle un polinomio cuadrado perfecto de segundo grado y de coeficientes enteros tal que su término lineal es $6x$.

Resolución

Si es cuadrado perfecto de segundo grado, será de la forma

$P_{(x)}=(ax+b)^2$,

que es equivalente a

$P_{(x)}=a^2x^2+2abx+b^2$.

Por dato

$2ab=6 \quad \rightarrow \quad ab=3$

Como $P_{(x)}$ es de coeficientes enteros, se presentan dos casos:

$a \cdot b=3$

$\downarrow\downarrow$

$1 \quad 3 \quad \rightarrow \quad P_{(x)}=(x+3)^2=x^2+6x+9$

$3 \quad 1 \quad \rightarrow \quad P_{(x)}=(3x+1)^2=9x^2+6x+1$

Problema 3

Halle un polinomio cuadrático que sea divisible por $x-3$ y $x+2$, cuyo término independiente es -18.

Resolución

- Si es divisible por $x-3$ y $x+2$, el polinomio $P_{(x)}$ es de la forma

  $P_{(x)}=(x-3)(x+2)q_{(x)}$
- Si $P_{(x)}$ es cuadrático, entonces $q_{(x)}$ es constante.

  Luego, $P_{(x)}=(x-3)(x+2)\cdot q$

  Del dato del término independiente $P_{(0)}=-18$

  $P_{(0)}=(-3)(2)q=-18 \quad \rightarrow \quad q=3$

  $\therefore \quad P_{(x)}=3(x-3)(x+2)$

Problema 4

Dado un polinomio $P_{(x)}$, tal que

I. $P_{(x)}-2$ es divisible por $x-2$;

II. $P_{(x)}+2$ es divisible por $x+2$,

calcule el resto de dividir $P_{(x)}$ entre x^2-4.

Resolución

De los datos

I. $P_{(x)}-2$ es divisible por $x-2$

$\rightarrow \quad P_{(x)}-2\equiv(x-2)q_{1(x)}$

$\rightarrow \quad P_{(x)}=(x-2)q_{1(x)}+2 \qquad (\alpha)$

II. $P_{(x)}+2$ es divisible por $x+2$

$\rightarrow \quad P_{(x)}+2\equiv(x+2)q_{2(x)}$

$\rightarrow \quad P_{(x)}\equiv(x+2)q_{2(x)}-2 \qquad (\beta)$

III. Sea $Ax+B$ el resto de dividir $P_{(x)}$ entre x^2-4

$\rightarrow \quad P_{(x)}\equiv(x^2-4)Q_{(x)}+Ax+B \quad (*)$

Si $x=2$, en (α) y (*) tenemos

$$P_{(2)} = \underbrace{\cancel{(2-2)q_{1(2)}}}_{0} + 2 = \underbrace{\cancel{(2^2-4)Q_{(2)}}}_{0} + 2A + B$$

$$\rightarrow \quad 2A+B=2 \qquad (\gamma)$$

Si $x=-2$, en (β) y (*) tenemos

$$P_{(-2)} = \underbrace{\cancel{(-2+2)q_2(-2)}}_{0} - 2 = \underbrace{\cancel{\left[(-2)^2-4\right]Q_{(-2)}}}_{0} - 2A + B$$

$$\rightarrow \quad -2A+B=-2 \quad \rightarrow \quad 2A-B=2 \qquad (\theta)$$

De (γ) y (θ) se obtiene $A=1$; $B=0$.

Por lo tanto, el residuo buscado es: x.

Problema 5

Halle el polinomio $P_{(x)}$ de tercer grado que sea divisible entre $(x-2)$ y $(x+3)$, cuya suma de coeficientes es -4 y tenga por término independiente a 6.

Resolución

Como el polinomio $P_{(x)}$ es divisible por $(x-2)$ y $(x-3)$, entonces será divisible por el producto.

$$\rightarrow \quad P_{(x)} \equiv \underbrace{(x-2)(x+3)}_{2.^{\circ}\text{ grado}} \cdot \underbrace{q_{(x)}}_{1.^{\text{er}}\text{ grado}}$$

Sea $q_{(x)}=ax+b$

$$\rightarrow \quad P_{(x)}=(x-2)(x+3)(ax+b)$$

1. Suma de coeficientes

$$P_{(1)}=(1-2)(1+3)(a+b)=-4$$

2. Término independiente

$$P_{(0)}=(0-2)(0+3)(a(0)+b)=6$$

$$\rightarrow \quad (-2)(3)b=6 \quad \rightarrow \quad b=-1$$

En (1): $a=2$

$$\therefore \quad P_{(x)}=(x-2)(x+3)(2x-1)$$

Problema 6

Al dividir un polinomio $P_{(x)}$ entre $(x+1)$ y $(x-1)$ se obtienen como restos 2 y 4, respectivamente. Halle el resto de dividir dicho polinomio entre x^2-1.

Resolución

De los datos:

$$P_{(x)} \div (x+1) \quad \rightarrow \quad R=P_{(-1)}=2$$

$$P_{(x)} \div (x-1) \quad \rightarrow \quad R=P_{(1)}=4$$

Además

$$P_{(x)} \div \left(x^2-1\right) \quad \rightarrow \quad R_{(x)}=ax+b=???$$

De donde

$$P_{(x)} \equiv \left(x^2-1\right)q_{(x)}+ax+b$$

Evaluando en

$$x=1: P_{(1)}=a+b=4 \qquad (\text{I})$$

$$x=-1: P_{(-1)}=-a+b=2 \qquad (\text{II})$$

Sumando (I) $\wedge$ (II)

$$2b = 6 \quad \rightarrow \quad b=3$$

De (I): $a+1=4 \quad \rightarrow \quad a=1$

$$\therefore \quad R_{(x)}=x+3$$

Problema 7

Un polinomio $P_{(x)}$ de tercer grado se divide separadamente entre $(x-1)$; $(x-2)$ y $(x+3)$, dando como resto común 5. Además, al dividirlo entre $x+1$ da un resto igual a 29. Calcule el término independiente de $P_{(x)}$.

Resolución

I. Se sabe que al dividir $P_{(x)}$ entre $(x-1)$; $(x-2)$ y $(x+3)$, separadamente, deja el mismo residuo, que es 5.

Entonces, al dividir el polinomio $P_{(x)}$ entre $(x-1)(x-2)(x-3)$ dejará al mismo resto 5.

$$P_{(x)} \equiv \underbrace{(x-1)(x-2)(x+3)}_{3.^{er}\text{ grado}} \underbrace{q_{(x)}}_{\text{grado cero}} + 5$$

$$\therefore\ P_{(x)}=(x-1)(x-2)(x+3)q+5 \qquad (\alpha)$$

II. $P_{(x)} \div (x+1) \ \rightarrow\ R=P_{(-1)}=29$

En (α) hacemos $x=-1$

$\rightarrow\ P_{(-)}=(-1-1)(-1-2)(-1+3)q+5=29$

$\rightarrow\ (-2)(-3)(2)q=24 \ \rightarrow\ q=2$

De (I) y (II)

$P_{(x)}=2(x-1)(x-2)(x+3)+5$

Luego, su término independiente es

$P_{(0)}=2(-1)(-2)(3)+5=17$

Problema 8

Al dividir $P_{(x)}$ entre $(x+1)$ se obtuvo como resto 2. ¿Qué resto se obtendrá al dividir $(P_{(x)})^{10}$ entre $(x+1)$?

Resolución

Por el teorema del resto

I. $P_{(x)} \div (x+1) \ \rightarrow\ R_1=P_{(-1)}=2 \qquad$ (I)

II. $P^{10}_{(x)} \div (x+1) \ \rightarrow\ R_2=P^{10}_{(-1)} \qquad$ (II)

Por lo tanto, de (I) y (II)

$R_2=2^{10}=1024$

Problema 9

Halle el resto de dividir $x^{166}-1$ entre x^3+x^2+x+1.

Resolución

Multiplicando al dividendo y al divisor por $x-1$, se tiene

$$\frac{(x^{166}-1)(x-1)}{(x-1)(x^3+x^2+x+1)} \equiv \frac{(x^{166}-1)(x-1)}{x^4-1}$$

Por el teorema del resto: $x^4-1=0 \ \rightarrow\ x^4=1$

En el dividendo: $\left((x^4)^{41}x^2-1\right)(x-1)$

$\rightarrow\ R_{1(x)}=(1^{41}x^2-1)(x-1)$

$R_{1(x)}=(x^2-1)(x-1)$

Como el residuo quedó multiplicado por $(x-1)$

$\rightarrow\ R_{(x)}=x^2-1$

Problema 10

Si $f_{(x)}=ax^5+3x^4+\alpha x^3+3x^2-2x-(a+5)$ es divisible por $g_{(x)}=x^4-bx^3+2x^2+bx-\beta$, además $g_{(x)}$ es divisible por $h_{(x)}=(x^2-1)(x^2+\lambda)$, calcule el valor de $(\alpha+\beta)$.

Resolución

Si $f_{(x)}$ es divisible por $g_{(x)}$ y $g_{(x)}$ es divisible por $h_{(x)}$ y $h_{(x)}$ es divisible por $x-1$, entonces tanto $f_{(x)}$ y $g_{(x)}$ son divisibles por $x-1$, de donde:

$f_{(1)}=0 \ \rightarrow\ a+3+\alpha+3-2-a-5=0 \ \rightarrow\ \alpha=1$

$g_{(1)}=0 \ \rightarrow\ 1-b+2+b-\beta=0 \ \rightarrow\ \beta=3$

$\therefore\ \alpha+\beta=4$

Problema 11

Si los polinomios

$f_{(x)}=x^2+ax+6$ y $g_{(x)}=x^2+bx+3$

son divisibles por $h_{(x)}=2x+c$, calcule el valor de $(ac-bc)$.

Resolución

Como f y g son divisibles por h, entonces $(f-g)$ es divisible por h.

De donde

$$(x^2+ax+6)-(x^2+bx+3)\equiv(2x+c)\,m_{(x)}$$

$$\rightarrow\ (a-b)x+3\equiv(2x+c)\,m_{(x)}$$

Por identidad: $m_{(x)}=m$ constante $(m\neq 0)$

$$(a-b)x+3\equiv 2mx+cm$$

$$\rightarrow \begin{cases} a-b=2m & \text{(I)} \\ 3=cm & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) ÷ (II)

$$\frac{a-b}{3}=\frac{2m}{cm}\ \rightarrow\ ac-bc=6$$

$\therefore\ ac-bc=6$

Problema 12

Si el polinomio $P_{(x)}=x^{11}+\lambda x^9+x^7$ es divisible por $f_{(x)}=x^2-x+1$, calcule el valor de λ.

Resolución

Como $P_{(x)}=x^7(x^4+\lambda x^2+1)$ es divisible por x^2-x+1, entonces $x^4+\lambda x^2+1$ es divisible por x^2-x+1.

Luego, por el método de Horner

		+	+		
1	1	0	λ	0	1
1		1	-1		
			1	-1	
-1				λ	$-\lambda$
	1	1	λ	$\lambda-1$	$1-\lambda$

Como $\lambda-1=0\ \rightarrow\ \lambda=1$

Problema 13

Halle el resto en la siguiente división.

$$\frac{(x-1)(x^{4^n-1}+\ldots+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

Resolución

Efectuando se obtiene $\dfrac{x^{4^n}-1}{x^4-1}$.

Por el teorema del resto

$$x^4-1=0\ \rightarrow\ x^4=1$$

Como el dividendo es $D_{(x)}=(x^4)^{4^{n-1}}-1$, luego reemplazamos $x^4=1$

$\rightarrow\ R_{(x)}=(1)4^{n-1}-1=0$

$\therefore\ R_{(x)}\equiv 0$

Problema 14

Determine un polinomio de quinto grado que sea divisible entre $2x^4-3$ y que al dividirlo separadamente por $x+1$ y $x-2$ los restos obtenidos sean, respectivamente, 7 y 232.

Resolución

Por identidad fundamental

$$P_{(x)}\equiv(2x^4-3)q_{(x)}$$

Sea $q_{(x)}=ax+b\ \rightarrow\ P_{(x)}=(2x^4-3)(ax+b)$

I. De dividir

$$P_{(x)}\div(x+1)\ \rightarrow\ R_1=P_{(-1)}$$

$$\rightarrow\ [2(-1)^4-3][a(-1)+b]=7$$

$$\therefore\ a-b=7 \qquad (\alpha)$$

II. De dividir

$$P_{(x)}\div(x-2)\ \rightarrow\ R_2=P_{(2)}$$

$$\rightarrow\ [2(2)^4-3](2a+b)=232$$

$$\therefore\ 2a+b=8 \qquad (\beta)$$

De (α) y (β)

$a=5\ \wedge\ b=-2\ \rightarrow\ P_{(x)}=(2x^4-3)(5x-2)$

Problema 15

Si al dividir $\dfrac{x^a - y^b}{x^2 - y^3}$ se obtiene un cociente notable de 5 términos, ¿cuál es el valor de $a+b$?

Resolución

Si genera cociente notable se tendrá

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=5 \qquad \text{(número de términos)}$$

de donde

$a=2\times5=10$

$b=3\times5=15$

$\therefore\ a+b=25$

Problema 16

¿Cuántos de los términos indicados pertenecen al cociente notable de $\dfrac{x^{81}-y^{54}}{x^3-y^2}$?

I. $x^{15}y^{22}$ III. $x^{18}y^{40}$

II. $x^{72}y^{4}$ IV. $x^{21}y^{38}$

Resolución

Como es equivalente a $\dfrac{(x^3)^{27}-(y^2)^{27}}{x^3-y^2}$, entonces todos los términos deben ser de grado 26.

Si hacemos un cambio de variable: $x^3=a$, $y^2=b$

$$\frac{a^{27}-b^{27}}{a-b}=a^{26}+a^{25}b+\ldots+b^{26}$$

Además, los exponentes de x^3 e y^2 deben sumar 26.

I. $x^{15}y^{22}=(x^3)^5\cdot(y^2)^{11} \rightarrow 5+11\neq26$

II. $x^{72}y^{4}=(x^3)^{24}\cdot(y^2)^{2} \rightarrow 24+2=26$

III. $x^{18}y^{40}=(x^3)^{6}\cdot(y^2)^{20} \rightarrow 6+20=26$

IV. $x^{21}y^{38}=(x^3)^{7}\cdot(y^2)^{19} \rightarrow 7+19=26$

Por lo tanto, tres de los indicados son términos del cociente notable de $\dfrac{x^{81}-y^{54}}{x^3-y^2}$.

Problema 17

Determine el valor de $(m+n+p)$ sabiendo que el término central del cociente notable generado por $\dfrac{x^{m^3-114}+y^{n^3-40}}{x^m+y^n}$ es el noveno término y tiene por valor x^py^{40}.

Resolución

Como el central es el término noveno, entonces existen 17 términos.

$$\frac{m^3-144}{m}=\frac{n^3-40}{n}=17$$

(1) (2)

De (1): $\dfrac{m^3-114}{m}=17 \rightarrow m^3=17m+114$

$\therefore\ m=6$

De (2): $\dfrac{n^3-40}{n}=17 \rightarrow n^3=17n+40$

$\therefore\ n=5$

Luego, la división indicada es $\dfrac{(x^6)^{17}+(y^5)^{17}}{x^6+y^5}$.

> **Nota**
>
> En $\dfrac{a^n-b^n}{a-b}$; $t_k=a^{n-k}b^{k-1}$

$\rightarrow t_9=(x^6)^{17-9}(y^5)^{9-1}=x^{48}y^{40}\equiv x^py^{40}$

$\rightarrow p=48$

$\therefore\ m+n+p=59$

Problema 18

Halle el valor numérico del término central en el desarrollo de $\dfrac{(a+b)^{4p}-(a-b)^{4p}}{abp}$,

siendo $a=2\sqrt{7}$ y $b=3\sqrt{3}$, además $p=a^2+b^2$.

Resolución

Dando forma

$$\frac{8\left[(a+b)^{4p}-(a-b)^{4p}\right]}{\left[(a^2+b^2)ab\right]8}=8\left\{\frac{(a+b)^{4p}-(a-b)^{4p}}{(a+b)^4-(a-b)^4}\right\}$$

existen p términos en su expansión, entonces

$$p=a^2+b^2=(2\sqrt{7})^2+(3\sqrt{3})^2=55 \text{ términos.}$$

Luego

$$t_c=t_{28}=8\left\{\left[(a+b)^4\right]^{27}\left[(a-b)^4\right]^{28-1}\right\}$$

$$\rightarrow\ t_c=t_{28}=8\left[a^2-b^2\right]^{108}$$

Como $a^2-b^2=(2\sqrt{7})^2-(3\sqrt{3})^2=1$

$$\therefore\ t_c=8(1)^{108}=8$$

Problema 19

En el cociente notable generado por la división

$$\frac{x^{20m+35}+y^{20m-57}}{x^{m+1}+y^{m-3}},$$

determine el valor de m e indique el número de términos.

Resolución

Como genera cociente notable, entonces se cumple

$$\frac{20m+35}{m+1}=\frac{20m-57}{m-3}=\alpha,$$

donde α es el número de términos.

De donde

$$\frac{20m+35}{m+1}=\alpha\ \rightarrow\ 20m+35=m\alpha+\alpha \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{20m-57}{m-3}=\alpha\ \rightarrow\ 20m-57=m\alpha-3\alpha \qquad \text{(II)}$$

De (I) − (II)

$$92=4\alpha\ \rightarrow\ \alpha=23$$

Su desarrollo tendrá 23 términos.

Asimismo

$$20m+35=23m+23$$

$$\rightarrow\ 3m=12$$

$$\therefore\ m=4$$

Problema 20

En el cociente generado por

$$\frac{x^a-y^b}{x^3-y^7}$$

existe un término central que es igual a x^cy^{231}. Calcule el valor de $a+b+c$.

Resolución

Si genera cociente notable se tendrá

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=n\ \rightarrow\ \frac{(x^3)^n-(y^7)^n}{x^3-y^7}$$

Si hay un término central, n es impar

$$t_k=t_{\frac{n+1}{2}}=(x^3)^{n-\frac{n+1}{2}}(y^7)^{\frac{n+1}{2}-1}=x^cy^{231}$$

$$\rightarrow\ \frac{7}{2}(n-1)=231\ \rightarrow\ n=67$$

Luego

$$c=\frac{3}{2}(67-1)\ \rightarrow\ c=99$$

Resolvemos

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=67\ \rightarrow\ a=201;\ b=469$$

$$\therefore\ a+b+c=769$$

Problema 21

Halle el número de términos del siguiente cociente notable.

$$\ldots + x^{195}a^{140} - x^{190}a^{147} + \ldots$$

Resolución

Sea la división algebraica

$$\frac{(x^5)^n - (a^7)^n}{x^5 + a^7}$$

la que genera a dicho cociente notable del cual se conocen dos de sus términos consecutivos.

Sea

$$t_k = (-1)^{k+1}(x^5)^{n-k}(a^7)^{k-1} = x^{195}a^{140}$$

Por ser idénticos

- $(-1)^{k+1} = 1 \rightarrow k$ es impar
- $5(n-k) = 195 \rightarrow n - k = 39$
- $7(k-1) = 140$

$\rightarrow k = 21 \wedge n = 60$

Por lo tanto, el cociente notable tiene 60 términos.

Problema 22

Reduzca la expresión S.

$$S = \frac{x^{78} - x^{76} + x^{74} - x^{72} + \ldots + x^2 - 1}{x^{38} - x^{36} + x^{34} - x^{32} + \ldots + \dfrac{2}{x^2+1}}$$

Resolución

Podemos observar que tanto el numerador y el denominador son cocientes notables.

a. El numerador es exacto $\dfrac{x^{80} - 1}{x^2 + 1}$

b. El denominador

$$x^{38} - x^{36} + x^{34} - x^{32} + \ldots + \frac{2}{x^2+1} = \frac{x^{40}+1}{x^2+1}.$$

Luego

$$S = \frac{\dfrac{x^{80}-1}{\cancel{x^2+1}}}{\dfrac{x^{40}+1}{\cancel{x^2+1}}} = \frac{\cancel{(x^{40}+1)}(x^{40}-1)}{\cancel{(x^{40}+1)}} = x^{40} - 1$$

Problema 23

La siguiente división genera un cociente notable.

$$\frac{16\sqrt[3]{4} - 8\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt{2}}$$

Calcule su término racional.

Resolución

Dando forma a la división

$$\frac{\sqrt[3]{4}^6 \cdot \sqrt[3]{4} - \sqrt{2^6} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}^7 - \sqrt{2}^7}{\sqrt[3]{4} - \sqrt{2}}$$

Donde un término cualquiera del cociente es

$$t_k = \sqrt[3]{4}^{7-k} \cdot \sqrt{2}^{k-1} = 2^{\frac{2(7-k)}{3}} \cdot 2^{\frac{k-1}{2}} = 2^{\frac{2(7-k)}{3} + \frac{k-1}{2}}$$

Como se quiere tener el término racional, entonces

$$\frac{2(7-k)}{3} + \frac{k-1}{2} \text{ debe ser entero.}$$

$$\rightarrow k - 1 = \overset{\circ}{2} \wedge 7 - k = \overset{\circ}{3} \rightarrow k = 1 \vee k = 7$$

$$\rightarrow t_1 = 2^{\frac{2(6)}{3} + 0} = 16 \vee t_7 = 2^{0+3} = 8$$

Problema 24

En el cociente notable generado por la división

$$\frac{\sqrt{x}^{35} - \sqrt[3]{x}^{35}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}},$$

¿cuántos términos son racionales enteros?

Resolución

Tomando un término cualquiera

$$t_k=\sqrt{x}^{35-k}\cdot\sqrt[3]{x}^{k-1}=x^{\frac{35-k}{2}+\frac{k-1}{3}}$$

La naturaleza de los términos dependerá únicamente del exponente de la variable

$$\frac{35-k}{2}+\frac{k-1}{3}=17+\frac{1-k}{2}+\frac{k-1}{3}$$

$\rightarrow \left(17-\frac{k-1}{2}+\frac{k-1}{3}\right)$ es el exponente.

Recordando que un término es racional entero si los exponentes de sus variables son enteros y positivos: $k-1=\overset{o}{2} \wedge k-1=\overset{o}{3} \rightarrow k=\overset{o}{6}+1$

Luego $k=1$; 7; 13; 19; 25; 31. Y para cualquiera de estos casos

$$17-\frac{k-1}{2}+\frac{k-1}{3}$$

resulta entero positivo.

Como k toma 6 valores, entonces 6 términos serán racionales enteros.

Problema 25

Si la división algebraica

$$\frac{(5x-1)^{99}+(5x+1)^{99}}{x}$$

origina un cociente notable en el cual un término tiene la forma $A(25x^2-1)^B$, calcule $A+B$.

Resolución

Damos forma a la división.

$$10\left\{\frac{(5x-1)^{99}+(5x+1)^{99}}{10x}\right\}$$

Nota

$10x=(5x-1)+(5x+1)$

$$\rightarrow 10\left\{\frac{(5x-1)^{99}+(5x+1)^{99}}{(5x-1)+(5x+1)}\right\}$$

Un término cualquiera (de lugar k) es

$$t_k=(\text{signo})(10)(5x-1)^{99-k}(5x+1)^{k-1}$$

Equivalente a

$$A(5x-1)^B(5x+1)^B$$

$\rightarrow 99-k=k-1$

$\therefore k=50$

Por ser del lugar par, será de signo (−):

$\rightarrow t_{50}=-10(5x-1)^{49}(5x+1)^{49}$

$\rightarrow A=-10$ y $B=49$

$\therefore A+B=39$

Problema 26

Si la división $\frac{(x+y)^{100}-(x-y)^{100}}{8xy(x^2+y^2)}$ genera un cociente notable, calcule el valor numérico del término central.

Para $x=3$ e $y=2\sqrt{2}$

Resolución

Nota

$8xy(x^2+y^2)=(x+y)^4-(x-y)^4$

Luego se tendrá

$$\frac{(x+y)^{100}-(x-y)^{100}}{(x+y)^4-(x-y)^4}$$

Haciendo

$$(x+y)^4=m;\ (x-y)^4=n$$

tendremos $\frac{m^{25}-n^{25}}{m-n}$,

cuyo término central ocupará el lugar 13.

$\rightarrow t_{13}=m^{25-13}n^{13-1}=m^{12}n^{12}=(mn)^{12}$

Reponiendo en términos de x e y

$$t_{13}=\left(\left(x^2-y^2\right)^4\right)^{12}=\left(x^2-y^2\right)^{48}$$

Evaluando en $x=3,\ y=2\sqrt{2}$

$$t_{13}=\left(3;2\sqrt{2}\right)=\left[3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2\right]^{48}=1$$

Problema 27

Sabiendo que al dividir $\dfrac{x^{2^{5n}}-y^{2^{5n}}}{x^{3^n-1}+y^{3^n-1}}$ se obtiene como segundo término $-x^{16}y^8$, ¿de cuántos términos estará compuesto su cociente notable?

Resolución

Si genera cociente notable se tendrá

$$\frac{2^{5n}}{3^n-1}=\alpha,$$

donde α es el número de términos.

Damos forma a la división

$$\frac{\left(x^{3^n-1}\right)^{\alpha}-\left(y^{3^n-1}\right)^{\alpha}}{\left(x^{3^n-1}\right)+\left(y^{3^n-1}\right)}$$

Hallamos el segundo término: t_2.

$$t_2=-\left(x^{3^n-1}\right)^{\alpha-2}\left(y^{3^n-1}\right)^1\equiv-x^{16}y^8$$

Como son idénticos

x: $(3^n-1)(\alpha-2)=16$ (I)

y: $(3^n-1)1=8 \rightarrow 3^n-1=8$ (II)

De (I) + (II): $8(\alpha-2)=16 \rightarrow \alpha=4$

Por lo tanto, tendrá 4 términos.

Problema 28

¿Qué lugar ocupa el término de la forma

$R\left[ab(a+b)^2\right]^n$

del cociente notable generado por

$$\frac{(a+b)^{22}-(ab)^{11}}{a^2+3ab+b^2}?$$

Resolución

Damos forma a la división

$$a^2+3ab+b^2\equiv(a+b)^2+ab$$

$$\rightarrow \frac{\left[(a+b)^2\right]^{11}-(ab)^{11}}{(a+b)^2+(ab)}$$

Sea k el lugar del término buscado

$$t_k=(-1)^{k+1}\left((a+b)^2\right)^{11-k}(ab)^{k-1}$$

Por dato

$$11-k=k-1 \rightarrow k=6$$

Por lo tanto, el término buscado ocupa el lugar 6.

Problema 29

Un polinomio $P_{(x)}$ de quinto grado verifica que

$P_{(1)}=P_{(-1)}=P_{(2)}=P_{(-2)}=7$

y al ser dividido por x^2-3 se obtiene como residuo $-6x+17$. Halle el coeficiente del término de segundo grado de dicho polinomio.

Resolución

De los datos, podemos concluir

I. $P_{(x)}\div(x-1) \rightarrow R_1=7$

II. $P_{(x)}\div(x+1) \rightarrow R_2=7$

III. $P_{(x)}\div(x-2) \rightarrow R_3=7$

IV. $P_{(x)}\div(x+2) \rightarrow R_4=7$

Por teorema

$$P_{(x)}\div(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \rightarrow R_5=7$$

$$P_{(x)}\equiv(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)q_{(x)}+7$$

Como $P_{(x)}$ es de quinto grado $\rightarrow q_{(x)}=ax+b$

$\rightarrow \quad P_{(x)}=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(ax+b)+7$

$\rightarrow \quad P_{(x)}=(x^2-1)(x^2-4)(ax+b)+7$

Al dividir $P_{(x)} \div (x^2-3)$ por el teorema del resto obtendremos

$$x^2-3=0 \quad \rightarrow \quad x^2=3$$

Entonces

$$R_{(x)}=(3-1)(3-4)(ax+b)+7$$
$$=-2(ax+b)+7$$

Por dato

$$-2(ax+b)+7=-6x+17 \quad \rightarrow \quad ax+b=3x-5$$

Luego

$$P_{(x)}=(x^2-1)(x^2-4)(3x-5)+7$$

$\rightarrow \quad P_{(x)}=(x^4-5x^2+4)(3x-5)+7$

De donde el coeficiente del término cuadrático es $(-5)(-5)=25$.

Problema 30

Si al dividir $\dfrac{3^{11}x^{11}+1}{9x^2+6x+4}$ se obtiene un residuo $(ax+b)$, calcule el valor de $S=\dfrac{b-a}{41}$.

Resolución

Haciendo $3x=z$

$$\frac{z^{11}+1}{z^2+2z+4}$$

Recuerde que si multiplicamos al dividendo y al divisor por $z-2$ el cociente no se altera, pero el residuo queda multiplicado por $z-2$.

$$\rightarrow \frac{(z^{11}+1)(z-2)}{(z^2+2z+4)(z-2)} \rightarrow \frac{z^{12}-2z^{11}+z-2}{z^3-8}$$

$\rightarrow \quad R_1=R(z-2)$

Por el teorema del resto: $z^3=8$

$$\rightarrow \quad R_1=\underbrace{8^4-2(8^3)z^2}_{-8^3 2(z^2-4)}+z-2$$

Luego

$$R_1=-8^3\cdot 2(z-2)(z+2)+z-2$$

Entonces

$$R_{(z-2)}=(z-2)(-8^3\cdot 2(z+2)+1)$$

Por lo tanto

$$R=-2\cdot 8^3(z+2)+1$$

Reemplazando z

$$R_{(x)}=-2\cdot 8^3(3x+2)+1$$

$$R_{(x)}=-6\cdot 8^3x-4\cdot 8^3+1$$

que es idéntico a $ax+b$

$\rightarrow \quad a=-6\cdot 8^3;\ b=-4\cdot 8^3+1$

De donde

$$S=\frac{(-4\cdot 8^3+1)-(-6\cdot 8^3)}{41}$$

$$\therefore \quad S=\frac{2\cdot 8^3+1}{41}=25$$

Problema 31

En el cociente notable que se obtiene de

$$\frac{x^{am}-x^{bn}}{x^2-x^{-3}},$$

el décimo término contado a partir del final es independiente de x. ¿Cuántos términos racionales enteros contiene dicho cociente notable?

Resolución

I. Si genera cociente notable se tiene

$$\frac{am}{2}=\frac{bn}{-3}=\alpha$$

II. Damos forma a la división indicada

$$\frac{(x^2)^\alpha-(x^{-3})^\alpha}{x^2-x^{-3}}$$

Tomamos su décimo término partiendo del final

$$t_{10}=(x^{-3})^{\alpha-10}(x^2)^9=x^{-3(\alpha-10)+18}$$

y como es independiente de x

$$\rightarrow -3(\alpha-10)+18=0 \quad \rightarrow \quad \alpha=16$$

Luego la división es $\dfrac{(x^2)^{16}-(x^{-3})^{16}}{x^2-x^{-3}}$,

donde cada término de su cociente notable tiene la forma

$$t_k=(x^2)^{16-k}(x^{-3})^{k-1}$$

$$\rightarrow t_k=x^{35-5k};\ k=1;\ 2;\ \ldots;\ 16$$

Como se quieren términos enteros

$$35-5k\geq 0 \quad \leftrightarrow \quad k\leq 7$$

Por lo tanto, existen 7 términos racionales enteros.

Problema 32

Halle el resto en la división indicada.

$$\frac{2x^{16}+x+2+4x^{15}+2x^{32}+x^{33}}{x^3+3x^2+3x+2}$$

Resolución

Factorizando el dividendo y el divisor se obtiene

$$\frac{(x+2)(x^{32}+2x^{15}+1)}{(x+2)(x^2+x+1)}.$$

Si cancelamos $x+2$, el resto buscado sería

$R_{(x)}=R_1\cdot(x+2)$, siendo R_1 el resto en

$$\frac{x^{32}+2x^{15}+1}{x^2+x+1}.$$

Calculando R_1 por el teorema del resto

$$x^2+x+1=0,\ \text{de donde}\ \begin{cases} x^3=1 \\ x^2=-x-1 \end{cases}$$

Pero el dividendo es $(x^3)^{10}\cdot x^2+2(x^3)^5+1$

$$\rightarrow R_1=1^{10}\cdot(-x-1)+2(1)^5+1=2-x$$

Luego

$$R_{(x)}=(2-x)(2+x)$$

$$\therefore \quad R_{(x)}=4-x^2$$

Problema 33

Un polinomio $P_{(x)}$ mónico y de segundo grado al ser dividido entre $x+3$ da como resultado un cierto cociente $Q_{(x)}$ y un resto 12. Si se divide $P_{(x)}$ entre el mismo cociente aumentado en 4, la división resulta ser exacta. Halle el resto de dividir $P_{(x)}$ entre $x-5$.

Resolución

I. De los datos tenemos

$$\rightarrow P_{(x)}\equiv(x+3)\underbrace{Q_{(x)}}_{(x+a)}+12$$

II. $P_{(x)}\equiv(x+a+4)q_{(x)}$

Pero

$$(x+3)(x+a)+12\equiv(x+a+4)(x+b)$$

$$\rightarrow x^2+(a+3)x+3a+12\equiv x^2+(a+4+b)x+ +b(a+4)$$

De donde

$$\cancel{a}+3=\cancel{a}+4+b \ \wedge\ 3a+12=b(a+4)$$

$$b=-1 \ \wedge\ 3a+12=-a-4$$

$$4a=-16 \ \rightarrow\ a=-4$$

En (I)

$$P_{(x)}=(x+3)(x-4)+12$$

Debemos hallar el resto de $\dfrac{P_{(x)}}{x-5}$, luego $R_{(x)}=P_{(5)}$

$$\rightarrow P_{(5)}=(8)(1)+12=20$$

Problema 34

Al dividir el polinomio $P_{(x)}$ por (x^2-1) se obtiene como residuo $2x$, y al dividirlo por $(x-2)^3$ da como residuo $3x$. Halle el residuo de dividir $P_{(x)}$ por $(x-1)(x-2)$.

Resolución

De los datos

I. $P_{(x)} \div (x^2-1) \quad \wedge \quad R_{(x)}=2x$

$\rightarrow \quad P_{(x)} \equiv (x^2-1)q_{(x)}+2x$

II. $P_{(x)} \div (x-2)^3 \quad \wedge \quad R_{1(x)}=3x$

$\rightarrow \quad P_{(x)} \equiv (x-2)^3 q_{1(x)}+3x$

III. $P_{(x)} \div (x-1)(x-2) \quad \wedge \quad R_{2(x)}=ax+b$

$\rightarrow \quad P_{(x)} \equiv (x-1)(x-2)q_{2(x)}+ax+b$

En (III)

Si $x=1 \quad \rightarrow \quad P_{(1)}=a+b \qquad (\alpha)$

Si $x=2 \quad \rightarrow \quad P_{(2)}=2a+b \qquad (\beta)$

De (I), si $x=1 \quad \rightarrow \quad P_{(1)}=2$

De (II), si $x=2 \quad \rightarrow \quad P_{(2)}=3(2)=6$

Luego en (α) y (β)

$$\left.\begin{array}{r} a+b=2 \\ 2a+b=6 \end{array}\right\} a=4 \quad \wedge \quad b=-2$$

Por lo tanto, el residuo buscado es

$R_{2(x)}=4x-2$

Problema 35

Los polinomios

$P_{(x)}=3x^6-x^5-9x^4-14x^3-11x^2-3x-1;$

$Q_{(x)}=3x^5+8x^4+9x^3+15x^2+10x+9$

son divisibles por x^2+x+1.

Halle el resto de dividir $[f_{(x)}P_{(x)}+g_{(x)}Q_{(x)}]$ entre x^2+x+1, sabiendo que $f_{(x)}$; $g_{(x)}$ son polinomios no constantes.

Resolución

Sean $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ divisibles por x^2+x+1, entonces

$P_{(x)}=(x^2+x+1)q_{1(x)}$

$Q_{(x)}=(x^2+x+1)q_{2(x)}$

$\rightarrow \quad f_{(x)} \cdot P_{(x)}=(x^2+x+1)f_{(x)} \cdot q_{1(x)}$

$g_{(x)} \cdot Q_{(x)}=(x^2+x+1)g_{(x)} \cdot q_{2(x)}$

$\rightarrow f_{(x)}P_{(x)}+g_{(x)} \cdot Q_{(x)}=(x^2+x+1)[f_{(x)} \cdot q_{1(x)}+g_{(x)} \cdot q_{2(x)}]$

Se observa que

$f_{(x)}P_{(x)}+g_{(x)} \cdot Q_{(x)}$ es divisible por x^2+x+1.

$\therefore \quad R_{(x)}=0$

Problema 36

Si un polinomio $P_{(x)}$ es divisible por x^2+x+1, calcule la suma de los restos de dividir $A_{(x)}$ y $B_{(x)}$ entre $x-1$, sabiendo que $P_{(x)}=xA_{(x^3)}+B_{(x^3)}$.

Resolución

Del dato: $P_{(x)} \equiv (x^2+x+1)Q_{(x)}$

Por el teorema del resto

$x^2+x+1=0 \quad \rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\rightarrow \quad x^3=1$

Reemplazando en $P_{(x)}=xA_{(x^3)}+B_{(x^3)}$

tenemos

$R=xA_{(1)}+B_{(1)} \equiv 0 \quad \rightarrow \quad A_{(1)}=0 \quad \wedge \quad B_{(1)}=0$

Luego, el resto de $\dfrac{A_{(x)}}{x-1}$ es $A_{(1)}$ y el resto de $\dfrac{B_{(x)}}{x-1}$ es $B_{(1)}$.

$\therefore \quad A_{(1)}+B_{(1)}=0$

Test 6

1. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   I. x^7-3x+2 es divisible por $x-1$

   II. $3x^8-x^2-9$ es divisible por x^2+1

   III. $2x^{33}-x^3-1$ es divisible por x^3-1

   A) VVV B) VVF C) VFV
   D) FFV E) VFF

2. Si $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ son divisibles por $d_{(x)}$, no siempre es cierto que

   A) $P_{(x)}+3Q_{(x)}+d_{(x)}$ es divisible por $d_{(x)}$.

   B) $P_{(x)}+Q^2_{(x)}$ es divisible por $d_{(x)}$.

   C) $\dfrac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}$ es divisible por $d_{(x)}$.

   D) $P^2_{(x)}+Q^2_{(x)}$ es divisible por $d^2_{(x)}$.

   E) $P^3_{(x)}-Q^3_{(x)}$ es divisible por $d^2_{(x)}$.

3. Indique cuál es el resto en $\dfrac{x^{15}-x+1}{x^2-1}$.

   A) 1 B) $1-x$ C) $x-1$
   D) 0 E) -1

4. Calcule la suma de coeficientes del cociente de dividir $\dfrac{x^9-x+1}{x-1}$.

   A) 7 B) 8 C) 9
   D) 12 E) 6

5. Indique cuál es el valor numérico del cociente evaluado en 2, que resulta de efectuar $\dfrac{x^{17}-x+7}{x-1}$.

   A) $2^{16}-1$ B) $2^{17}-2$ C) $2^{17}-1$
   D) $2^{16}-2$ E) $2^{16}+1$

6. Halle el término lineal del resto obtenido en $\dfrac{(x^2-2x+1)(x^2+5x-1)}{(x-1)^2(x-2)}$.

   A) $13x$ B) $-13x$ C) $26x$
   D) $-26x$ E) $-15x$

7. ¿Cuántas de las siguientes divisiones indicadas generan cociente notable?

   I. $\dfrac{x^{33}-y^{11}}{x^3-y}$

   II. $\dfrac{(x+1)^{20}-(x-1)^{20}}{4x}$

   III. $\dfrac{x^{77}-y^{33}}{x^7-y^3}$

   IV. $\dfrac{(x+2)^5-32}{x}$

   A) 0 B) 1 C) 2
   D) 3 E) 4

8. Indique uno de los términos del cociente notable generado por $\dfrac{x^{22}-y^{33}}{x^2-y^3}$.

   A) $x^{14}y^{12}$ B) $x^{18}y^6$ C) x^8y^{21}
   D) x^4y^{27} E) $x^{10}y^{15}$

9. En el cociente notable generado por $\dfrac{x^{32}-y^{16}}{x^2-y}$,

t_k representa el término de lugar k.

Simplifique $\dfrac{t_7 \cdot t_9}{t_3 \cdot t_{10}}$.

A) x^6y^3 B) $x^{-6}y^3$ C) $x^{-6}y^{-3}$
D) x^3y E) $x^{-7}y^8$

10. Indique cuántos términos tiene el cociente notable generado por $\dfrac{x^{2m-1}-y^{2m-9}}{x^{r-1}-y^{r-3}}$.

A) 7
B) 4
C) 8
D) 6
E) faltan datos

11. ¿Cuál es el mínimo valor entero que toma m si la división $\dfrac{x^{3m-1}-y^{3m-9}}{x^r-y^{r-1}}$ genera un cociente notable dependiente de y?

A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 11

12. Si $\dfrac{8\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$ se desarrolla como un cociente notable, ¿cuántos términos enteros se tendrá en dicho cociente notable?

A) 7
B) 6
C) 5
D) 4
E) 3

Claves

1 C	3 A	5 B	7 E	9 B	11 E
2 C	4 B	6 D	8 E	10 B	12 D

Problemas PROPUESTOS

Nivel I

1. ¿Qué valor toma la expresión $\dfrac{mp+q^2}{mp-q^2}$ para que el trinomio px^2+qx+m sea un cuadrado perfecto?

A) 1 B) 5/3 C) 3/5
D) −3/5 E) −5/3

2. Luego de dividir $P_{(x)}$ entre x^2+3x+2 se obtiene como resto $5x+7$. ¿Cuál es el resto de dividir $P_{(x)}$ entre $x+1$?

A) 7 B) 12 C) 5
D) 2 E) −1

3. Sea $P_{(x)}$ un polinomio tal que
I. la suma de coeficientes es 11.
II. su término independiente es 7.
¿Cuál es el resto de dividir $P_{(x)}$ entre x^2-x?

A) $4x+7$ B) $2x+1$ C) $x-3$
D) $5x-2$ E) $x+1$

4. Al dividir $P_{(x)}$, $Q_{(x)}$ y $R_{(x)}$ separadamente por $(x-1)$, los restos obtenidos son respectivamente 2; 3 y 4. ¿Cuál es el resto de dividir $[P_{(x)}+2Q_{(x)}+3R_{(x)}]$ entre $(x-1)$?

A) 18 B) 20 C) 15
D) 11 E) 22

5. Halle el coeficiente del término lineal de aquel polinomio cuadrático que es divisible por $(2x-3)$. Además, su término independiente es −3 y su resto al dividirlo por $(x+1)$ es 20.

A) −13 B) −5 C) 5
D) −4 E) −1

6. Dado un polinomio cuadrático mónico $P_{(x)}$, al dividirlo por $(x+5)$ y $(x-2)$ siempre deja resto 4. Halle el término lineal de $P_{(x)}$.

A) $3x$ B) $5x$ C) $4x$
D) $7x$ E) $-3x$

7. Un polinomio cúbico mónico $P_{(x)}$, al ser dividido separadamente entre $(x-3)$, $(x+2)$ y $(x-1)$, obtiene siempre como resto 5. Halle el término cuadrático de $P_{(x)}$.

A) $-2x^2$ B) $2x^2$ C) $3x^2$
D) $5x^2$ E) x^2

8. Sea $P_{(x)}$ un polinomio cúbico perfecto de término independiente −1, que al ser dividido entre $\left(x-\dfrac{2}{5}\right)$ obtiene como resto 1.
¿Cuál es su término principal?

A) $27x^3$ B) $125x^3$ C) $8x^3$
D) x^3 E) $64x^3$

9. ¿Cuál es el resto en la siguiente división?

$$\frac{5x^{218}+1}{x^2+x+1}$$

A) $-5x-4$
B) $-5x+6$
C) $-5x-6$
D) $-5x-5$
E) $5x-4$

10. ¿Cuál es el resto en la siguiente división?

$$\frac{(x^3-3x^2+3x-1)(x-2)}{(x-1)^2(x+2)}$$

A) $12(x-1)^2$ B) $12(x+1)^2$ C) $-12(x-1)^2$
D) -12 E) $12(x+2)$

11. Al efectuar la división de $(2x-5)^7-(x-1)^7$ entre x^2-6x+8 se obtiene como resto $R_{(x)}=ax+b$.

¿Cuál es el valor de $a+\frac{b}{6}$?

A) 2 B) 1 C) 1/3
D) 3/2 E) 0

12. Sea $R_{(x)}$ el resto en

$$\frac{(3x-1)^{10}+(3x-2)^7-3x+4}{9x^2-9x+2}.$$

¿Cuál es el valor numérico de R en -1?

A) -1 B) -2 C) 2
D) 4 E) 3

13. Si el cociente notable generado por $\frac{x^n-y^m}{x^3-y^4}$ tiene 14 términos, ¿cuál es el valor de $m+n$?

A) 56 B) 89 C) 42
D) 98 E) 84

14. ¿Qué lugar ocupa el término x^7y^3 en el cociente notable generado por $\frac{x^n-y^n}{x-y}$?

A) 4 B) 5 C) 3
D) 7 E) 6

15. Si x^8y^7 es un término del cociente notable generado por

$\frac{x^n-y^{n/2}}{x^2-y}$, ¿qué valor toma n?

A) 16 B) 32 C) 19
D) 24 E) 20

16. Si x^3y^{16} es un término del cociente notable generado por $\frac{x^n-y^m}{x-y^2}$, ¿cuál es el valor de $m-n$?

A) 12 B) 8 C) 10
D) 6 E) 5

17. Si $\frac{(x+1)^{40}-(x-1)^{40}}{8x(x^2+1)}$ puede expresarse como un cociente notable, calcule la suma de coeficientes de dicho cociente notable.

A) 2^{38} B) 16^9 C) 8^9
D) 8^{16} E) 2^{40}

18. Si la división $\frac{(2x+1)^{20}-(2x-1)^{20}}{8x}$ es desarrollada como un cociente notable, ¿cuál es el término independiente de x en ese cociente notable?

A) 0 B) 10 C) -10
D) 5 E) -5

19. Si la división $\frac{x^{45}-y^{30}}{x^3-y^2}$ genera un cociente notable, ¿cuál es el valor numérico del término de lugar 7, contado a partir del final cuando $x=2$; $y=1/2$.

A) 4 B) 8 C) 1/2
D) 1 E) 1/4

20. En el cociente notable de $\dfrac{x^{2n}-y^n}{x^2-y}$ existe un término central. ¿Cuál es el grado de dicho término?

A) $\dfrac{n+1}{2}$ B) $n+1$ C) $\dfrac{n-1}{2}$
D) $\dfrac{3}{2}(n+1)$ E) $\dfrac{3}{2}(n-1)$

Nivel II

21. Halle el residuo de dividir $p_{(x)}$ entre x^2+x+1 si al dividir $p_{(x)}$ entre x^3-1 se obtiene como residuo x^2+3x+2.

A) $x+1$ B) $x-1$ C) $x+2$
D) $2x+1$ E) $2x-1$

22. Calcule el valor de a si los polinomios
$P_{(x)}=x^3+ax^2-5x-6$;
$Q_{(x)}=x^3+(a-3)x^2-17x-15$
son divisibles por un polinomio lineal común de coeficientes enteros.

A) 2 B) 7 C) 5
D) 3 E) 8

23. Establezca el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I. Si el polinomio $c_{(x)}$ es divisible separadamente por los polinomios $f_{(x)}$, $g_{(x)}$, $h_{(x)}$, entonces $c_{(x)}$ es divisible también por el residuo de $f_{(x)}\cdot g_{(x)}$ entre $h_{(x)}$.
II. x^3+2x^2-x+6 es divisible por x^2-x+2
III. Si dividimos $mx^4+nx^3+x^2+1$ entre x^2+1 y x^2-1 se obtienen restos que suman 4, entonces m es 1.

A) VVV B) VVF C) VFV
D) FVV E) FFV

24. De un polinomio $P_{(x)}$ de octavo grado se conocen dos de sus raíces, que son 2 y 3; además, es divisible por (x^4+1) y $(x+1)$. Determine el resto de dividir $P_{(x)}$ entre $(x+2)$, si la suma de sus coeficientes es 32 y su término independiente es 66.

A) -8500 B) 6500 C) 8500
D) 6000 E) 7000

25. Halle un polinomio $P_{(x)}$ de segundo grado y divisible por $(2x+1)$, sabiendo además que su primer coeficiente es 4 y que al ser dividido por $(x-2)$ el resto es 5. Reconozca el menor coeficiente de $P_{(x)}$.

A) -4 B) -3 C) -5
D) 4 E) 2

26. Si el residuo de la división del polinomio $P_{(x)}$ entre $(x+4)$ es 7 y la suma de los coeficientes del cociente es 6, halle el residuo de dividir $P_{(x)}$ entre $(x-1)$.

A) 0 B) 30 C) 7
D) 37 E) 51

27. Al dividir $P_{(x)}$ entre x^2+x+1, se obtuvo como residuo $x+1$; y al dividir $P_{(x)}$ entre x^2-x+1, el resto fue $x-1$. Halle el resto de dividir $P_{(x)}$ entre x^4+x^2+1.

A) x^3 B) x C) x^3-x
D) x^3+x E) $x+1$

28. Luego de efectuar la división, calcule su resto.

$$\frac{x^{72}+x^4+1}{x^{64}-x^{60}+x^{56}-\ldots+1}$$

A) 1 B) 2 C) x^4-1
D) $2x^4+1$ E) $2x^2+1$

29. Un polinomio $P_{(x)}$ de cuarto grado, cuyo coeficiente principal es 3, es divisible entre x^2+1 y además la suma de sus coeficientes es nula. Si al dividir $P_{(x)}$ entre $(x-2)$ se obtuvo como residuo 50, halle el resto de dividir $P_{(x)}$ entre (x^2-1).

A) $2(x-1)$ B) 1 C) -2
D) $6x$ E) $2x+2$

30. En el cociente notable generado por $\dfrac{x^{2n}-x^{-3n}}{x^2-x^{-3}}$, calcule la suma de valores para $n \leq 33$, tal que existan 13 términos enteros en su desarrollo.

A) 90 B) 94 C) 96
D) 86 E) 64

31. Halle el número de términos que tendrá el cociente notable generado por $\dfrac{x^{5m+10}-y^{5m-50}}{x^{2n+9}-y^{2n+5}}$; $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$; $m<32$.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

32. Sabiendo que al dividir $\dfrac{x^{2^n}-y^{2^n}}{x^{3^m-1}-y^{3^m-1}}$ se obtiene como segundo término en su cociente a $x^{16}y^8$, ¿de cuántos términos está compuesto su cociente notable?

A) 4 B) 3 C) 5
D) 7 E) 6

33. Halle el lugar que ocupa el término de grado 101 en el desarrollo del cociente notable generado por $\dfrac{x^{180}-z^{80}}{x^9-z^4}$.

A) 11 B) 13 C) 15
D) 17 E) 19

34. Calcule la suma de todos los exponentes de las variables del desarrollo de $\dfrac{x^{100}-y^{100}}{x^4-y^4}$.

A) 2400 B) 2500 C) 2600
D) 2700 E) 2800

35. Halle el término independiente respecto a x en el cociente notable generado por $\dfrac{(\sqrt{x}+y)^n-y^n}{\sqrt{x}}$, si $t_{10-n}=y^{9-n}$.

A) y^4 B) y^8 C) $3y^4$
D) $5y^4$ E) $-3y^4$

36. Un polinomio mónico de noveno grado tiene raíz cúbica exacta, además es divisible separadamente por $(x-1)$ y $(x-2)$. Halle el residuo de dividir el polinomio entre $(x-4)$ si el término independiente de dicho polinomio es -216.

A) 36 B) 72 C) -72
D) 216 E) -48

37. Determine un polinomio mónico de cuarto grado que sea divisible separadamente por x^2-3x+2; x^2-4; x^2+x-2, y que al ser dividido entre $x-3$ deje un resto igual a 100. Luego indique el residuo de dividir dicho polinomio entre $x+1$.

A) 18 B) 34 C) 36
D) 72 E) 48

38. Si un término del cociente notable generado por $\dfrac{x^n-y^{n+p}}{x^3y^{n-3}-y^{n+2}}$ es x^{18}, halle el valor de $(n-p)$.

A) 16 B) 9 C) 10
D) 11 E) 17

39. Si A es el penúltimo término del cociente notable generado por $\dfrac{x^{40}+y^{10}}{x^4+y}$, halle el término A.

A) x^9y^8 B) $-x^4y^8$ C) x^4y^8
D) x^8y^9 E) $-x^8y^9$

40. Si $x^py^{28} \wedge x^{16}y^{2(p-6)}$ son términos equidistantes de los extremos en el cociente notable de $\dfrac{x^m-y^n}{x^4-y^7}$, calcule el valor de $(m+n+p)$.

A) 225 B) 235 C) 245
D) 257 E) 322

41. Al dividir un polinomio $P_{(x)}$ entre $(x+1)^4$ se obtuvo como residuo x^3+2-3x. Calcule el residuo de dividir $P_{(x)}$ entre x^2+2x+1.

A) $x+1$ B) $3x+1$ C) $3x-1$
D) 4 E) -3

42. Un polinomio $P_{(x)}$ se ha dividido separadamente por $x+1$; $x-1$ y $2x-1$, obteniéndose como restos 7; -1 y 1 respectivamente. Halle el término independiente del residuo de dividir $P_{(x)}$ entre $(x+1)(x-1)(2x-1)$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) -2 E) -3

43. Un polinomio $F_{(x)}$ al ser dividido por $(x+1)^n$ deja residuo $x+1$ y un cociente $Q_{(x)}$. Si la suma de coeficientes de $F_{(x)}$ es 98 y de $Q_{(x)}$ es 3, ¿cuál es el valor de n?

A) 3 B) 4 C) 6
D) 5 E) 2

44. Dado $P_{(x)}=x^3-6x^2+11x-6$, divisible por $(x-a)$, $(x-b)$ y $(x-c)$, calcule el residuo de dividir $P_{(x)} \div \left[x+\left(a^{-1}b^{-1}+a^{-1}c^{-1}+b^{-1}c^{-1}\right)\right]$, donde a; b; c son diferentes entre sí.

A) -24 B) 24 C) 0
D) 12 E) -12

45. Dados tres números reales a; b; c $(a \neq b \neq c)$ que verifican
$a^3+pa+q=0$;
$b^3+pb+q=0$;
$c^3+pc+q=0$,
calcule el valor de $\left(\dfrac{abc}{ab+ac+bc}\right)\dfrac{p}{q}$.

A) 1 B) -2 C) -1
D) 2 E) $\dfrac{p+q}{pq}$

46. Un polinomio de cuarto grado es divisible separadamente por $(x+3)$, $(x+2)$ y $(x+5)$; además, al ser dividido por $(x+1)$ se obtiene como resto 32. Si el término independiente de $P_{(x)}$ es -240, halle su coeficiente principal.

A) 40 B) -80 C) 30
D) -12 E) -40

47. Un polinomio de grado n y de variable x es divisible entre $(x^{n-1}+x^{n-2}+1)$ y tiene por término independiente 2. Sabiendo que disminuido en 9 y 388 es divisible entre $(x-1)$ y $(x-2)$ respectivamente, calcule el valor de n.

A) 10 B) 6 C) 12
D) 7 E) 5

48. ¿Qué relación cumplen p y q, tal que $x^3-pqx+q$ sea divisible por x^2+mx-1? Considere $m \in \mathbb{R}^+$.

A) $p+q=0$ B) $q^2-1=pq$ C) $pq=1+q^2$
D) $p-q=1$ E) $p^2-1=pq$

49. Al dividir el polinomio $P_{(x)}$ entre $(x-1)^2$, se obtiene como residuo $2x$; y al dividirlo por $(x-2)^3$, da como residuo $3x$. Halle el residuo de la división de $P_{(x)}$ entre $(x-1)(x-2)$.

A) $8x+4$ B) $4x-2$ C) $7x+3$
D) $-x+1$ E) $-x-1$

50. Al dividir $mx^4+nx^3+x^2+1$ entre x^2+1 y x^2-1, respectivamente, se obtienen dos restos que sumados dan 4. Calcule el valor de m.

A) 1 B) 6 C) 2
D) 3 E) 7

51. Al dividir un polinomio $P_{(x)}$ entre $(x+6)^4$, se obtuvo como residuo $x^3-a^2x+2a^3$. Calcule el resto de dividir $P_{(x)}$ entre $(x+6)^2$.

A) $x+a$
B) $4a^3$
C) $(108-a^2)x+2a^3+432$
D) x^2a+4a^3
E) $x+4a$

52. Indique el término independiente de un polinomio de tercer grado que al ser dividido entre $(x-1)$, $(x+2)$ y $(x-4)$ dé el mismo resto 20 y, además, que sea divisible por $(x+1)$.

A) 4 B) 36 C) 18
D) 10 E) 14

53. Al dividir un polinomio $P_{(x)}$ entre $(x-n)$, se obtuvo como resto m y al dividirlo entre $(x-m)$, dio como resto n. Halle el resto de dividir $P_{(x)}$ entre $x^2-(m+n)x+mn$.

A) $x-m+n$ B) $x-n-m$ C) $x+m+n$
D) $x-n+m$ E) $-x+m+n$

54. Un polinomio $P_{(x)}$ de cuarto grado es divisible separadamente por $(x+3)$, $(x+2)$ y $(x+5)$; además, al ser dividido por $(x+1)$ arroja como resto 32. Si el término independiente de $P_{(x)}$ es -240, calcule el resto de dividir $P_{(x)} \div (x+4)$.

A) 80 B) -11 C) 70
D) 10 E) -42

55. En el cociente notable que se obtiene de $\frac{x^{4m}-x^{4b}}{x^2-x^{-3}}$, el décimo término contado a partir del final es independiente de x. ¿Cuántos términos racionales enteros contiene dicho cociente notable?

A) 6 B) 9 C) 7
D) 8 E) 10

56. Simplifique la expresión

$$\frac{1+x^p+x^{2p}+x^{3p}+\ldots+x^{(2n-1)p}}{1+x^p+x^{2p}+x^{3p}+\ldots+x^{(n-1)p}}(1-x^{np}+x^{2np}).$$

A) $x^{3np}-1$ B) $x^{3np}+1$ C) $x^{2p}-1$
D) 1 E) x^p-1

57. Los términos $x^{26}a^{15}$; $x^{22}a^{25}$ pertenecen a un cociente notable; el segundo está a dos lugares del primero. ¿Cuál es el término central en dicho cociente notable, sabiendo que es entero?

A) $x^{16}a^{40}$ B) $x^{30}a^{10}$ C) $x^{28}a^{20}$
D) $x^{20}a^{50}$ E) $x^{24}a^{20}$

58. Halle el grado absoluto del undécimo término en el cociente notable que se obtiene al dividir $\frac{x^{3n+2}-y^{5n-1}}{x^2-y^{n-5}}$.

A) 25 B) 32 C) 28
D) 30 E) 34

59. Si el polinomio
$P_{(x)}=x^n-bx^{n-1}+bx-1$ es divisible por
$Q_{(x)}=x^m+ax^{m-2}+cx^{m-3}+d$ y
$Q_{(x)}$ es divisible por $(x-1)^2$,
calcule el valor de $\frac{b}{n-nb}$, $n; m \in \mathbb{Z}^+$.

A) 1 B) −2 C) −1
D) 2 E) −1/2

60. Si se divide el residuo de la división

$$\frac{mx^{4m}+nx^{4n+1}+px^{4p+2}+qx^{4q+3}}{(x+1)(x^2+1)}$$

por $(x+1)$, ¿cuál es el resto que se obtiene? Considere $mnq \neq 0$.

A) 0 B) 1 C) m^2+n^2
D) $m-n+p-q$ E) $mnpq$

CLAVES
Problemas propuestos

NIVEL I

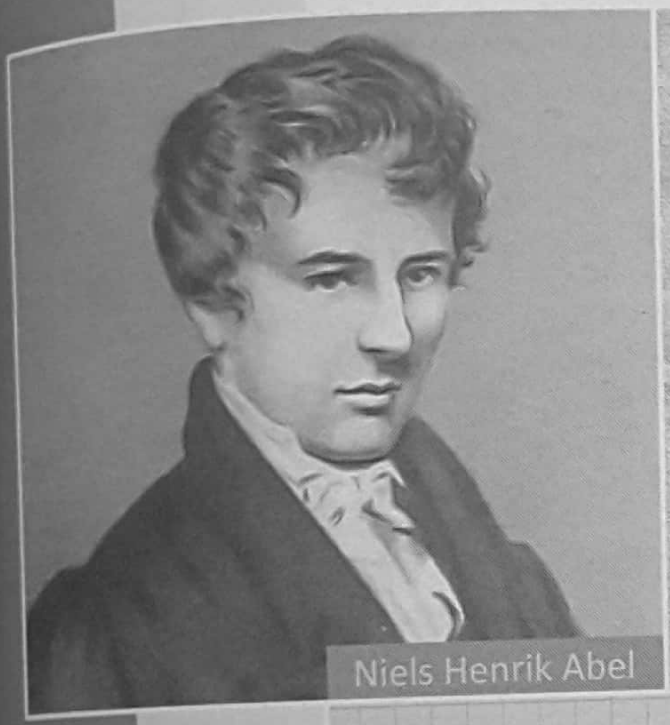
1 E	5 A	9 A	13 D	17 B
2 D	6 A	10 A	14 A	18 B
3 A	7 A	11 C	15 C	19 A
4 B	8 B	12 B	16 A	20 E

NIVEL II

21 D	29 A	37 C	45 C	53 E
22 A	30 C	38 A	46 D	54 A
23 D	31 D	39 C	47 D	55 C
24 A	32 A	40 B	48 C	56 B
25 A	33 C	41 D	49 B	57 A
26 D	34 A	42 B	50 A	58 E
27 D	35 A	43 D	51 C	59 E
28 A	36 D	44 A	52 A	60 D

Capítulo

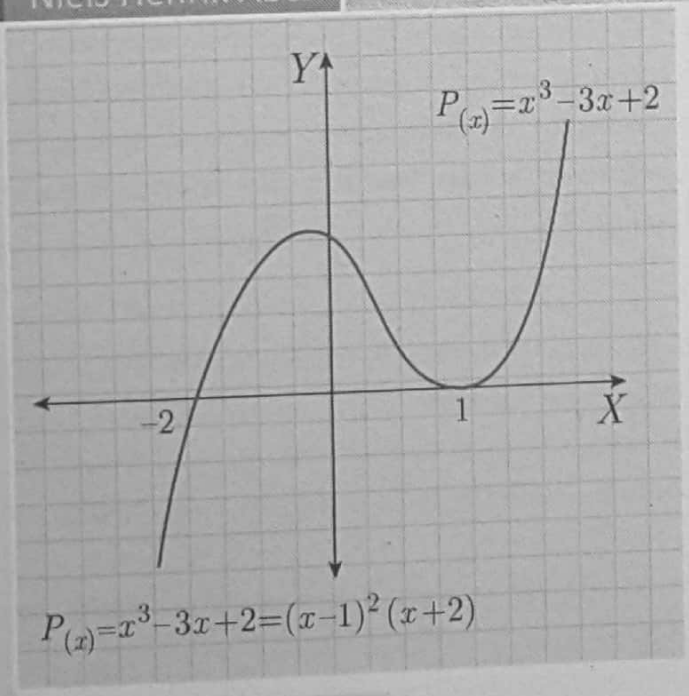
VII



$$P_{(x)} = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

$$\begin{array}{lcl} A_1x & C_1y & \rightarrow A_1C_2xy \\ A_2x & C_2y & \rightarrow A_2C_1xy \\ \hline & & Bxy \end{array} \quad +$$

$$\rightarrow P_{(x;y)} = (A_1x + C_1y)(A_2x + C_2y)$$



$$P_{(x)} = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

Factorización de polinomios

CAPÍTULO VII

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Objetivos

- Reconocer polinomios irreductibles y/o primos sobre el conjunto $\mathbb{Z}$ y sobre $\mathbb{Q}$.
- Aplicar diversos métodos para factorizar polinomios sobre $\mathbb{Z}$ y sobre $\mathbb{Q}$.
- Calcular las raíces racionales de polinomios de grado $n \geq 2$.

Introducción

Desde tiempos muy remotos, en los albores de todo pensamiento matemático, surge la teoría de los números, la cual se apoya en la parte algebraica.

En cuestiones de simplificación de expresiones, esta ayuda nos la brinda la teoría de la factorización, que en la vida cotidiana nos simplifica cálculos engorrosos y permite la resolución de ecuaciones e inecuaciones, el estudio de las funciones, etc. Para ello, desarrollaremos el tema con algunos conceptos primarios: factor algebraico, polinomios irreductibles, factor primo, etc.; así como los diversos métodos para poder factorizar polinomios, sobre determinados conjuntos numéricos.

A continuación mencionamos una serie de aplicaciones de la factorización:

- $P_{(x)}=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n\equiv(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)$.

  Este polinomio de grado n ha sido expresado en una multiplicación de factores lineales.
- Para resolver una ecuación cuadrática aplicaremos "diferencia de cuadrados" o "aspa simple".
- El aspa doble la podemos aplicar en la geometría para graficar ciertas regiones.
- Aplicamos el aspa doble especial para resolver principalmente algunas ecuaciones cuárticas (de 4.° grado).
- El método de los divisores binómicos nos sirve para resolver ciertas ecuaciones, de preferencia con grado impar.
- Aplicamos la factorización para resolver una inecuación polinomial.
- En la simplificación de fracciones, muchas veces debemos factorizar numerador y denominador para luego simplificar y operar.
- Con ayuda de la factorización podemos encontrar nuevas formas de operar, para aplicarlas en otros capítulos del curso.

▸ FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

CAMPO NUMÉRICO

Sea $K \neq \phi$ un conjunto numérico con dos operaciones binarias, adición $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$, definidas sobre K. Decimos que K es un campo numérico si se cumplen los siguientes axiomas:

Axiomas de la adición

A1. **Axioma de la cerradura**. Para cada par de elementos a y b de un conjunto K, existe un único elemento c que también pertenece a dicho conjunto, tal que $c=a+b$.

A2. **Axioma de la conmutatividad**. Para cada par de elementos a; b del conjunto K, se tendrá $a+b=b+a$.

A3. **Axioma de la asociatividad**. Para todo elemento a, b, c del conjunto K, la suma de estos es independiente de la manera como se ordene. Así se tendrá $(a+b)+c=a+(b+c)$.

A4. **Axioma del elemento neutro o neutro aditivo**. Para cada elemento del conjunto K, existe un único elemento denotado por 0; $0 \in K$, tal que $a+0=0+a=a$.

A5. **Axioma del elemento llamado opuesto de a o simétrico**. Para cada elemento a del conjunto K, existe un único elemento denotado por $-a$; $(-a) \in K$, tal que $a+(-a)=(-a)+a=0$.

Axiomas de la multiplicación

M1. **Axioma de la cerradura**. Para cada elemento a; b del conjunto K, existirá un único elemento c llamado producto que también pertenece al conjunto K, tal que $c=a \cdot b$.

M2. **Axioma de la conmutatividad**. Para cada par de elementos a; b del conjunto K, se cumple $ab=ba$.

"El orden de los factores no altera el producto".

M3. **Axioma de la asociatividad**. Para todo a; b; c elementos del conjunto K, se tendrá $a(bc)=(ab)c$.

"El producto es independiente de la manera como se asocia a los elementos a; b; c, es decir, el resultado no se altera con el orden".

M4. **Axioma del elemento neutro multiplicativo**. Para todo elemento a del conjunto K, existe un único elemento denotado por $1 \in K$, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

M5. **Axioma del elemento simétrico o inverso multiplicativo**. Para cada elemento no nulo a del conjunto K, existe un único elemento denotado por a^{-1} de K, tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Axioma de la distributividad de la multiplicación con respecto a la adición

Para los elementos a; b; c de K, se tiene

1. $a(b+c)=ab+ac$
2. $(a+b)c=ac+bc$

De donde se puede concluir que los conjuntos numéricos considerados como campos son los racionales ($\mathbb{Q}$), los reales ($\mathbb{R}$) y los complejos ($\mathbb{C}$).

1. ¿El conjunto de los números naturales forma un campo?

Respuesta

No, puesto que no se cumplen los axiomas A4, A5 y M5.

Así, $a+0=a$, pero $0 \notin \mathbb{N}$.

Si $a \in \mathbb{N}$, entonces $-a \notin \mathbb{N}$

Si $a \in \mathbb{N}$, entonces $a^{-1} \notin \mathbb{N}$

2. ¿El conjunto de los enteros forma un campo?

Respuesta

No, porque si $a \in \mathbb{Z}$, $a^{-1} \notin \mathbb{Z}$; es decir, no se cumple el axioma M5.

Por lo tanto, $\mathbb{Z}$ no forma un campo.

3. ¿Los irracionales ($\mathbb{Q}'$) forman un campo?

Respuesta

Vemos que $(5+\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}' \wedge (5-\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}'$,

pero $(5+\sqrt{2})+(5-\sqrt{2}) = 10 \notin \mathbb{Q}'$.

Entonces no siempre se cumple el axioma A1.

Asimismo $(5+\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}' \wedge (5-\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}'$,

pero $(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2}) = 23 \notin \mathbb{Q}'$.

Aquí tampoco se cumple el axioma M1.

Por lo tanto, los irracionales no forman campo.

Nota

Los campos numéricos más importantes son $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Es conveniente indicar que entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ hay muchos campos numéricos y que la teoría de campos numéricos se puede encontrar en todo texto de estructuras algebraicas.

POLINOMIO SOBRE UN CAMPO

Se llamará así cuando sus coeficientes pertenecen a ese campo.

Así

1. $P_{(x)} = 3x^2 + 5x^3 - \frac{4}{3}x - 7$

   Es un polinomio sobre los racionales, puesto que sus coeficientes son racionales.

2. $R_{(x;y)} = 4x + \sqrt{5}y$

   Vemos que $\sqrt{5}$ no es racional pero sí un real; entonces $R_{(x;y)}$ está sobre los reales.

3. $S_{(x;y)} = 5x^7 - \sqrt{2}xy + (1-i)y^3$; $i = \sqrt{-1}$

   Vemos que $(1-i)$ no es racional ni real, sino complejo; entonces $S_{(x;y)}$ está sobre los complejos.

Tenga en cuenta

I. Todo polinomio que está sobre los racionales estará también sobre los reales y los complejos; pero que esté sobre los reales o complejos no implica necesariamente que esté sobre los racionales.

II. Todo polinomio que está sobre los reales está también sobre los complejos.

Factor de un polinomio

Un polinomio $f_{(x)}$ de grado no nulo es considerado factor de otro polinomio $P_{(x)}$ si existe un único polinomio $q_{(x)}$, tal que

$$\boxed{P_{(x)} \equiv f_{(x)} \cdot q_{(x)}}$$

Es decir, la división de $P_{(x)}$ entre $f_{(x)}$ es exacta.

Ejemplos

1. De $P_{(x)} = x(x^2-1)(x+2)$, sus factores son x; $x+1$; $x-1$; $x+2$; x^2+2x; ...; $x(x+1)(x-1)(x+2)$.

2. De $P_{(x;y)} = c(x^3-y^3)(x+y)$, $c \neq 0$, sus factores son $x-y$; $x+y$; x^2+xy+y^2; ...; $c(x^3-y^3)(x+y)$.

Nótese que c no es considerado factor por ser de grado nulo.

Polinomio irreductible

Un polinomio es irreductible sobre un determinado campo numérico si no admite ser expresado como la multiplicación de dos o más factores sobre el mismo campo.

Ejemplo

$P_{(x)}=4x^4-1$

I. $P_{(x)}=4x^4-1$ no es irreductible sobre $\mathbb{Q}$ porque se puede expresar como

$$P_{(x)}=(2x^2+1)(2x^2-1).$$

II. $F_{(x)}=2x^2-1$ es irreductible sobre $\mathbb{Q}$ pero no sobre $\mathbb{R}$, puesto que

$$F_{(x)}=(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1).$$

III. $M_{(x)}=2x^2+1$ es irreductible sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ pero no sobre $\mathbb{C}$, puesto que

$$M_{(x)}=(\sqrt{2}x+i)(\sqrt{2}x-i).$$

Tenga en cuenta que $i=\sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria del conjunto $\mathbb{C}$, con la propiedad que: $i^2=-1$

Teorema

Todo polinomio de primer grado es irreductible sobre cualquier campo numérico.

Factor primo

Es un factor irreductible de un polinomio sobre un determinado campo, tal que:

I. Sobre $\mathbb{Z}$, los coeficientes son primos entre sí.

II. Sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, los factores primos son mónicos.

A los que no cumplen con I o II se les llama primos asociados.

Ejemplos

1. En $P_{(x)}=5(x-2)^3(x^2+3x+1)$
   I. Dos factores primos en $\mathbb{Q}$: $x-2$; x^2+3x+1
   II. $(x-2)^2$ no es primo, puesto que es divisible por $x-2$, es decir
   $(x-2)^2\equiv(x-2)(x-2)$

2. En $P_{(x;\,y;\,z)}=x^2yz^2$
   I. Tres factores primos: x; y; z
   II. Número de factores algebraicos:
   $(2+1)(1+1)(2+1)-1=17$
   Por lo tanto, tiene 17 factores algebraicos en total.

3. En $R_{(x;\,y)}=(x+y)^2(x^2+xy-y^2)^3xy^2$
   I. Cuatro factores primos:
   $x+y$; x^2+xy-y^2; x; y
   II. Número total de factores algebraicos:
   $(2+1)(3+1)(1+1)(2+1)-1=71$
   Por lo tanto, tiene 71 factores algebraicos en total.

▸▸ Nota

Al factor de un polinomio también se le llama divisor, pero no necesariamente es primo.

Teorema

Dado un polinomio $P_{(x)}$ expresado por

$P_{(x)}\equiv Kp_{1(x)}^{a}\cdot p_{2(x)}^{b}\cdot p_{3(x)}^{c}\cdots p_{n(x)}^{m}$,

donde $p_{1(x)}$; $p_{2(x)}$; ...; $p_{n(x)}$ son factores primos y primos entre sí y K es constante.

Luego, se tendrá

I. Número de factores primos: n

II. Número de factores o divisores algebraicos:

$(a+1)(b+1)...(m+1)-1$

FACTORIZACIÓN SOBRE $\mathbb{Z}$

Es la transformación de un polinomio en una multiplicación indicada de sus factores primos o sus potencias.

Ejemplo

$$x^2+9x-22 \equiv (x-2)(x+11)$$

factorización →

← producto

Teorema

De la factorización única
La factorización de un polinomio es única, salvo el orden de los factores.

MÉTODOS PARA FACTORIZAR $\mathbb{Z}$

Son técnicas a utilizar, de acuerdo a la forma que presente el polinomio.

Factor común - agrupación de términos

Se buscan factores comunes que pueden ser monomios o polinomios de más de un término. En caso de no haber algún factor común, se agrupará convenientemente tratando de que aparezca algún factor común.

Ejemplos

1. Factorice $P_{(x)}=4x^4+5x^2$.

Resolución

Observamos que x^2 es factor común de $4x^4$ y $5x^2$.

Luego $P_{(x)}=x^2(4x^2+5)$, donde sus factores primos son x; $4x^2+5$.

2. Factorice $P_{(x;y)}=x^3(x+y)+5xy(x+y)$.

Resolución

Se observa que el factor común es $x(x+y)$.

Luego $P_{(x;y)}=x(x+y)(x^2+5y)$, cuyos factores primos son x; $x+y$; x^2+5y.

3. Factorice $S_{(m;n)}=m^3n^4+m^3n^3+m^3n^2+m^3n$.

Resolución

I. Vemos que tiene como factor común a m^3n.

Luego $S_{(m;n)}$ queda así

$$S_{(m;n)}=m^3n\{\underline{n}^3+\underline{n}^2+\underline{\underline{n}}+\underline{\underline{1}}\}$$

II. Agrupamos de dos en dos, como se indica:

$$S_{(m;n)}=m^3n\{n^2\underline{(n+1)}+\underline{(n+1)}\},$$

donde $n+1$ es ahora el factor común.

Entonces $S_{(m;n)}=m^3n(n+1)(n^2+1)$.

4. Factorice
$P_{(x;y)}=a^2x-ax^2-2a^2y+2axy+x^3-2x^2y$.

Resolución

Vemos que no existe factor común alguno a simple vista, entonces tendremos que agrupar convenientemente como se indica.

$$\underline{a^2x}-\underline{\underline{ax^2}}+\underline{\underline{2axy}}-\underline{2a^2y}+\underline{x^3-2x^2y}$$

$$=a^2(x-2y)-ax(x-2y)+x^2(x-2y)$$

$$=(x-2y)(a^2-ax+x^2)$$

Luego

$$P_{(x;y)}=(x-2y)(a^2-ax+x^2).$$

Por identidades

En este caso utilizaremos las equivalencias algebraicas en sentido inverso al de los productos notables.

Nota

- $x^2 \pm 2xy + y^2 \equiv (x \pm y)^2$
- $x^2 - y^2 \equiv (x+y)(x-y)$
- $x^3 - y^3 \equiv (x-y)(x^2+xy+y^2)$
- $x^3 + y^3 \equiv (x+y)(x^2-xy+y^2)$
- $x^3 \pm y^3 \pm 3xy(x \pm y) \equiv (x \pm y)^3$
- $x^2 + (a+b)x + ab \equiv (x+a)(x+b)$
- $x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$\vdots$

entre otros

Ejemplos

1. Factorice

$R_{(x)} = x^3 + x^2 - x - 1.$

Resolución

Agrupando convenientemente como se indica:

$R_{(x)} = \underline{x^3} + \underline{x^2} - \underline{x} - \underline{1}$

$\rightarrow R_{(x)} = x^2(\underline{x+1}) - (\underline{x+1}) \equiv (x+1)(x^2-1)$

$\rightarrow R_{(x)} = (x+1)(x+1)(x-1)$

$\therefore R_{(x)} = (x+1)^2(x-1)$

2. Factorice

$P_{(x;\,a;\,b)} = x^2 + 2(a+b)x + a^2 + 2ab + b^2.$

Resolución

Como

$a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a+b)^2,$

luego

$P_{(x;\,a;\,b)} = \underbrace{x^2 + 2(a+b)x + (a+b)^2}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}}$

$\therefore P_{(x;\,a;\,b)} = (x+a+b)^2$

3. Factorice m en $R_{(m;\,p)} = m^2 - 4mn - p^2 + 4n^2.$

Resolución

Agrupando convenientemente como se indica:

$R_{(m;\,p)} = \underline{m^2} - \underline{4mn} - \underline{p^2} + \underline{4n^2}$

$\rightarrow R_{(m;\,p)} = \underbrace{(m^2 - 4mn + 4n^2)} - p^2 =$
$= (m-2n)^2 - p^2$

Luego, por diferencia de cuadrados

$R_{(m;\,p)} = (m-2n+p)(m-2n-p).$

4. Factorice $P_{(x)} = x^4 + 2x^2 + 9.$

Resolución

Hacemos que $2x^2 = 6x^2 - 4x^2$, por conveniencia para el problema.

Luego $P_{(x)} = \underline{x^4} + \underline{6x^2} - 4x^2 + \underline{9}.$

Agrupando convenientemente

$P_{(x)} = (x^4 + 6x^2 + 9) - 4x^2 \equiv (x^2+3)^2 - (2x)^2$

(diferencia de cuadrados)

$\rightarrow P_{(x)} = (x^2+3+2x)(x^2+3-2x)$

$\therefore P_{(x)} = (x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

5. Factorice el polinomio

$P_{(x;\,y)} = x^3 + y^3 + 6xy - 8.$

Resolución

Recuerde

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \equiv (a+b+c)$
$(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

Luego, podemos escribir el polinomio así:

$P_{(x;\,y)} = x^3 + y^3 + (-2)^3 - 3xy(-2)$

$\rightarrow P_{(x;\,y)} = (x+y-2)[x^2+y^2+(-2)^2-$
$-xy-x(-2)-y(-2)]$

$\therefore P_{(x;\,y)} = (x+y-2)(x^2+y^2+4-xy+2x+2y)$

Métodos de aspas

Aspa simple

Se utiliza para factorizar a los polinomios de la siguiente forma general:

$$P_{(x;y)}=Ax^{2n}+Bx^ny^m+Cy^{2m} \quad \vee \quad P_{(x)}=Ax^{2n}+Bx^n+C$$

Para factorizar el polinomio

$$P_{(x;y)}=Ax^{2n}+Bx^ny^m+Cy^{2m}$$

seguiremos el siguiente procedimiento:

I. Se descomponen los extremos convenientemente:

$$Ax^{2n}+Bx^ny^m+Cy^{2m}$$

$$\begin{array}{lll} a_1x^n & c_1y^m \longrightarrow & c_1a_2x^ny^m \\ a_2x^n & c_2y^m \longrightarrow & c_2a_1x^ny^m \end{array} \Big\} +$$

II. Se comprueba que el término central es igual a la suma de los productos parciales en forma de aspa:

$$B=c_1a_2+c_2a_1$$

III. Luego $P_{(x;y)}$ es $(a_1x^n+c_1y^m)(a_2x^n+c_2y^m)$, es decir,

$$P_{(x;y)}=(a_1x^n+c_1y^m)(a_2x^n+c_2y^m).$$

Ejemplos

1. Factorice el polinomio
$T_{(t)}=t^2-4t-5.$

Resolución
Por aspa simple

$$t^2-4t-5$$

$$\begin{array}{lll} t & -5 \longrightarrow & -5t \\ t & 1 \longrightarrow & t \end{array} \Big\} +$$

$$-4t$$

Luego el polinomio factorizado es

$$T_{(t)}=(t-5)(t+1).$$

2. Factorice el polinomio
$P_{(x)}=3x^2+10x+8.$

Resolución
Descomponiendo los extremos

$$3x^2+10x+8$$

$$\begin{array}{lll} 3x & 4 \longrightarrow & 4x \\ x & 2 \longrightarrow & 6x \end{array} \Big\} +$$

$$10x$$

La forma factorizada es

$$(3x+4)(x+2)$$

es decir

$$P_{(x)}=(3x+4)(x+2)$$

3. Factorice el polinomio
$P_{(x;y)}=15x^4-11x^2y+2y^2.$

Resolución
Descomponiendo adecuadamente los extremos

$$15x^4-11x^2y+2y^2$$

$$\begin{array}{lll} 5x^2 & -2y \longrightarrow & -6x^2y \\ 3x^2 & -y \longrightarrow & -5x^2y \end{array} \Big\} +$$

$$-11x^2y$$

Por lo tanto, el polinomio factorizado es

$$P_{(x;y)}=(5x^2-2y)(3x^2-y).$$

4. Factorice el polinomio
$R_{(x;y)}=4x^4+15x^2y^2-54y^4.$

Resolución

Descomponiendo los extremos adecuadamente

$$4x^4+15x^2y^2-54y^4$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & & 6y^2 \\ 4x^2 & & -9y^2 \end{array}$$

$$\rightarrow\ R_{(x;\,y)}=(x^2+6y^2)(4x^2-9y^2)$$

$$=(x^2+6y^2)(2x+3y)(2x-3y)$$

$$\therefore\ R_{(x;\,y)}=(x^2+6y^2)(2x+3y)(2x-3y)$$

Teorema

Todo polinomio de la forma

$P_{(x)}=Ax^2+Bx+C;\ \{A;\,B;\,C\}\subset \mathbb{Z};$

$\forall\ A\neq 0$

es factorizable en los racionales, si y solo si B^2-4AC es un cuadrado perfecto (C.P.).

Ejemplos

1. ¿Es $2x^2-5x+2$ factorizable?

   Resolución

   Veamos: $(-5)^2-4(2)(2)=25-16=9$

   Como 9 es cuadrado perfecto, entonces $2x^2-5x+2$ sí es factorizable en los racionales.

2. ¿Es $3x^2+x+1$ factorizable en $\mathbb{Q}$?

   Resolución

   Veamos: $1^2-4(3)(1)=-11$

   Como no es cuadrado perfecto, entonces $3x^2+x+1$ no es factorizable en $\mathbb{Q}$.

3. Demuestre que $\forall\ k\in\mathbb{Z},\ x^2+(k+1)x+k$ es factorizable en $\mathbb{Q}$.

   Resolución

   Veamos:

   $(k+1)^2-4(1)(k)=k^2+2k+1-4k=(k-1)^2$

   Se observa que $(k-1)^2$ es un cuadrado perfecto $\forall\ k\in\mathbb{Z}$.

   Por lo tanto, $x^2+(k+1)x+k$ es factorizable en $\mathbb{Q}$.

4. ¿Para cuántos valores de P el polinomio $T_{(x)}=x^2+px-6$ es factorizable sobre $\mathbb{Q}$?

   Resolución

   Si es cuadrática factorizable, necesariamente admite el aspa simple y estas serán todas las posibilidades.

$$x^2+px-6$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & & 6 & 3 & 2 & 1 \\ x & & -1 & -2 & -3 & -6 \end{array}$$

Por lo tanto, P puede tomar 4 valores diferentes.

Otro método (utilizando el teorema)

Para ser factorizable

$$p^2-4(-6)=r^2\ /\ p;\ r\in\mathbb{Z}.$$

$$\rightarrow\ r^2-p^2=24$$

$$(r+p)(r-p)=24$$

~~1~~	~~24~~
2	12
3	8
~~4~~	~~6~~
6	4
~~8~~	~~3~~
12	2
~~24~~	~~1~~

Si p y r son enteros, entonces $r+p\ \wedge\ r-p$ son ambos pares o ambos impares.

Por lo tanto, p toma solo 4 valores diferentes.

Corolario

Todo polinomio cuadrático en una variable si es factorizable, debe admitir el criterio del aspa simple. Si no admite aspa simple, es porque no es factorizable sobre Q.

Nota

Existen polinomios que no tienen la forma general; sin embargo, pueden ser factorizados por aspa simple.

Así

$$M_{(x)}=x^5-\underline{2x^3+5x^2}-10$$

$$\begin{array}{ll} x^3 & 5 \\ x^2 & -2 \end{array}$$

$$\therefore\ M_{(x)}=(x^3+5)(x^2-2)$$

Aspa doble

Se utiliza para factorizar a los polinomios de la siguiente forma general:

$$P_{(x;y)}=Ax^{2n}+Bx^ny^m+Cy^{2m}+Dx^n+Ey^m+F$$

Procedimiento para factorizar:

I. Se debe ordenar el polinomio de acuerdo a esta forma general.

II. De faltar algún término, se coloca en su lugar por cero.

III. Se aplicarán aspas simples a los términos:

1. Ax^{2n}; Bx^ny^m; Cy^{2m}
2. Cy^{2m}; Ey^m; F
3. Ax^{2n}; Dx^n; F

IV. Los factores se tomarán de manera horizontal.

Esquema

$$P_{(x;y)}=Ax^{2n}+Bx^ny^m+Cy^{2m}+Dx^n+Ey^m+F$$

$$\begin{array}{lll} a_1x^n & c_1y^m & f_1 \\ a_2x^n & c_2y^m & f_2 \end{array}$$

Luego tenemos

$$P_{(x;y)}=(a_1x^n+c_1y^m+f_1)(a_2x^n+c_2y^m+f_2)$$

Ejemplos

1. Factorice el polinomio

$$P_{(a;b)}=a^2-3ab+2b^2+2a-3b+1.$$

Resolución

Aplicando las aspas simples

$$a^2-3ab+2b^2+2a-3b+1$$

$$\begin{array}{lll} a & -2b & 1 \\ a & -b & 1 \end{array}$$

Luego, el polinomio factorizado es

$$P_{(a;b)}=(a-2b+1)(a-b+1).$$

Otro método

Agrupando convenientemente, como se indica

$$\underline{a^2}-\underline{\underline{3ab}}+2b^2+\underline{2a}-\underline{\underline{3b}}+\underline{1}$$

$$(a^2+2a+1)-3ab-3b+2b^2$$

$$=(a+1)^2-3b(a+1)+2b^2$$

Tiene la forma del aspa simple y queda

$(a+1-b)(a+1-2b)$, equivalente a

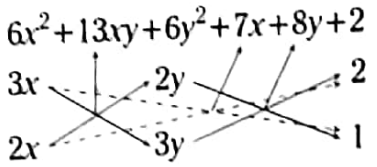
$$P_{(a;b)}=(a-b+1)(a-2b+1).$$

2. Factorice el polinomio

$$P_{(x;y)}=6x^2+13xy+6y^2+7x+8y+2.$$

Resolución

Aplicando las aspas



Luego, la forma factorizada es

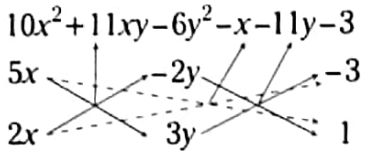
$$(3x+2y+2)(2x+3y+1).$$

3. Factorice el polinomio

$$P_{(x;\,y)}=10x^2+11xy-6y^2-x-11y-3.$$

Resolución

Descomponiendo en aspas simples



Luego, su forma factorizada es

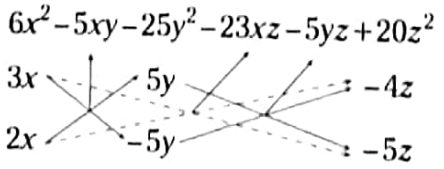
$$P_{(x;\,y)}=(5x-2y-3)(2x+3y+1).$$

4. Factorice el polinomio

$$M_{(x;\,y;\,z)}=6x^2-25y^2+20z^2-5xy-23xz-5yz.$$

Resolución

Se ordenará de acuerdo a la forma general, considerando a la tercera variable como si fuera una constante, así



Luego, su forma factorizada es

$$M_{(x;\,y;\,z)}=(3x+5y-4z)(2x-5y-5z).$$

Aspa doble especial

Se aplica a los polinomios que presentan la siguiente forma general:

$$\boxed{P_{(x)}=Ax^{4n}+Bx^{3n}+Cx^{2n}+Dx^{n}+E}$$

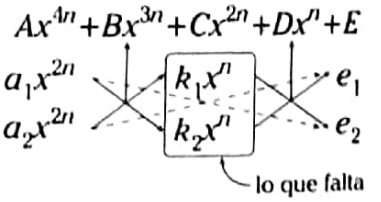
De manera particular, si $n=1$ tendremos el polinomio de 4.° grado.

Procedimiento para factorizar:

I. Se ordena de acuerdo a la forma general y se coloca el cero en el lugar del término que falta.

II. Se descomponen adecuadamente los extremos y se busca, mediante un aspa simple, aproximarse al término central.

Así



Se debe tener (SDT): Cx^{2n}

Se tiene (ST): $(a_1e_2+a_2e_1)x^{2n}$

Falta: $(C-a_1e_2-a_2e_1)x^{2n}=Kx^{2n}$

III. Lo que falta se descompone en la parte central mediante aspas simples a ambos lados.

IV. Los factores se toman en forma horizontal.

$$(a_1x^{2n}+k_1x^{n}+e_1)(a_2x^{2n}+k_2x^{n}+e_2)$$

Ejemplos

1. Factorice $P_{(x)}=x^4+7x^3+14x^2+7x+1$.

Resolución

Descomponiendo los extremos

$$x^4+7x^3+14x^2+7x+1 \qquad \text{SDT: } 14x^2$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & \boxed{3x} & 1 \\ x^2 & \boxed{4x} & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{ST: } 2x^2 \\ \text{Falta: } \boxed{12x^2} \end{array}$$

$$\therefore\ P_{(x)}=(x^2+3x+1)(x^2+4x+1).$$

2. Factorice $S_{(x)}=x^3(x+1)+2x^2+5(x-3)$.

Resolución

Efectuando y ordenando de acuerdo a la forma general:

$$S_{(x)}=x^4+x^3+2x^2+5x-15 \qquad \text{SDT: } 2x^2$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & \boxed{0x} & 5 \\ x^2 & \boxed{x} & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{ST: } 2x^2 \\ \text{Falta: } \boxed{0x^2} \end{array}$$

$$\rightarrow\ S_{(x)}=(x^2+0x+5)(x^2+x-3)$$

$$\therefore\ S_{(x)}=(x^2+5)(x^2+x-3)$$

3. Factorice

$$P_{(x;y)}=x^4-10x^3y+35x^2y^2-50xy^3+24y^4.$$

Resolución

$$P_{(x;y)}=x^4-10x^3y+35x^2y^2-50xy^3+24y^4 \qquad \text{SDT: } 35x^2y^2$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & \boxed{-5xy} & 6y^2 \\ x^2 & \boxed{-5xy} & 4y^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{ST: } 10x^2y^2 \\ \text{Falta: } 25x^2y^2 \end{array}$$

$$\rightarrow\ P_{(x;y)}=(x^2-5xy+6y^2)(x^2-5xy+4y^2)$$

$$\begin{array}{cc} x & -3y \\ x & -2y \end{array} \qquad \begin{array}{cc} x & -4y \\ x & -y \end{array}$$

$$\therefore\ P_{(x;y)}=(x-3y)(x-2y)(x-4y)(x-y)$$

4. Factorice

$$P_{(x;y)}=6x^4+6y^8+4xy^6+11x^2y^4+x^3y^2.$$

Resolución

Ordenando para el aspa doble especial:

$$P_{(x;y)}=6x^4+x^3y^2+11x^2y^4+4xy^6+6y^8 \qquad \text{SDT: } 11x^2y^4$$

$$\begin{array}{ccc} 2x^2 & \boxed{-xy^2} & 3y^4 \\ 3x^2 & \boxed{2xy^2} & 2y^4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{ST: } 13x^2y^4 \\ \text{Falta: } -2x^2y^4 \end{array}$$

$$\therefore\ P_{(x;y)}=(2x^2-xy^2+3y^4)(3x^2+2xy^2+2y^4)$$

Método de divisores binómicos

Finalidad

Se utiliza para factorizar los polinomios en una variable y de grado superior, siempre y cuando admita por lo menos un factor lineal.

Raíz de un polinomio

Dado un polinomio $P_{(x)}$ no constante, a es una raíz del polinomio $P_{(x)}$ si y solo si $P_{(a)}=0$.

Ejemplo

En $P_{(x)}=x^3-3x-2$ observamos que

$P_{(2)}=2^3-3(2)-2=0.$

Entonces diremos que 2 es una raíz de $P_{(x)}$.

Determinación de los posibles ceros o raíces-racionales (PCR) de un polinomio $P_{(x)}$

Para conocer los posibles ceros racionales de un polinomio $P_{(x)}$ de coeficientes enteros

$$P_{(x)}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n;\quad a_0\cdot a_n\neq 0$$

se utilizará el siguiente criterio:

$$\boxed{\text{PCR}=\pm\left\{\frac{\text{Divisores de } |a_n|}{\text{Divisores de } |a_0|}\right\}.}$$

Toda raíz racional de un polinomio pertenece, necesariamente, al conjunto de los posibles ceros racionales.

Ejemplos

1. En $P_{(x)}=3x^4+4x+2x^2-9$

   los posibles ceros racionales son

   $$\text{PCR}=\pm\left\{\frac{\text{divisores de 9}}{\text{divisores de 3}}\right\}=\pm\left\{\frac{1;\ 3;\ 9}{1;\ 3}\right\}$$

   $$=\pm\left\{1;\ 3;\ 9;\ \frac{1}{3}\right\}$$

   El polinomio posiblemente se anule para algunos de estos valores, así

   $P_{(1)}=3+4+2-9=0$, entonces $x=1$ es un cero o raíz racional.

2. Dado el polinomio $P_{(x)}=x^3-3x+1$, sus posibles ceros racionales son 1 o -1.

   Asimismo

   $$P_{(1)}=-1 \quad \wedge \quad P_{(-1)}=3$$

   Esto nos indica que no tiene ceros racionales; por lo tanto, no tendrá factores lineales y $f_{(x)}$ no será factorizable en los racionales.

Teorema del factor

Dado un polinomio $P_{(x)}$, el número b es un cero de este polinomio si y solo si $(x-b)$ es un factor de $P_{(x)}$.

Por ejemplo en el polinomio

$P_{(x)}=x^3+5x+6$, se tiene

$\text{PCR}=\pm\{1;\ 2;\ 3;\ 6\}$

Como $P_{(-1)}=(-1)^3+5(-1)+6=0$,

entonces $(x-(-1))\equiv(x+1)$ será un factor de $P_{(x)}$.

En tal caso, será posible escribir

$$P_{(x)}\equiv(x+1)q_{(x)}.$$

Procedimiento para factorizar

Dado el polinomio

$P_{(x)}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n;\ \ a_0\cdot a_n\neq 0,$

de coeficientes enteros, se procede de la siguiente manera:

1. Se hallan los posibles ceros racionales que nos permiten encontrar la raíz o el cero racional. Luego, mediante el teorema del factor, se podrá conocer el primer factor.
2. Se hace una división por la regla de Ruffini entre el polinomio y el primer factor encontrado, siendo el cociente de esta división el otro factor buscado.

Ejemplos

1. Factorice el polinomio

   $$P_{(x)}=x^3-7x+6.$$

   Resolución

   I. Los posibles ceros racionales son

   $\text{PCR}\pm\{1;\ 2;\ 3;\ 6\}$

   Veamos:

   $$P_{(1)}=1-7+6=0$$

   $\rightarrow\ (x-1)$

   es un factor de $P_{(x)}$.

   Es decir: $P_{(x)}=(x-1)q_{(x)}$

   II. El otro factor lo hallamos con la regla de Ruffini:

   $[P_{(x)}\div(x-1)]$

	1	0	−7	6
$x=1$	↓	1	1	−6
	1	1	−6	0

$$\underbrace{1\quad 1\quad -6}_{q_{(x)}}$$

$$P_{(x)}\equiv(x-1)(x^2+x-6)$$

$$\begin{array}{ll} x & 3 \\ x & -2 \end{array}$$

$$\therefore\ P_{(x)}=(x-1)(x+3)(x-2)$$

2. Factorice el polinomio
$P_{(x)}=2x^3-5x^2-23x-10.$

Resolución

Hallamos los posibles ceros racionales

$$\text{PCR}=\pm\left\{\frac{1;2;5;10}{1;2}\right\}=\pm\left\{1;2;5;10;\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right\}$$

Para $x=-2$

$\rightarrow\ P_{(-2)}=2(-2)^3-5(-2)^2-23(-2)-10=0$

$P_{(-2)}=-16-20+46-10=0$

$\rightarrow$ -2 es una raíz de $P_{(x)}$

Así $(x+2)$ es factor de $P_{(x)}$ $\rightarrow$ $P_{(x)}=(x+2)\cdot q_{(x)}$

Hallamos $q_{(x)}$ usando la regla de Ruffini.

	2	−5	−23	−10
$x=-2$	↓	−4	18	+10
	2	−9	−5	0

coef. $q_{(x)}$

$\rightarrow\ P_{(x)}=(x+2)(2x^2-9x-5)$

$2x \quad 1$

$x \quad -5$

$\therefore\ P_{(x)}=(x+2)(2x+1)(x-5)$

3. Factorice el polinomio
$P_{(x)}=\underline{4}x^5-29x^3-24x^2+7x+\underline{6}.$

Resolución

Hallamos los posibles ceros racionales

$$\text{PCR}=\pm\left\{\frac{1;2;3;6}{1;2;4}\right\}=\pm\left\{1;2;3;6;\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right\}$$

Podemos hacer directamente la división por Ruffini, consecutivamente.

	4	0	−29	−24	7	6
$x=-1$	↓	−4	4	+25	−1	−6
$x=-2$	4	−4	−25	12	6	0
	↓	−8	24	2	−6	
$x=3$	4	−12	−1	3	0	
	↓	12	0	−3		
$x=\frac{1}{2}$	4	2	−1	0		
		2	1			
	4	2	0			

Luego

$P_{(x)}=(x+1)(x+2)(x-3)(x-1/2)(4x+2),$

que es idéntico a

$P_{(x)}=(x+1)(x+2)(x-3)(2x-1)(2x+1).$

Teorema

Todo polinomio cúbico es factorizable sobre $\mathbb{Q}$, si y solo si admite al menos una raíz racional.

Ejemplos

1. El polinomio $P_{(x)}=x^3-3x+2$ se anula para $x=1$. Así $P_{(1)}=1^3-3+2=0$

   Luego, 1 es una raíz racional. Por lo tanto, $P_{(x)}=x^3-3x+2$ es factorizable sobre $\mathbb{Q}$.

2. El polinomio $R_{(x)}=x^3+3x-1$ no es factoriable sobre $\mathbb{Q}$.

   En efecto:

   como PCR$=\{1;-1\}$ y

   $P_{(1)}=1+3-1=3\neq 0$

   $P_{(-1)}=(-1)^3+3(-1)-1=-5\neq 0$

   Entonces no admite raíz racional.

   Así, $R_{(x)}=x^3+3x-1$ no es factorizable sobre $\mathbb{Q}$.

Artificios diversos

Son métodos prácticos que facilitan la resolución de los problemas, tales como:

Cambio de variable

Consiste en transformar, equivalentemente, mediante un cambio de variable adecuado, un problema operativo en otro más simplificado.

Ejemplos

1. Factorice el polinomio

$$P_{(a;\,b;\,c)}=(18c+7b+6a)(a+3c+3b)+3b^2.$$

Resolución

Agrupamos convenientemente

$$(a+3c+3b)\left[6(a+3c+3b)-11b\right]+3b^2$$

Haciendo $a+3c+3b=z$, se tiene

$$P_{(z;\,b)}=z(6z-11b)+3b^2.$$

$$6z^2\underline{-11bz}+3b^2$$

$$\begin{array}{ll} 3z & -b \\ 2z & -3b \end{array}$$

Por aspa simple se obtiene

$$P_{(z;\,b)}=(3z-b)(2z-3b).$$

Luego, reponiendo z tenemos

$$P_{(a;\,b;\,c)}=(3a+9c+8b)(2a+6c+3b).$$

2. Factorice e indique la suma de factores primos de $R_{(x)}=(x^2+7x+5)^2+3(x^2+7x+5)-10$.

Resolución

Haciendo $x^2+7x+5=k$, se tiene

$$R_{(k)}=k^2+3k-10.$$

Luego, por aspa simple se obtiene

$$R_{(k)}=(k+5)(k-2).$$

Reponiendo k en términos de x

$$R_{(x)}=(x^2+7x+5+5)(x^2+7x+5-2)$$

$$R_{(x)}=(x^2+7x+10)(x^2+7x+3)$$

$$\begin{array}{ll} x & 5 \\ x & 2 \end{array}$$

$$R_{(x)}=(x+5)(x+2)(x^2+7x+3)$$

Por lo tanto, la suma de factores primos es

$$x+5+x+2+x^2+7x+3=x^2+9x+10.$$

Sumar y restar

Consiste en sumar y restar, simultáneamente, una misma expresión o descomponer algún término del polinomio, de tal modo que una expresión aparentemente no factorizable se transforma en otra de fácil factorización.

Para polinomios de grado par

Consiste en buscar un trinomio cuadrado perfecto para luego llevarlo a una diferencia de cuadrados.

Ejemplos

1. Factorice $F_{(x)}=x^4+6x^2+25$.

Resolución

Formando el trinomio cuadrado perfecto (sumar y restar $4x^2$)

$$F_{(x)}=\underbrace{(x^2)^2+5^2+\underbrace{6x^2+4x^2}_{10x^2}}_{(x^2+5)^2-\boxed{(2x)^2}}-\boxed{4x^2}$$

$$F_{(x)}=\overbrace{(x^2+5)^2-(2x)^2}^{\text{diferencia de cuadrados}}$$

$$=(x^2+5+2x)(x^2+5-2x)$$

Ordenando

$$F_{(x)}=(x^2+2x+5)(x^2-2x+5)$$

2. Factorice $M_{(x;y)}=16x^4-12x^2y^2+y^4$.

Resolución

Descomponiendo

$-12x^2y^2$ como $-8x^2y^2-4x^2y^2$ se tiene

$$M_{(x;y)}=\underbrace{16x^4-8x^2y^2+y^4}_{(4x^2-y^2)^2}-4x^2y^2$$

$$M_{(x;y)}=(4x^2-y^2)^2-(2xy)^2$$
$$=(4x^2-y^2+2xy)(4x^2-y^2-2xy)$$

Ordenando se tiene

$$M_{(x;y)}=(4x^2+2xy-y^2)(4x^2-2xy-y^2)$$

Para polinomios de grado impar

Recuerde

- $x^3+1\equiv(x+1)(x^2-x+1)$
- $x^3-1\equiv(x-1)(x^2+x+1)$
- $x^4+x^2+1\equiv(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Ejemplos

1. Factorice $P_{(x)}=x^5+x+1$.

Resolución

Sumando y restando x^2 se tiene

$$P_{(x)}=x^5-x^2+x^2+x+1$$
$$\rightarrow P_{(x)}=x^2(x^3-1)+x^2+x+1$$
$$\rightarrow P_{(x)}=x^2(x-1)(x^2+x+1)+x^2+x+1$$
$$\rightarrow P_{(x)}=(x^2+x+1)[x^2(x-1)+1]$$
$$\therefore P_{(x)}=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$$

2. Factorice $Q_{(x)}=x^7+x^2+1$.

Resolución

Sumando y restando x^4 se tiene

$$Q_{(x)}=x^7-x^4+x^4+x^2+1$$
$$\rightarrow Q_{(x)}=x^4(x^3-1)+(x^4+x^2+1)$$
$$\rightarrow Q_{(x)}=x^4(x-1)(x^2+x+1)+$$
$$+(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$
$$\rightarrow Q_{(x)}=(x^2+x+1)[x^4(x-1)+(x^2-x+1)]$$
$$\therefore Q_{(x)}=(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^2-x+1)$$

Polinomios recíprocos

A $P_{(x)}$ se le llama recíproco si cumple con la siguiente igualdad:

$$\boxed{P_{(x)}=x^k\cdot P_{\left(\frac{1}{x}\right)},}$$

donde k es el grado del polinomio.

Ejemplo

En el polinomio

$$P_{(x)}=x^2-3x+1$$

se observa

$$P_{(x)}=x^2\underbrace{\left\{1-3\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right\}}_{P\left(\frac{1}{x}\right)}\rightarrow P_{(x)}=x^2\cdot P_{\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Entonces P es recíproco, de grado 2.

Estos polinomios tienen por característica que si una raíz cualquiera es α, la otra raíz necesariamente es α^{-1} / $\alpha\neq0$, y tienen la siguiente forma:

$P_{1(x)}=ax+a$ (caso excepcional)

$P_{2(x)}=ax^2+bx+a$

$P_{3(x)}=ax^3+bx^2+bx+a$

$P_{4(x)}=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$

$\vdots$

Procedimiento para factorizar polinomios recíprocos de grado par

I. Se extrae la parte literal del término central, dando lugar a expresiones de la forma

$$x+\frac{1}{x};\ x^2+\frac{1}{x^2};\ldots$$

II. Se hace el cambio de variable $x+\frac{1}{x}$, con lo cual se logra disminuir el grado del polinomio en la mitad.

Ejemplos

1. Factorice $P_{(x)}=x^4+6x^3+7x^2+6x+1$.

Resolución

Se factoriza la parte literal del término central

$$P_{(x)}=x^2\left[x^2+6x+7+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right]$$

$$\rightarrow\ P_{(x)}=x^2\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x+\frac{1}{x}\right)+7\right]$$

Hacemos $x+\frac{1}{x}=z$. Luego, elevando al cuadrado se tendrá

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$$

$$\rightarrow\ P_{(x;z)}=x^2(z^2-2+6z+7)=x^2(z^2+6z+5)$$
$$=x^2(z+1)(z+5)$$

$$\rightarrow\ P_{(x;z)}=x^2(z+5)(z+1)$$

Reponiendo z

$$P_{(x)}=x^2\left(x+\frac{1}{x}+5\right)\left(x+\frac{1}{x}+1\right)$$

$$\therefore\ P_{(x)}=(x^2+5x+1)(x^2+x+1)$$

Teorema

Todo polinomio recíproco de grado impar se anula para 1 o −1.

Corolario

Sea $P_{(x)}$ un polinomio de grado impar, entonces $(x-1)$ o $(x+1)$ será uno de sus factores.

2. Halle el factor primo del polinomio

$$A_{(x)}=3x^5+5x^4+3x^3+3x^2+5x+3$$

que posee mayor suma de coeficientes.

Resolución

Se observa que $A_{(-1)}=0$, entonces $(x+1)$ es un factor de $A_{(x)}$.

El otro factor lo deducimos con la regla de Ruffini:

	3	5	3	3	5	3
$x=1$		−3	−2	−1	−2	−3
	3	2	1	2	3	0

q

De donde

$$q_{(x)}=3x^4+2x^3+x^2+2x+3$$

Luego $q_{(x)}$, por ser un polinomio recíproco de grado par, se factoriza en

$$q_{(x)}=x^2\left\{3x^2+2x+1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right\}$$

$$=x^2\left\{3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1\right\}$$

Haciendo

$$x+\frac{1}{x}=z\ \rightarrow\ x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$$

se tiene

$$q_{(x;z)}=x^2[3(z^2-2)+2z+1]$$
$$=x^2(3z^2+2z-5)$$
$$=x^2(3z+5)(z-1)$$

Reponiendo z

$$q_{(x)}=x^2\left\{3\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right\}\left\{x+\frac{1}{x}-1\right\}$$

$$q_{(x)}=(3x^2+5x+3)(x^2-x+1)$$

Luego tenemos

$$A_{(x)}=(x+1)(3x^2+5x+3)(x^2-x+1),$$

de donde el factor de mayor suma de coeficientes es $3x^2+5x+3$.

Factorización de polinomios simétricos y alternados

Polinomio simétrico

Es el polinomio de dos o más variables que no se altera al intercambiar cualquier par de variables en forma simultánea.

Ejemplo

Sea $G_{(x;y;z)}=5(x^3+y^3+z^3)+2xyz$.

Resolución

Elegimos arbitrariamente dos variables $y;z$ y las intercambiamos

$$G_{(x;z;y)}=5(x^3+z^3+y^3)+2xzy$$
$$=5(x^3+y^3+z^3)+2xyz$$

Podemos observar que el polinomio no ha sufrido ningún cambio.

Por lo tanto, $G_{(x;y;z)}$ es simétrico.

		Formas generales de los polinomios simétricos
Para dos variables	1.er grado	$A(x+y)$
	2.º grado	$A(x^2+y^2)+Bxy$
	3.er grado	$A(x^3+y^3)+B(x^2y+xy^2)$
Para tres variables	1.er grado	$A(x+y+z)$
	2.º grado	$A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+xz+yz)$
	3.er grado	$A(x^3+y^3+z^3)+B[x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)]+Cxyz$

Polinomio alternado

Es el polinomio de dos o más variables que solo cambia de signo al intercambiar cualquier par de variables de manera simultánea.

Ejemplo

Sea $R_{(x;y)}=x^3-y^3$.

Resolución

Si cambiamos x por y, recíprocamente se obtiene

$R_{(y;x)}=y^3-x^3=-(x^3-y^3)$;

de donde $R_{(y;x)}\equiv -R_{(x;y)}$.

Por lo tanto, $R_{(x;y)}$ es alternado.

Teoremas

I. De la adición, sustracción y multiplicación de polinomios simétricos resultan polinomios simétricos.
II. De la multiplicación de un polinomio simétrico por otro alternado resulta otro polinomio alternado.
III. Si un polinomio simétrico se anula para alguna de sus variables, se anulará para todas sus variables.
IV. Si un polinomio se anula para una variable igual a otra, se anulará para esa misma variable igual a las demás.

Procedimiento para factorizar

1. Se verifica si el polinomio es simétrico o alternado.
2. Buscaremos factores binomios haciendo una variable igual a otra o a su negativo.
3. Se establece la identidad de polinomios teniendo presente la simetría.

Ejemplos

1. Factorice el polinomio

$$S_{(x;\,y;\,z)}=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$$

Resolución

Nótese que al intercambiar cualquier par de variables, el polinomio S altera su signo.

Es decir: $S_{(x;\,y;\,z)}=-S_{(y;\,x;\,z)}$

Así el polinomio es alternado de grado 3.

Además, para $x=y$ se tiene $S_{(y;\,y;\,z)}=0$

$\rightarrow$ $(x-y)$ es un factor de S.

Análogamente, $(y-z)$; $(z-x)$ son factores de S.

Luego $S_{(x;\,y;\,z)}=(x-y)(y-z)(z-x)$.

2. Factorice el polinomio

$$M_{(a;\,b;\,c)}=a^3c+c^3b+b^3a-a^3b-b^3c-c^3a.$$

Resolución

Si intercambiamos cualquier par de variables, el polinomio solo alterna el signo.

Así $M_{(a;\,b;\,c)}=-M_{(b;\,a;\,c)}$.

Entonces, el polinomio es alternado; además, para $a=b$ se tiene $M_{(b;\,b;\,c)}=0$ $\rightarrow$ $(a-b)$ es un factor de M. Luego, por polinomios alternados, los otros factores son

$$\begin{matrix} & a & \\ b & & \\ & c & \end{matrix} \quad (a-b),\ (b-c) \text{ y } (c-a)$$

$$\rightarrow \underbrace{M_{(a;\,b;\,c)}}_{4.^{\circ}\text{ grado}}=\underbrace{(a-b)(b-c)(c-a)}_{3.^{\text{er}}\text{ grado}}\cdot\underbrace{[k(a+b+c)]}_{1.^{\text{er}}\text{ grado}}$$

Para calcular k es suficiente aplicar valor numérico en la identidad

$$a^3c+c^3b+b^3a-a^3b-b^3c-c^3a\equiv$$
$$\equiv(a-b)(b-c)(c-a)[k(a+b+c)]$$

Evaluando en $a=1$, $b=2$, $c=3$ tenemos:

$$12=k(-1)(-1)(2)(6)$$
$$\rightarrow\ 12k=12$$
$$\rightarrow\ k=1$$
$$\rightarrow\ M_{(a;\,b;\,c)}=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

3. Factorice el polinomio

$$M_{(x;\,y)}=(x+y)^5-x^5-y^5.$$

Resolución

Observamos para

$x=0$ $\rightarrow$ $M_{(0;\,y)}=0$ $\rightarrow$ x es un factor

$y=0$ $\rightarrow$ $M_{(x;\,0)}=0$ $\rightarrow$ y es un factor

$x=-y$ $\rightarrow$ $M_{(-y;\,y)}=0$ $\rightarrow$ $x+y$ es factor

Por identidad

$$(x+y)^5-x^5-y^5\equiv\underbrace{xy(x+y)}_{3.^{\text{er}}\text{ grado}}\underbrace{Q(x\cdot y)}_{2.^{\circ}\text{ grado}}$$

$$\rightarrow\ Q_{(x;\,y)}=M(x^2+y^2)+N(xy)$$

$$\therefore\ (x+y)^5-x^5-y^5\equiv xy(x+y)\{M(x^2+y^2)+Nxy\}$$

Haciendo

I. $x=y=1$

$\rightarrow$ $2^5-1-1=2\{2M+N\}$

$\rightarrow$ $2M+N=15$ $\quad(\alpha)$

II. $x=2$; $y=-1$

$\rightarrow$ $1-2^5+1=(-2)(1)\{5M-2N\}$

$\rightarrow$ $5M-2N=15$ $\quad(\beta)$

De (α) y (β)

$M=N=5$

$$\rightarrow\ M_{(x;\,y)}=xy(x+y)(5(x^2+y^2)+5xy)$$

$$\therefore\ M_{(x;\,y)}=5xy(x+y)(x^2+y^2+xy)$$

BIOGRAFÍA

Jules Henri Poincaré

Nació en Nancy, Francia, el 29 de abril de 1854 y murió en París el 17 de julio de 1912. Fue un prestigioso matemático, científico teórico y filósofo de la ciencia. A menudo, Poincaré es descrito como el último universalista, después de Gauss, capaz de entender y contribuir en todos los ámbitos de la disciplina matemática.

Durante su niñez, Henri enfermó de difteria, así que la tarea de su educación recayó en su madre, Eugénie Launois. Su padre, Leon Poincaré, era profesor de Medicina en la Universidad de Nancy. En 1862, empezó su educación escolar en el liceo de su ciudad. Durante once años demostró ser uno de los mejores alumnos en casi todas las materias que llevó. En 1873 ingresó en la École Polytechnique, donde estudió matemática bajo la tutela de Charles Hermite y llegó a publicar su primer artículo (*Démonstration nouvelle des propriétés de l'indicatrice d'une surface*) en 1874. Tras graduarse al siguiente año, continuó su formación en la École des Mines. Allí siguió estudiando matemáticas y demostró gran interés en los contenidos de ingeniería en minas; en marzo de 1879 recibió su título de ingeniero. Charles Hermite continúo supervisando el trabajo de Henri, quien se encontraba preparando su doctorado en ciencias matemáticas. Su tesis doctoral trataba sobre las ecuaciones diferenciales. Poincaré desarrolló un nuevo método para estudiar las propiedades de las ecuaciones. Con este método, además de encarar el problema de la determinación de la integral de las ecuaciones, se consagró como la primera persona en estudiar sus propiedades geométricas, las cuales podían ser utilizadas para modelar el comportamiento de varios cuerpos en movimiento libre en el sistema solar. En 1879 obtuvo su doctorado en la Universidad de París.

Poco después de su graduación, aceptó ser profesor en la Universidad de Caen. No obstante su relación con las matemáticas, nunca abandonó totalmente su carrera en la minería. A partir de 1881, y por el resto de su carrera, se desempeñó como profesor en la Universidad de París (La Sorbona). Inicialmente fue nombrado como *maître de conférences d'analyse* (profesor asociado de análisis), pero con el tiempo llegaría a ocupar las cátedras de Mecánica Física y

Experimental, Física Matemática, Teoría de la Probabilidad, Mecánica Celestial y Astronomía. En 1881, Poincaré contrajo matrimonio con Poulain d'Andecy, y fruto de esta unión nacieron cuatro hijos.

Hacia 1887, a los 32 años de edad, fue nombrado miembro de la Academia de las Ciencias francesa. Tiempo después, en 1895, publicó su *Analysis situs*, un tratado sistemático sobre topología. En el ámbito de las matemáticas aplicadas estudió numerosos problemas sobre óptica, electricidad, telegrafía, capilaridad, elasticidad, termodinámica, mecánica cuántica, teoría de la relatividad y cosmología.

En el campo de la mecánica elaboró diversos trabajos sobre las teorías de la luz y las ondas electromagnéticas, y desarrolló, junto a Albert Einstein y Hendrik Antoon Lorentz, la teoría de la relatividad restringida. La conjetura de Poincaré es uno de los problemas no resueltos más desafiantes de la topología algebraica, y fue el primero en considerar la posibilidad de caos en un sistema determinista, en su trabajo sobre órbitas planetarias. Este trabajo tuvo poco interés hasta que empezó el estudio moderno de la dinámica caótica en 1963. En 1889, fue premiado por sus trabajos sobre el problema de los tres cuerpos.

En 1906 Poincaré fue electo presidente de la Academia de las Ciencias francesa, y tres años más tarde sería nombrado miembro de la Academia francesa. Seis años después, a raíz de una complicación prostática que no fue operada, le sobrevino una embolia que le causó la muerte a los 58 años de edad.

Henri Poincaré se encuentra enterrado en el panteón de su familia en el cementerio de Montparnasse, en París.

Algunos de sus trabajos más importantes incluyen los tres volúmenes de *Los nuevos métodos de la mecánica celeste* (Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste), publicados entre 1892 y 1899, y *Lecciones de mecánica celeste* (Léçons de mécanique céleste, 1905). También escribió numerosas obras de divulgación científica que alcanzaron una gran popularidad, como *Ciencia e hipótesis* (1901), *Ciencia y método* (1908) y *El valor de la ciencia* (1904).

Fuente:

http://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/poincare.htm
http://es.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincar%C3%A9

Problemas RESUELTOS

Problema 1

Si $1-2x$ es un factor primo del polinomio $P_{(x)}=4x^3-2x^2+mx+5$, ¿cuál es el valor de m?

Resolución

De la definición de factor

$P_{(x)}\div(1-2x)$ es una división exacta.

Luego, por el teorema del resto se tiene:

I. $1-2x=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

II. $P_{\left(\frac{1}{2}\right)}=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+m\cdot\frac{1}{2}+5=0$

$\rightarrow \cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{8}}-\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}+\frac{m}{2}+5=0$

$\frac{m}{2}=-5$

$\therefore\ m=-10$

Problema 2

¿Cuántos factores primos tiene el polinomio $S_{(a,b)}=a^2b^2+2ab^2+3a^2b+6ab$?

Resolución

Factorizando por agrupación, como se indica

$S_{(a,b)}=a^2b^2+2ab^2+3a^2b+6ab$

$\rightarrow S_{(a,b)}=ab\{ab+2b+3a+6\}$

$\rightarrow S_{(a,b)}=ab\{b(a+2)3(a+2)\}$

$\rightarrow S_{(a,b)}=ab(a+2)(b+3)$

Por lo tanto, $S_{(a,b)}$ tiene 4 factores primos.

Problema 3

Si $f_{(x+y)}$ es un factor primo de

$P_{(x+y)}=m^2x^2+m^2y^2-1+2m^2xy;\quad m\neq 0,$

calcule el mayor valor de $f_{(m)}$.

Resolución

Agrupando como se indica

$P_{(x+y)}=m^2x^2+m^2y^2-1+2m^2xy$

$=m^2(x^2+y^2+2xy)-1$

$=[m(x+y)]^2-1$

Por diferencia de cuadrados

$P_{(x+y)}=[m(x+y)+1][m(x+y)-1]$

Luego

$f_{(x+y)}=m(x+y)+1 \vee m(x+y)-1,$

de donde $f_{(m)}=m\cdot m+1 \vee m\cdot m-1.$

$\therefore\ f_{(m)_{\text{mayor}}}=m^2+1$

Problema 4

Indique el número de factores primos de

$S_{(x)}=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1.$

Resolución

Agrupando como se indica

$S_{(x)}=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

$S_{(x)}=x^3(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$

$S_{(x)}=(x^2+x+1)\underbrace{(x^3+1)}_{\text{diferencia de cubos}}$

$S_{(x)}=(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

Por lo tanto, $S_{(x)}$ tiene 3 factores primos.

Problema 5

Al factorizar $P_{(x;y)}=x^9y-x^3y^7$, establezca el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. x^2+xy+y^2 es un factor primo.

II. x^2-y^2 no es un factor de $P_{(x;y)}$.

III. $P_{(x;y)}$ no es factorizable en $\mathbb{Q}$.

Resolución

Extrayendo factor común al monomio x^3y, se tiene

$$P_{(x;\,y)}=x^3y(x^6-y^6)=x^3y\left[(x^3)^2-(y^3)^2\right]$$

$$P_{(x;\,y)}=x^3y(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$

Luego, por suma y diferencia de cubos

$$P_{(x;\,y)}=x^3y(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

Estudiando las proposiciones se concluye:

I. Verdadero II. Falso III. Falso

Problema 6

Factorice el polinomio

$P_{(x;\,y)}=x^3+28y^3+3xy(x+y)$

e indique la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

Resolución

Observamos que $28y^3=y^3+27y^3$.

Luego, reordenando:

$$P_{(x;\,y)}=x^3+y^3+3xy(x+y)+27y^3$$

$$\rightarrow\ P_{(x;\,y)}=(x+y)^3+(3y)^3$$

Suma de cubos:

$$\rightarrow\ P_{(x;\,y)}=(x+y+3y)\left[(x+y)^2-(x+y)3y+(3y)^2\right]$$

$$\rightarrow\ P_{(x;\,y)}=(x+4y)\left[x^2+y^2+2xy-3xy-3y^2+9y^2\right]$$

$$\rightarrow\ P_{(x;\,y)}=(x+4y)(x^2-xy+7y^2)$$

Los factores primos son $x+4y$; $x^2-xy+7y^2$, cuya suma de coeficientes es 5 y 7, respectivamente.

Problema 7

Luego de factorizar

$P_{(x;\,y)}=x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2z+z^2y+xy^2+xz^2+zx^2$,

indique un factor primo.

Resolución

Como son 9 términos agrupamos de 3 en 3 como se indica

$$\underline{\underline{x^3}}+\underline{y^3}+z^3+\underline{\underline{x^2}}y+\underline{y^2z}+z^2y+\underline{xy^2}+xz^2+\underline{\underline{zx^2}}$$

Entonces

$$x^2\underline{(x+y+z)}+y^2\underline{(x+y+z)}+z^2\underline{(x+y+z)}.$$

Por lo tanto, $P_{(x;\,y)}\equiv(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$, de donde uno de los factores primos es

$$x+y+z\ \vee\ x^2+y^2+z^2.$$

Problema 8

Luego de factorizar el polinomio, indique un factor primo.

$$P_{(x;\,y;\,z)}=2\left[(x+y+z)^2+(x+y-z)^2\right]+$$
$$+5(x^2+y^2-z^2+2xy).$$

Resolución

Hacemos un cambio de variable $x+y=m$, se tiene

$$=2\underbrace{\left[(m+z)^2+(m-z)^2\right]}_{2(m^2+z^2)}+5(m^2-z^2)$$

$$=2(2m^2+2z^2)+5m^2-5z^2$$

$$=4m^2+4z^2+5m^2-5z^2$$

$$=9m^2-z^2=(3m+z)(3m-z)$$

Reponiendo m

$$P_{(x;\,y;\,z)}=(3(x+y)+z)(3(x+y)-z)$$
$$\equiv(3x+3y+z)(3x+3y-z)$$

Luego, un factor primo será

$$3x+3y+z\ \vee\ 3x+3y-z.$$

Problema 9

Sea $S_{(x)}=a(x+b)$ la suma de los factores primos no comunes de los siguientes polinomios:

$P_{(x)}=x^4-5x^2+4$;

$Q_{(x)}=2x^2-6-x$.

Calcule el valor de $a+b$.

Resolución

Factorizamos cada polinomio mediante el método del aspa simple:

$$P_{(x)}=x^4-5x^2+4=(x^2-4)(x^2-1)$$

$$\begin{array}{ll} x^2 & -4 \\ x^2 & -1 \end{array}$$

$$=(x+2)(\underline{\underline{x-2}})(x+1)(x-1)$$

$$Q_{(x)}=2x^2-x-6=(2x+3)(\underline{\underline{x-2}})$$

$$\begin{array}{ll} 2x & 3 \\ x & -2 \end{array}$$

Entonces, de lo pedido

$$S_{(x)}=x+2+x+1+x-1+2x+3$$

$$=5x+5=5(x+1)\equiv a(x+b)$$

De donde $a=5$; $b=1$

$\therefore\ a+b=6$

Problema 10

Indique un factor primo del polinomio

$F_{(x)}=ax^2-bx-abx+b^2$,

donde a; b son primos entre sí.

Resolución

Por aspa simple

$$F_{(x)}=ax^2-(b+ab)x+b^2$$

$$\begin{array}{ll} ax & -b \\ x & -b \end{array}$$

$\rightarrow\ F_{(x)}=(ax-b)(x-b)$

Por lo tanto, un factor primo es $ax-b\ \vee\ x-b$.

Problema 11

Factorizando en Q

$P_{(x)}=(x^2+x+1)(x^2-x+1)+7x^2-385$,

indique la suma de sus factores primos lineales.

Resolución

Efectuando por productos notables:

$$P_{(x)}=x^4+x^2+1+7x^2-385$$

Reduciendo se obtiene $P_{(x)}=x^4+8x^2-384$

Por aspa simple

$$P_{(x)}=x^4+8x^2-384$$

$$\begin{array}{ll} x^2 & 24 \\ x^2 & -16 \end{array}$$

Luego

$$P_{(x)}=(x^2+24)(x^2-16)\equiv(x^2+24)(x+4)(x-4)$$

Los factores primos lineales son $(x+4)$ y $(x-4)$, cuya suma es $2x$.

Problema 12

Indique un factor primo del polinomio

$P_{(x)}=(a^2+2ab)x^2+b(a-4b)x+(b-a)(a-2b)$.

Resolución

Por ser $P_{(x)}$ polinomio cuadrático factorizamos por aspa simple:

$$a(a+2b)x^2+b(a-4b)x+(b-a)(a-2b)$$

$$\begin{array}{ll} ax & a-2b \\ (a+2b)x & b-a \end{array}$$

$\rightarrow\ P_{(x)}=(ax+a-2b)[(a+2b)x+b-a]$

Entonces, un factor primo es

$(ax+a-2b)\ \vee\ [(a+2b)x+b-a]$.

Problema 13

Indique el número de factores primos de

$P_{(x)}=(x^2+7x+5)^2+3(x^2+1)+21x+2$.

Resolución

Efectuando y reordenando

$$P_{(x)}=(x^2+7x+5)^2+\underline{3x^2}+3+\underline{21x}+2$$

$$P_{(x)}=(x^2+7x+5)^2+3(x^2+7x)+5$$

Haciendo $x^2+7x+5=y$ se tiene

$$y^2+3(y-5)+5=y^2+3y-10=(y+5)(y-2)$$

Reponiendo y

$$R_{(x)}=(x^2+7x+5+5)(x^2+7x+5-2)$$

$$\rightarrow\ R_{(x)}=(x^2+7x+10)(x^2+7x+3)$$

En $P_{(x)}=(x+5)(x+2)(x^2+7x+3)$, vemos que tiene tres factores primos.

Problema 14

Sean $A_{(x)}=x^2-4x+m+1$ y

$$B_{(x)}=x^2-(m+1)x+4,$$

que admiten un factor común lineal.

Calcule el valor de m si $A_{(x)}\neq B_{(x)}$.

Resolución

Sea $(x-\alpha)$ el factor común de $A_{(x)}$ y $B_{(x)}$, entonces

$$A_{(\alpha)}=0\ \rightarrow\ \alpha^2-4\alpha+m+1=0$$

$$B_{(\alpha)}=0\ \rightarrow\ \alpha^2-(m+1)\alpha+4=0$$

Restando se tiene $(m-3)\alpha+m-3=0$

Entonces $(m-3)(\alpha+1)=0$,

de donde $m-3=0\ \vee\ \alpha+1=0$

I. Si $m-3=0\ \rightarrow\ A_{(x)}=B_{(x)}$

Contradicción con los datos

II. Si $\alpha+1=0\ \rightarrow\ \alpha=-1$

En el polinomio $A_{(x)}$

$$A_{(-1)}=(-1)^2-4(-1)+m+1=0$$

$$\rightarrow\ 1+4+m+1=0\ \rightarrow\ m=-6$$

$$\therefore\ m=-6$$

Problema 15

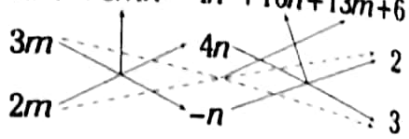
Halle un factor primo del polinomio

$$P_{(m;n)}=m(6m+5n)-2n(2n-5)+13m+6.$$

Resolución

Efectuando las multiplicaciones, se observará la forma del aspa doble.

$$P_{(m;n)}=6m^2+5mn-4n^2+10n+13m+6$$



Luego, su forma factorizada es

$$P_{(m;n)}=(3m+4n+2)(2m-n+3),$$

de donde un factor primo es

$$(3m+4n+2)\ \vee\ (2m-n+3)$$

Por lo tanto, cualquiera será el factor pedido.

Problema 16

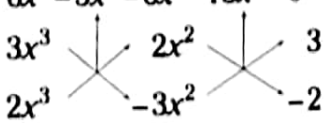
Señale el factor primo de menor suma de coeficientes del polinomio

$$F_{(x)}=6x^6-5x^5-6x^4-13x^2-6.$$

Resolución

Factorizando por aspa doble

$$6x^6-5x^5-6x^4-13x^2-6$$



$$\therefore\ F_{(x)}=(3x^3+2x^2+3)(2x^3-3x^2-2)$$

Si los factores cúbicos fueran factorizables, deben admitir divisores binomios; sin embargo, no es así. Se concluye, entonces, que $2x^3-3x^2-2$ es el factor primo de menor suma de coeficientes.

Problema 17

Luego de factorizar el polinomio

$K_{(a;b)}=a(a^2+ab-1)-b(b^2+ab-1)$,

indique la suma de sus factores primos.

Resolución

Efectuando y agrupando adecuadamente

$$K_{(a;b)}=a^3+a^2b-a-b^3-ab^2+b$$
$$=a^3-b^3+ab(a-b)-(a-b)$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2)+ab(a-b)-(a-b)$$
$$=(a-b)\{a^2+ab+b^2+ab-1\}$$
$$=(a-b)\{(a+b)^2-1\}$$

Por diferencia de cuadrados se obtiene:

$$K_{(a;b)}=(a-b)(a+b+1)(a+b-1),$$

cuyos factores primos son

$a-b$; $a+b+1$; $a+b-1$

$\therefore$ $\sum$ factores primos $= 3a+b$

Problema 18

Indique un factor primo del polinomio

$S_{(a;b;c)}=a^2+a+b-b^2-c^2-c+2bc.$

Resolución

Agrupando convenientemente

$$S_{(a;b;c)}=a^2-b^2-c^2+2bc+a+b-c$$

$$\rightarrow S_{(a;b;c)}=\underbrace{a^2-(b-c)^2}_{\text{diferencia de cuadrados}}+a+b-c$$

$$\rightarrow S_{(a;b;c)}=(a+b-c)(a-b+c)+(a+b-c)$$

$$\rightarrow S_{(a;b;c)}=(a+b-c)(a-b+c+1),$$

cuyos factores primos son $a+b-c$; $a-b+c+1$.

Problema 19

Con respecto al polinomio

$S_{(a;b;c)}=a(a^2+bc)+c(a^2+b^2)-b^3$,

indique el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I. Un factor primo es $a+c-b$.

II. La suma de coeficientes de un factor primo es 2.

III. Tiene tres factores primos lineales.

Resolución

Efectuando y agrupando adecuadamente:

$$S_{(a;b;c)}=a^3+abc+a^2c+b^2c-b^3$$
$$=a^3-b^3+c(ab+a^2+b^2)$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2)+c(a^2+ab+b^2)$$
$$=(a^2+ab+b^2)(a-b+c)$$

Respondiendo a las proposiciones, tenemos:

I. Verdadero II. Falso III. Falso

Problema 20

Indique el factor primo de mayor suma de coeficientes del polinomio

$S_{(a;b)}=(1-ab)^2-(a^2+b^2+1)$.

Resolución

Efectuando y agrupando de manera adecuada:

$$S_{(a;b)}=1-2ab+a^2b^2-a^2-b^2-1$$
$$=a^2b^2-(a^2+b^2+2ab)=\underbrace{(ab)^2-(a+b)^2}_{\text{diferencia de cuadrados}}$$

$$S_{(a;b)}=(ab+a+b)(ab-a-b)$$

Luego, el factor primo de mayor suma de coeficiente es $(ab+a+b)$.

Problema 21

Calcule la suma de coeficientes de un factor primo del polinomio

$S_{(x)}=x^2-2b^2x-b^8-b^4-1.$

Resolución

> **Nota**
> $x^2-2b^2x+b4\equiv(x-b^2)^2$

Sumando y restando b^4

$$S_{(x)}=\underbrace{\underbrace{x^2-2b^2x+b^4}_{(x-b^2)^2}-\underbrace{b^8-2b^4-1}_{(b^4+1)^2}}_{\text{diferencia de cuadrados}}$$

$$S_{(x)}=(x-b^2+b^4+1)(x-b^2-b^4-1)$$

Luego, la suma de coeficientes es

$1-b^2+b^4+1 \vee 1-b^2-b^4-1,$

es decir $b^4-b^2+2 \vee -b^4-b^2.$

Problema 22

Indique un factor primo del polinomio

$F_{(a;b)}=a(c^4+1)-2ac^2+(a+1)^2(c+1)^2c.$

Resolución

Agrupando convenientemente:

$$F_{(a;b)}=a\{c^4+1-2c^2\}+(a+1)^2(c+1)^2c$$

$$F_{(a;b)}=a(c-1)^2(c+1)^2+(a+1)^2c(c+1)^2$$

$$F_{(a;b)}=(c+1)^2[a(c-1)^2+c(a+1)^2]$$

Efectuando

$$F_{(a;b)}=(c+1)^2\{\underline{ac}^2-\cancel{2ac}+\underline{a}+\underline{ca}^2+\cancel{2ac}+\underline{c}\}$$

$$F_{(a;b)}=(c+1)^2\{ac(\underline{a+c})+(\underline{a+c})\}$$

$$F_{(a;b)}=(c+1)^2(a+c)(ac+1)$$

Luego, un factor primo es

$(c+1) \vee (a+c) \vee (ac+1).$

Problema 23

Demuestre que para todo k entero

$P_{(x)}=x^2+6kx+1$ no es factorizable sobre los racionales.

Resolución

Analicemos su discriminante

$$\Delta=(6k)^2-4(1)\equiv36k^2-4\equiv4(9k^2-1)$$

Observamos que $9k^2$ es un cuadrado perfecto. Entonces $9k^2-1$ no puede ser cuadrado perfecto, ya que no existen dos números consecutivos diferentes de 0 y 1 donde ambos sean cuadrados perfectos.

En consecuencia, $x^2+6kx+1$ no es factorizable en $\mathbb{Q}$.

Problema 24

Factorice el polinomio

$F_{(a;b;c)}=(a+2b+3c)(a+3b+5c)+2bc.$

Resolución

Llamaremos z a la expresión $a+2b+3c$, es decir $a+2b+3c=z$. Luego tenemos $z(z+b+2c)+2bc$, que es equivalente a $z^2+(b+2c)z+2bc$.

Factorizando por aspa simple

$$z^2+(b+2c)z+2bc$$

$$\begin{array}{ll} z & 2c \\ z & b \end{array}$$

$$F_{(z;b;c)}=(z+2c)(z+b)$$

Reponiendo z

$$F_{(a;b;c)}=(\underline{a+2b+3c}+2c)(\underline{a+2b+3c}+b)$$

$$\therefore\ F_{(a;b;c)}=(a+2b+5c)(a+3b+3c)$$

Problema 25

Calcule la suma de los factores primos del polinomio

$$M_{(a)}=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2.$$

Resolución

Por aspa simple

$$a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b+c)^2(b-c)^2$$

$$\begin{array}{ll} a^2 & -(b+c)^2 \\ a^2 & -(b-c)^2 \end{array}$$

Veamos la comprobación

$$-a^2\underbrace{\left\{(b+c)^2+(b-c)^2\right\}}_{\text{identidad de Legendre}}=-a^2\left[2(b^2+c^2)\right]$$

$$=-2a^2(b^2+c^2)$$

Luego, su forma factorizada es

$$\left[a^2-(b+c)^2\right]\left[a^2-(b-c)^2\right]$$

Por diferencia de cuadrados

$$(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$$

de donde la suma de factores primos será

$$a+b+c+a-b-c+a+b-c+a-b+c=4a.$$

Problema 26

¿Cuántos factores algebraicos posee el polinomio

$$P_{(x,y,z)}=(x^2+y^2+z^2)^3-3(xy+xz+yz)^2(x^2+y^2+z^2)+$$
$$+2(xy+xz+yz)^3?$$

Resolución

Hacemos un cambio de variable

$$x^2+y^2+z^2=m$$

$$xy+xz+yz=n$$

Luego tenemos

$$P=m^3-3n^2m+2n^3$$

Separamos $-3n^2m$, como $-mn^2-2mn^2$

$$P=m^3-mn^2-2mn^2+2n^3$$

$$\rightarrow\ P=m(m^2-n^2)-2n^2(m-n)$$

$$\rightarrow\ P=m(m+n)(m-n)-2n^2(m-n)$$

Factorizando por aspa simple

$$(m-n)(m^2+mn-2n^2)$$

$$\begin{array}{ll} m & 2n \\ m & -n \end{array}$$

$$\rightarrow\ P=(m-n)(m+2n)(m-n)$$

$$\rightarrow\ P=(m-n)^2(m+2n)$$

Reponiendo m y n tenemos

$$(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)^2(x^2+y^2+z^2+$$
$$+2(xy+xz+yz))$$

$$\rightarrow\ P_{(x,y,z)}=(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)^2(x+y+z)^2,$$

de donde el número de factores algebraicos es $(2+1)(2+1)-1=8$.

Por lo tanto, tiene ocho factores algebraicos.

Problema 27

Indique el factor primo de mayor suma de coeficientes en

$$H_{(x,y)}=24x^3y^2+60x^2y^2-6xy^4+6xy^3+36xy^2.$$

Resolución

Extrayendo el factor común monomio $6xy^2$, se tiene $H_{(x,y)}=6xy^2(4x^2+10x-y^2+y+6)$.

Por aspa doble

$$6xy^2(4x^2+0xy-y^2+10x+y+6)$$

$$\begin{array}{lll} 2x & y & 2 \\ 2x & -y & 3 \end{array}$$

$$\therefore\ H_{(x,y)}=6xy^2(2x+y+2)(2x-y+3)$$

Los factores primos son x; y; $2x+y+2$; $2x-y+3$, y el de mayor suma de coeficientes es $2x+y+2$.

Problema 28

Luego de factorizar el polinomio

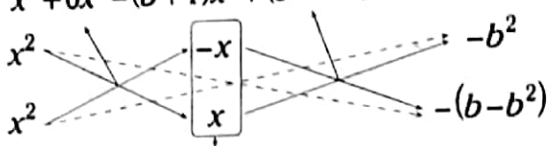
$P_{(x)}=x^4-(b+1)x^2+(b-2b^2)x+b^3(1-b)$,

halle el valor numérico entero de un factor primo para $2x=1+\sqrt{4b^2+5}$.

Resolución

Factorizando por aspa doble especial

$$x^4+0x^3-(b+1)x^2+(b-2b^2)x+b^2(b-b^2)$$



SDT: $-(b+1)x^2$

ST: $(-b^2-b+b^2)x^2=-bx^2$

Falta: $(-b-1+b)x^2=-x^2$

Luego, la forma factorizada es

$$P_{(x)}=(x^2-x-b^2)(x^2+x-b+b^2).$$

Evaluando en

$$2x=1+\sqrt{4b^2+5}$$

$\rightarrow\ 2x-1=\sqrt{4b^2+5}$

$\rightarrow\ 4x^2-4x+1=4b^2+5$

$\rightarrow\ 4x^2-4x-4b^2=4$

$\rightarrow\ x^2-x-b^2=1$

Por lo tanto, el valor numérico entero de un factor primo es 1.

Problema 29

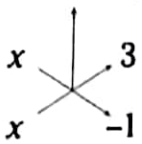
Indique el número de factores primos luego de factorizar

$P_{(x)}=x^3+2x^2-3x+3(x-1)$.

Resolución

Agrupando convenientemente

$$P_{(x)}=x(x^2+2x-3)+3(x-1)$$



$\rightarrow\ P_{(x)}=x(x+3)(x-1)+3(x-1)$

$\rightarrow\ P_{(x)}=(x-1)[x(x+3)+3]$

$\rightarrow\ P_{(x)}=(x-1)(x^2+3x+3)$

Por lo tanto, tiene dos factores primos.

Problema 30

Al factorizar el polinomio

$F_{(x)}=x^4-x^3+2x^2-x-1$

se obtiene $(x+m)^p(x^n+2x+1)$.

Calcule $m+n+p$.

Resolución

I. Se observa que $f_{(1)}=0$

Veamos: $f_{(1)}=1^4-1^3+2\cdot 1^2-1-1=0$

Entonces, $(x-1)$ es un factor.

II. Usando la regla de Ruffini

	1	−1	2	−1	−1
1	↓	1	0	2	1
	1	0	2	1	0

$$f_{(x)}=(x-1)\cdot(x^3+2x+1)$$

Recuerde que toda cúbica, si es factorizable, debe admitir el método de los divisores binómicos.

Sea $q_{(x)}=x^3+2x+1\ \rightarrow\ \text{PCR}=\{1;-1\}$

Se observa que $q_{(1)}\neq 0\ \wedge\ q_{(-1)}\neq 0$

Entonces, $q_{(x)}$ no es factorizable.

$\therefore\ m+n+p=3$

Problema 31

Halle un factor primo del polinomio

$P_{(x)}=x^3(3x+1)^3-(6x+1)^2-15.$

Resolución

$$P_{(x)}=[x(3x+1)]^3-(6x+1)^2-15$$

$$=(3x^2+x)^3-(36x^2+12x+1)-15$$

$$=(3x^2+x)^3-12(3x^2+x)-16$$

Haciendo $3x^2+x=z$ se tiene $P_{(z)}=z^3-12z-16$.

Por divisores binómicos se observa $P_{(-2)}=0$, luego $(z+2)$ es un factor.

Por la regla de Ruffini

	1	0	−12	−16
$z=-2$		−2	4	16
	1	−2	−8	0

$$\rightarrow P_{(z)}=(z+2)(z^2-2z-8)$$

$$\begin{array}{ll} z & -4 \\ z & 2 \end{array}$$

$$\rightarrow P_{(z)}=(z+2)^2(z-4)$$

Reemplazando el valor de z

$$P_{(x)}=(3x^2+x+2)^2(3x^2+x-4)$$

$$P_{(x)}=(3x^2+x+2)^2(3x+4)(x-1),$$

de donde un factor primo puede ser

$$3x^2+x+2 \quad \vee \quad 3x+4 \quad \vee \quad x-1.$$

Problema 32

Calcule el número de factores algebraicos de $Q_{(x)}=x^4+4x^5-(x^6-1)^2$.

Resolución

Veamos por aspa simple

$$x^4+4x^5-(x^3-1)^2(x^3+1)^2$$

$$\begin{array}{ll} x^2 & (x^3+1)^2 \\ x^2 & -(x^3-1)^2 \end{array}$$

Comprobando

$$x^2\underbrace{\{(x^3+1)^2-(x^3-1)^2\}}_{\text{identidad de Legendre}}=x^2\{4x^3\}=4x^5$$

$$\rightarrow Q_{(x)}=[x^2+(x^3+1)^2][x^2-(x^3-1)^2]$$

$$=(x^6+2x^3+x^2+1)(x+x^3-1)(x-x^3+1),$$

de donde el número de factores algebraicos es

$$(1+1)(1+1)(1+1)-1=7.$$

Problema 33

Calcule la suma de coeficientes de un factor primo de $M_{(x)}=(x-3)^5+81x$.

Resolución

Hacemos un cambio de variable $x-3=z$

$$\rightarrow M_{(z)}=z^5+81(z+3)=z^5+81z+243$$

$$\rightarrow M_{(z)}=243\left\{\frac{z^5}{243}+\frac{81z}{243}+\frac{243}{243}\right\}$$

$$\rightarrow M_{(z)}=243\left\{\left(\frac{z}{3}\right)^5+\left(\frac{z}{3}\right)+1\right\}$$

Hacemos $\frac{z}{3}=t$

$$\rightarrow M_{(t)}=243(t^5+t+1)$$

Recuerde

$t^5+t+1(t^2+t+1)(t^3-t^2+1)$

$$\rightarrow\ M_{(z)}=243\left\{\frac{z^2}{9}+\frac{z}{3}+1\right\}\left\{\frac{z^3}{27}-\frac{z^2}{9}+1\right\}$$

$$M_{(z)}=(z^2+3z+9)(z^3-3z^2+27)$$

En la variable x tenemos

$$M_{(x)}=[(x-3)^2+3(x-3)+9]\,[(x-3)^3-3(x-3)^2+27]$$

Efectuando

$$M_{(x)}=(x^2-3x+9)(x^3-12x^2+33x-27)$$

Luego, la suma de coeficientes de un factor primo es 7 o -5.

Problema 34

¿Cuántos factores primos tiene el polinomio $P_{(x)}=x^7-2x^5-1$?

Resolución

Observamos que

$$P_{(-1)}=(-1)^7-2(-1)^5-1=0$$

$\rightarrow$ $(x+1)$ es un factor de $P_{(x)}$.

El otro factor lo calculamos con la regla de Ruffini

	1	0	−2	0	0	0	0	−1
$x=-1$	↓	−1	1	1	−1	1	−1	1
	1	−1	−1	1	−1	1	−1	0

$$\rightarrow\ P_{(x)}=(x+1)(x^6\underline{-x^5-x^4}+x^3\underline{-x^2+x}-1)$$

x^3 $-x$ 1

x^3 $-x^2$ -1 (aspa doble)

$$\rightarrow\ P_{(x)}=(x+1)(x^3-x+1)(x^3-x^2-1)$$

Por lo tanto, tiene tres factores primos.

Problema 35

Halle el factor primo de menor suma de coeficientes del polinomio

$$J_{(x;y)}=(x^2-xy+y^2)^2-4xy(x+y)^2.$$

Resolución

De $J_{(x;y)}=(x^2+y^2-xy)^2-4xy(x^2+y^2+2xy)$.

Haciendo $x^2+y^2-xy=m \wedge xy=n$

$$\rightarrow\ J(m;n)=m^2-4n(m+3n)$$

$$=m^2-4mn-12n^2$$

m $-6n$

m $2n$

$$\rightarrow\ J(m;n)=(m-6n)(m+2n)$$

Reponiendo $m \wedge n$

$$J_{(x;y)}=(x^2+y^2-xy-6xy)(x^2+y^2-xy+2xy)$$

$$\rightarrow\ J_{(x;y)}=(x^2+y^2-7xy)(x^2+y^2+xy)$$

Luego, el factor de menor suma de coeficientes es x^2+y^2-7xy.

Problema 36

Indique el valor de verdad con respecto al polinomio

$P_{(x)}=x^6-9x^5+30x^4-45x^3+30x^2-9x+1$.

I. Tiene un solo factor primo mónico.

II. Un factor primo es x^2+3x+1.

III. El término lineal de un factor primo es $-3x$.

Resolución

Por polinomios recíprocos

$$P_{(x)}=x^3\left\{x^3-9x^2+30x-45+\frac{30}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right\}$$

$$=x^3\left\{\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+30\left(x+\frac{1}{x}\right)-45\right\}$$

Haciendo $x+\dfrac{1}{x}=z$

$$\rightarrow\ x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2;\quad x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z$$

Reemplazando obtenemos

$$P_{(x;z)}=x^3\{z^3-3z-9(z^2-2)+30z-45\}$$
$$=x^3(z-3)^3$$

Reponiendo z

$$P_{(x)}=x^3\left(x+\frac{1}{x}-3\right)^3=x^3\left(\frac{x^2-3x+1}{x}\right)^3$$

$$P_{(x)}=(x^2-3x+1)^3$$

Estudiando las proposiciones se concluye:

I. Verdadero II. Falso III. Verdadero

Problema 37

Factorice el polinomio

$$G_{(a;b;c)}=(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-$$
$$-(a+b-c)^5.$$

Resolución

Hacemos algunos cambios con las variables

$$\left.\begin{array}{l} b+c-a=x \\ c+a-b=y \\ a+b-c=z \end{array}\right\}(+)$$

$\rightarrow a+b+c=x+y+z$

$\rightarrow G_{(x;y;z)}=(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

El polinomio es simétrico, puesto que si $x=-y$

$\rightarrow G_{(-y;y;z)}=0$

Entonces $(x+y)$ es un factor. Asimismo, $(x+z)$ y $(y+z)$ son factores.

Comparando los grados

$$\underbrace{(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5}_{5.^{\circ}\text{ grado}}$$

$$\equiv\underbrace{(x+y)(x+z)(y+z)}_{3.^{\text{er}}\text{ grado}}\cdot\underbrace{Q_{(x;y;z)}}_{2.^{\circ}\text{ grado}}$$

como

$$Q_{(x;y;z)}=A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+xz+yz)$$

Por ser polinomios idénticos, para conocer A y B asignaremos

$$x=1;\ y=1;\ z=0 \quad\rightarrow\quad 2A+B=15$$
$$x=1;\ y=1;\ z=1 \quad\rightarrow\quad A+B=10$$

De donde se obtiene $A=5;\ B=5$

$$G_{(x;y;z)}=(x+y)(x+z)(y+z)$$
$$\{5(x^2+y^2+z^2)+5(xy+xz+yz)\}$$

Reponiendo los valores de $x;\ y;\ z$, en términos de $a;\ b;\ c$

$$\therefore\ G_{(a;b;c)}=80abc(a^2+b^2+c^2)$$

Problema 38

Factorice el polinomio

$$A_{(x;y;z)}=x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3.$$

Resolución

El polinomio es alternado, ya que si $x=y$

$\rightarrow A_{(x;y;z)}=0 \rightarrow (x-y)$ es un factor de A.

Del mismo modo son factores $(y-z)\vee(z-x)$.

$$\rightarrow\ \underbrace{x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3}_{5.^{\circ}\text{ grado}}$$

$$\equiv\underbrace{(x-y)(y-z)(z-x)}_{3.^{\text{er}}\text{ grado}}\cdot\underbrace{Q(x;\ y;\ z)}_{2.^{\circ}\text{ grado}}$$

$$\rightarrow\ A_{(x;y;z)}=(x-y)(y-z)(z-x)\left[M(x^2+y^2+z^2)\right.$$
$$\left.+N(xy+xz+yz)\right],$$

siendo $Q_{(x;y;z)}$ un polinomio simétrico.

Luego, por ser polinomios idénticos:

Para $x=0;\ y=1;\ z=-1 \quad\rightarrow\quad 2M-N=-1$

Para $x=1;\ y=-1;\ z=2 \quad\rightarrow\quad 6M-N=-1$

de donde $M=0\ \wedge\ N=1$

Entonces

$$A_{(x;y;z)}=(x-y)(y-z)(z-x)(xy+xz+yz).$$

Problema 39

De acuerdo con el polinomio

$M_{(x)}=x^7-8x^6+21x^5-15x^4-15x^3+21x^2-8x+1$,

establezca el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Tiene 4 factores primos.

II. x^3-2x+1 es uno de sus factores.

III. x^2-3x+1 es un factor primo.

Resolución

$M_{(x)}$: polinomio recíproco de grado impar

$M_{(-1)}=0$.

Luego, por divisores binómicos:

	1	−8	21	−15	−15	21	−8	1
$x=-1$	↓	−1	9	−30	45	−30	9	−1
	1	−9	30	−45	30	−9	1	0

Entonces

$$M_{(x)}=(x+1)\underbrace{(x^6-9x^5+30x^4-45x^3+30x^2-9x+1)}_{Q_{(x)}}$$

Como $Q_{(x)}$ es un polinomio recíproco de grado par, factorizado (x^3) se tiene:

$$x^3\left\{x^3-9x^2+30x-45+\frac{30}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right\}$$

$$x^3\left\{\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+30\left(x+\frac{1}{x}\right)-45\right\}$$

Hacemos $x+\frac{1}{x}=z$

entonces $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$; $x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z$

Reemplazando tenemos

$$x^3\{z^3-3z-9(z^2-2)+30z-45\}$$

$$x^3\{z^3-9z^2+27z-27\}=x^3(z-3)^3$$

Reponiendo z

$$Q_{(x)}=x^3\left(x+\frac{1}{x}-3\right)^3=(x^2-3x+1)^3$$

$\therefore\ M_{(x)}=(x+1)(x^2-3x+1)^3$

Estudiando las proposiciones se concluye:

I. Falso II. Falso III. Verdadero

Test 7

1. Si $x+2$ es un factor primo del polinomio
$S_{(x)}=x^3-ax+4$,
indique cuál es el valor de a.

A) -2 B) 2 C) 3
D) -1 E) 1

2. Si $x+3$ es un factor primo de $T_{(x)}=x^3+bx+6$, halle la suma de los otros factores primos.

A) $2x-2$ B) $2x-1$ C) $2x-4$
D) $2x-3$ E) $2x+1$

3. En el polinomio $P_{(a;b)}=a^3b+a^2b-a^3-a^2$, calcule la suma entre el número de factores algebraicos y el número de factores primos.

A) 14 B) 15 C) 10
D) 7 E) 13

4. Indique un factor primo del polinomio
$T_{(x)}=ax^4-ax^2$.

A) x^2-a B) ax^2-1 C) $x+1$
D) x^2+1 E) $x-a$

5. Halle el factor primo de mayor suma de coeficientes del polinomio
$Q_{(x)}=3x^2-5xy-2y^2$.

A) $x+3y$ B) $3x+2y$ C) $x-2y$
D) $x+y$ E) $3x+y$

6. Luego de factorizar el polinomio
$M_{(a;b)}=a^2+b^2-1+2ab$,
halle un factor primo aumentado en 5.

A) $a+b+2$ B) $a+b$ C) $b+5$
D) $a+b+4$ E) $a-b+2$

7. ¿Cuántos factores algebraicos tiene el polinomio
$P_{(a;b)}=a^3b^2-a^3b+2a^2b^2-2a^2b$?

A) 23 B) 24 C) 15
D) 14 E) 17

8. Indique el factor primo de mayor grado del polinomio
$P_{(x)}=x^4+2x^3+x^2+x+1$.

A) x^3+x^2+1
B) x^2+1
C) x^2+3x+1
D) x^2-x-1
E) x^3+x+1

9. Determine el polinomio que no es un factor de $F_{(x)}$, tal que
$F_{(x)}=x^9+x^6+x^3+1$.

A) x^2+x+1
B) $x+1$
C) x^2-x+1
D) x^4-x^2+1
E) x^2+1

10. Halle un factor primo del polinomio
$T_{(a;b)}=a(a-2b+1)-b(3b+11)-6$.

A) $a-3b-2$
B) $a+3b-2$
C) $a+b-3$
D) $a-b+3$
E) $a+3b+2$

11. Indique el factor primo de mayor suma de coeficientes del polinomio
$R_{(x)}=x^4-3x^3+6x(x-1)+8.$

A) x^2-3x+4
B) $x+4$
C) $x+2$
D) x^2+2
E) x^2+3x+4

12. Determine cuál de los siguientes polinomios no es primo sobre Q.

A) x^2-x+1
B) x^3-2x+1
C) x^2-4x+5
D) x^2-3
E) $2x-1$

Claves

1 B	3 A	5 E	7 A	9 A	11 D
2 D	4 C	6 D	8 A	10 A	12 B

Problemas PROPUESTOS

Nivel I

1. Indique uno de los factores primos del siguiente polinomio:
$P_{(a;b)}=a^3+a^2-ab^2-b^3$.

A) $a-b$ B) $a+2b$ C) $a-b+3$
D) $a-b-1$ E) $a+b+1$

2. Indique un factor primo del polinomio
$T_{(a;b)}=a^2-b^2-6a+9$.

A) $a+b-3$ B) $a+b+3$ C) $a-b+3$
D) $a-b-1$ E) $a+b+1$

3. Halle un factor primo del polinomio
$T_{(a;b)}=2(a^2b+b^2c+c^2a)+4(a^2c+c^2b+b^2a)+$
$+9abc$.

A) $a+b$ B) $a+c$ C) $b+c$
D) $a+2b$ E) $a+b+c$

4. Halle un factor primo del polinomio
$Q_{(x)}=x^4+2x^3+x^2-3x(x+1)+2$.

A) $x+1$ B) $x-2$ C) x^2+x+1
D) x^2+x-1 E) x^2+x+2

5. ¿Cuál de los polinomios no es factor primo de $P_{(x)}$, donde $P_{(x)}=2x^4+x^3-9x^2-4x+4$?

A) $2x-1$ B) $x-2$ C) $x+2$
D) $x+1$ E) $2x+1$

6. Si $x+1$ es factor común de
$P_{(x)}=x^2-3x+a$ y
$Q_{(x)}=2x^2-bx+5$,
¿cuál es el valor de $a-b$?

A) -3 B) 11 C) 3
D) -11 E) 5

7. Determine un factor primo de
$P_{(a;b)}=a^3+ab^2-2b^3$.

A) $a+b$
B) $a-2b$
C) $a^2-ab+2b^2$
D) $a+2b$
E) $a^2+ab+2b^2$

8. Indique el término lineal del factor primo de mayor grado del polinomio
$P_{(x)}=x^4+2x^3+2x^2-1$.

A) x B) $-x$ C) $2x$
D) $-2x$ E) $3x$

9. ¿Cuántos factores primos sobre $\mathbb{Z}$ tiene el polinomio?
$P_{(x)}=x^4+2x^3+x^2-18(x^2+x)+72$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 0

10. Halle la suma de los factores primos de
$P_{(m)}=m^4-10m^2+9$.

A) m^2+3m+1
B) $m^2-10m+1$
C) $2m^2-10$
D) m^2+2m
E) $4m$

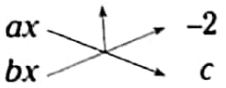
11. Halle un factor primo del polinomio
$T_{(a;b)}=a^2+2(b^2+a)+3(ab-1)+5b$.

A) $a+b-1$ B) $a+2b+1$ C) $a+b+1$
D) $a+2b-1$ E) $a+2b-3$

12. Indique el factor primo de mayor suma de coeficientes del polinomio
$P_{(x)}=x^4-2x^3-13x^2+14x+24.$

A) $x-2$ B) $x-4$ C) $x+4$
D) $x+1$ E) $x+3$

13. A continuación, se muestra un esquema de factorización por aspa simple:
$G_{(x)}=3x^2-(2d+3)x+6;\ a>0$



¿Cuál es un valor de $a+b+c+d$?

A) 4
B) 5
C) 3
D) 7
E) hay dos respuestas correctas

14. Halle la suma de los factores primos del siguiente polinomio
$P_{(x)}=x^4-4x^3-x^2+16x-12.$

A) $4(x-1)$
B) $4x-3$
C) $3x-1$
D) $2x^2-4x-4$
E) x^3+3x-2

15. Calcule el menor valor de a si el polinomio
$P_{(x)}=x^3+(3a-2)x^2-(6a-1)x-2$
tiene un factor que es cuadrado perfecto.

A) $-\frac{2}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $-\frac{5}{6}$
D) $\frac{5}{6}$ E) 2

16. Indique cuántos factores primos tiene el polinomio
$P_{(a;b;c)}=(a^2bc-ab^2c)^3+(ab^2c-abc^2)^3-$
$-(a^2bc-ac^2b)^3.$

A) 3 B) 5 C) 6
D) 4 E) 2

17. ¿Cuántos factores primos tiene el polinomio
$P_{(x)}=x^6-2x^4+1$?

A) 3 B) 2 C) 4
D) 5 E) 6

18. Halle un factor primo del polinomio
$M_{(x)}=x^6-3x^5+6x^4+x^3+6x^2-3x+1.$

A) x^2-x+1 B) x^2+x-1 C) x^2-x+1
D) x^2+x+1 E) x^3+x-1

19. Luego de factorizar el polinomio
$T_{(x)}=(x-2)^3-2x+5,$
dé como respuesta la suma de los términos lineales de los factores primos.

A) $2x$ B) $4x$ C) $-2x$
D) $3x$ E) $-4x$

20. Indique un factor primo del polinomio
$Q_{(a;b)}=(a+b)\{a(a+2b-6)+b(b-6)+11\}-6.$

A) $a+b+1$
B) $a+b+2$
C) $a+b+3$
D) $a-b+1$
E) $a+b-1$

Nivel II

21. Indique el número de factores irreductibles de $P_{(x;y;z)}=x^4y^2z^7+xy^2z^7+3x^3y^2z^7+3x^2y^2z^7$.

A) 5 B) 2 C) 3
D) 4 E) 1

22. Factorice el polinomio $M_{(a;b)}=a^2-4+2ab+b^2$ e indique un factor primo.

A) $a+b+2$ B) $b-2$ C) $a+b-4$
D) $a+2$ E) $b+2$

23. Halle un factor primo del polinomio $P_{(x)}=x^2+(b+c+2d)x+d^2+(b+c)d+bc$.

A) $x+b+d$
B) $x+2d$
C) $x+d+b+c$
D) $x+c$
E) $x-2c$

24. Halle un factor primo del polinomio $H_{(x)}=(2x^2+x-1)^2-(x^2-3x-5)^2$.

A) $3x^2+2x-6$
B) (x^2-2x-1)
C) $3x^2-2x-6$
D) x^2+2x-1
E) $x-2$

25. ¿Cuántos divisores primos posee el polinomio $T_{(a;b)}=(a^2-6ab+b^2)^2-4ab(a+b)^2$?

A) 2 B) 5 C) 4
D) 3 E) 6

26. Factorice el polinomio $P_{(a;b;c)}=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc$.

A) $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)$
B) $(ab+ac+bc)(a+b+c)$
C) $(a+b)(b+c)(c+a)$
D) $(a-b)(b-c)(c-a)$
E) $(ab+ac+bc)(a-b+c)$

27. Indique un factor primo del polinomio $P_{(x;y;z)}=[(x-y+z)(x-y-z)+1]^2-4(x-y)^2$.

A) $x+y+z+1$
B) $x-y+z+1$
C) $x-y+z$
D) $x-y+z+2$
E) $z+y-x+2$

28. ¿Cuál de las siguientes expresiones no es término de un factor primo de $F_{(x;y)}=1+2x^2-(6x^2y^2+4x^3y+y^4+4xy^3)$?

A) $-x^2$ B) $2xy$ C) y^2
D) $2x^2$ E) $-y^2$

29. Indique el factor primo cuadrático de mayor suma de coeficientes, después de factorizar $M_{(x)}=x^4+4x^2+16$.

A) x^2+x-2 B) x^2+2x-4 C) x^2+x-8
D) x^2+8 E) x^2+2x+4

30. Factorice los polinomios
$P_{(x;y)}=6x^2+19xy+15y^2-11x-17y+4$;
$F_{(x;y)}=x^2+y^2-4+2xy+3x+3y$,
y señale como respuesta el factor primo no común de mayor suma de coeficientes.

A) $3x+5y-4$
B) $2x+3y-1$
C) $x+y+4$
D) $x+y-1$
E) $2x+y+4$

31. Halle el factor primo cuadrático de mayor suma de coeficientes del polinomio
$P_{(x)}=x^4-4x^3+11x^2-14x+10.$

A) x^2+3x+2 B) x^2-2x+5 C) x^2-4x-2
D) x^2+4x+2 E) x^2-2x+2

32. Calcule la suma de coeficientes de un factor primo de
$P_{(x)}=(1+x^2)(1-x^2)^2+(x-x^2)^2.$

A) 2 B) 4 C) 3
D) 0 E) 5

33. Factorice el polinomio
$M_{(z)}=z^2(z^8+1)+z^6-(z^2-1)(1+z^2+z^4)$
y dé como respuesta el número de factores primos.

A) 2 B) 4 C) 5
D) 3 E) 6

34. Calcule la suma de coeficientes de un factor primo del polinomio
$H_{(x)}=x^3-x^2-17x+33.$

A) -3 B) -6 C) -7
D) -5 E) -8

35. Halle un factor primo del polinomio
$P_{(a;\,b)}=ab-(ab-1)(1+a-ab)(b+1)b-1.$

A) $1+ab$ B) ab C) $ab-1$
D) $1+a+b$ E) $a+b$

36. Factorice el polinomio y dé como respuesta la suma de coeficientes de un factor primo.
$P_{(x;\,y)}=6x^{2n}-4y^{2n}+7+5x^ny^n+3y^n-17x^n.$

A) 0 B) 2 C) 12
D) 1 E) 6

37. Factorice el polinomio e indique el factor primo cúbico.
$P_{(x)}=x^5-x^4+2x^2-2x+1.$

A) x^3+x+1
B) x^3+x^2+1
C) x^3+x^2+x-1
D) x^3-x+1
E) x^3-x^2+1

38. Calcule el número de factores algebraicos de
$Q_{(x)}=x^4+4x^5-(x^6-1)^2.$

A) 7 B) 6 C) 8
D) 9 E) 5

39. Factorice el polinomio
$F_{(a;\,b;\,c)}=(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+$
$+4c(a+b)-5(a+b+c)+2$
e indique el factor primo de mayor término independiente.

A) $2a+2b+2c+1$
B) $a+b+c-2$
C) $2a+2b+c-1$
D) $a+b+c+2$
E) $2a+2b+2c-1$

40. Halle la suma de factores primos del polinomio
$P_{(x;\,y)}=(x+2y)^2-2xy(3x-4xy+6y).$

A) x^2+4y^2
B) $2x^2+2xy+8y^2$
C) x^2-4y^2
D) $2x+4y-6xy$
E) $2x^2-2xy+8y^2$

41. Con respecto al polinomio
$P_{(a,b,c)}=b^3(a-c^2)+c^3(b-a^2)+$
$+a^3(c-b^2)+abc(abc-1)$,
señale el valor de verdad o falsedad de cada una de las proposiciones siguientes:

I. Un factor primo es a^2-b.
II. Un factor primo es a^2+b.
III. $a-c^2$ no es un factor primo.

A) VVF B) VFV C) VFF
D) VVV E) FFF

42. Halle un factor primo del polinomio
$Q_{(x)}=\alpha^2x^3+(2\alpha\beta+\alpha^3\beta)x^2+(\beta^2+2\alpha^2\beta^2)x+\alpha\beta^3$.

A) $\beta x+\alpha$ B) $x+\alpha\beta$ C) $\alpha x+\beta^2$
D) $\beta x+\alpha^2$ E) $x+\alpha$

43. Dado el polinomio
$P_{(a,b)}=a^4+5bc^2-a^2b-a^2c^2-2b^2-2c^4$,
indique el valor de verdad de cada proposición:

I. Tiene tres factores primos.
II. Tiene dos factores primos cuadráticos.
III. La mayor suma de coeficientes de un factor primo es $2-2c^2$; $0<c<1$.

A) VVV B) VFF C) FVF
D) FVV E) VVF

44. Si (x^2-5x+6) es un factor del polinomio
$P_{(x)}=x^4-9x^2+mx+n$,
calcule el valor de m/n.

A) 1 B) -3 C) 10
D) -5 E) 3

45. Luego de factorizar el polinomio
$P_{(x)}=(2x+1)^2+4x(x+1)+2$,
indique un factor primo cuadrático.

A) $4x^2+x+1$
B) x^2-5x+1
C) $4x^2+x+3$
D) $2x^2+x+2$
E) $4x^2+6x+3$

46. Indique un factor del polinomio
$S_{(x)}=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2-x^5$.

A) $x^4+x^3+x^2+x+1$
B) x^9+1
C) x^5+1
D) x^3+x^2+x+1
E) x^4+1

47. Indique aquel polinomio que no es factor de
$Q_{(x;y)}=x^3+2x^2y-4xy^2-8y^3-x+2y$.

A) $x-2y$
B) $x+2y+1$
C) $x-1+2y$
D) $x+2y$
E) $x^2-1+4y(x+y)$

48. Con respecto al polinomio
$P_{(z)}=z^6-9z^4+16z^3-9z^2+1$,
indique el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I. Un factor primo es z^2+4z+1.
II. Un factor algebraico es $(z-1)^3$.
III. Tiene solo dos factores primos mónicos.

A) VVV
B) FVF
C) VVF
D) VFV
E) FFF

49. Si $(b+1) \wedge (a-1)$ son cuadrados perfectos, factorice

$$M_{(x)}=x^6-(a+b+1)x^4+(ab+2a-1)x^2-$$
$$-a+b-ab+1.$$

Indique aquel que no es factor de $M_{(x)}$.

A) $x+\sqrt{b+1}$ B) $x-\sqrt{a-1}$ C) $x-\sqrt{b-1}$
D) x^2-1 E) x^2+1-a

50. Luego de factorizar el polinomio

$P_{(x)}=x^5+x^4+x^2+x+2$

indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

I. Un factor primo es x^3+x+1.
II. Un factor primo es x^2-x+1.
III. La suma de coeficientes de un factor primo es 1.

A) VVV B) VFV C) FFV
D) FFF E) VFF

51. Indique aquel polinomio que no es factor del polinomio

$P_{(x)}=6x^5+41x^4+97x^3+97x^2+41x+6.$

A) $x+1$
B) $x-2$
C) $2x+1$
D) $3x^2+7x+2$
E) $3x+1$

52. Indique un factor primo del polinomio

$$P_{(a;b;c)}=(ab)^5+(ac)^5+(bc)^5+$$
$$+abc\left[a^5+b^5+c^5+abc\left(a^2b^2c^2+1\right)\right].$$

A) a^3+bc B) b^4+a C) c^4+ab
D) a^2+bc E) b^2+ac

53. Luego de factorizar el polinomio

$S_{(x;y;z)}=(3x+y-5z)^5+(2z-y-2x)^5+(3z-x)^5$,

indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

I. Un factor primo es $2x+y-2z$.
II. La suma de dos factores primos es $x-3z$.
III. Un factor primo es $3x+y+5z$.

A) VVV B) VVF C) VFV
D) VFF E) FVF

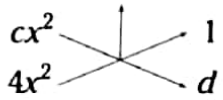
54. Indique el valor de verdad con respecto al polinomio $P_{(x)}=x(x-1)(x+2)(x-3)+8$ de las siguientes proposiciones.

I. Tiene dos ceros racionales.
II. Tiene tres factores primos mónicos.
III. Tiene dos factores primos cuadráticos.

A) VVV
B) VVF
C) VFV
D) VFF
E) FVF

55. Luego de factorizar un polinomio $P_{(x)}$ sobre los racionales por el criterio del aspa simple se obtuvo:

$P_{(x)}=8x^a+bx^2-(d+2)$

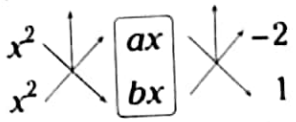


Determine uno de sus factores primos.

A) $4x^2+1$
B) $2x^2+1$
C) $2x^2-1$
D) $2x+3$
E) $2x-3$

56. Luego de factorizar por aspa doble especial al polinomio $P_{(x)}$ se obtiene el siguiente esquema:

$$R_{(x)}=x^4+3x^3-5x^2+mx-2$$



Calcule el valor de $a+b+m$; $a<b$.

A) 5 B) -5 C) 6
D) 7 E) -6

57. Si los trinomios f y g,
$f_{(x)}=x^2+ax+6 \wedge g_{(x)}=x^2+bx+3$,
admiten un factor común de la forma $2x+c$, calcule el valor de $ac-bc$.

A) 6 B) -6 C) 4
D) -4 E) 2

58. Sea el polinomio $P_{(x)}=x^4-3x^2-6x-8$. Determine el valor numérico de un factor primo cuando
$x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

59. Luego de factorizar
$S_{(a;b;c)}=(2a^2+ab+ac+bc)^2+a^2(b-c)^2$,
indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Tiene dos factores primos cuadráticos.
II. Un factor primo es $2a^2-2ab+b^2$.
III. Tiene dos factores primos lineales.

A) VVV
B) VFV
C) VFF
D) FVF
E) FFV

60. Indique el valor de verdad de cada una de las proposiciones con respecto al polinomio
$P_{(x)}=x^5-5x^4-x^3+16x^2-11x+2$.

I. Un factor primo es cúbico de término independiente 2.
II. $-5x$ es un término de un factor primo.
III. $-3x$ es un término de un factor primo cuadrático.

A) VVV
B) VFF
C) VVF
D) FVF
E) FVV

CLAVES
Problemas propuestos

NIVEL I

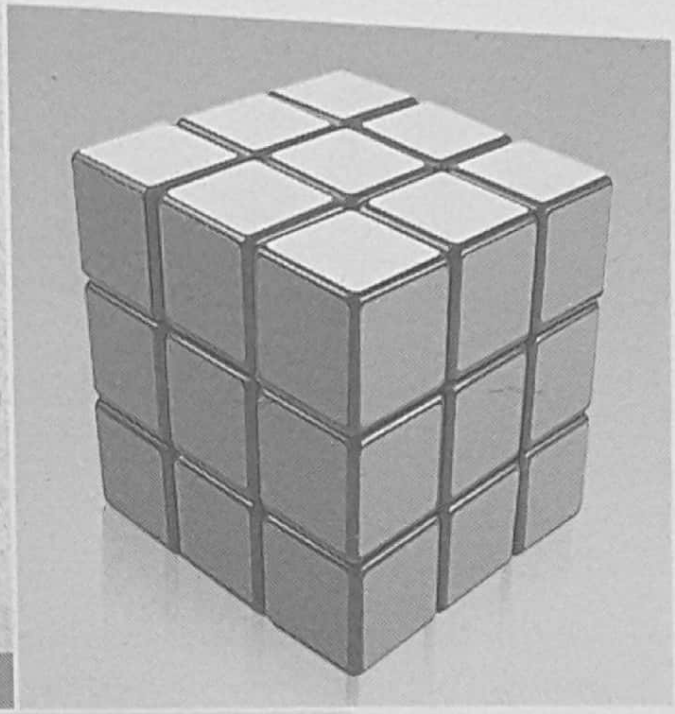
1 A	5 E	9 D	13 E	17 A
2 A	6 C	10 E	14 A	18 B
3 D	7 E	11 D	15 A	19 C
4 D	8 A	12 E	16 C	20 E

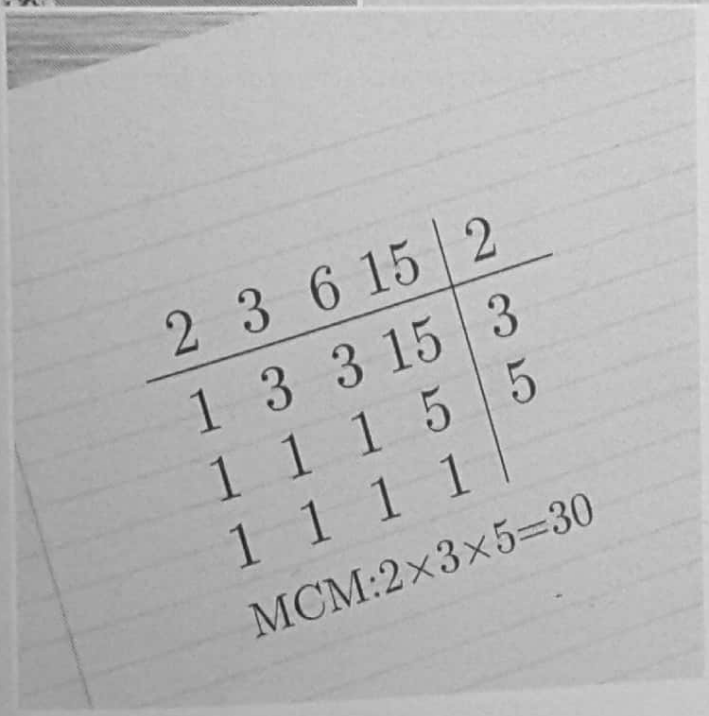
NIVEL II

21 D	29 E	37 D	45 E	53 E
22 A	30 C	38 A	46 A	54 B
23 A	31 B	39 E	47 D	55 B
24 C	32 D	40 D	48 A	56 E
25 A	33 D	41 C	49 C	57 A
26 C	34 E	42 B	50 D	58 B
27 B	35 C	43 D	51 B	59 C
28 A	36 A	44 B	52 C	60 D

Capítulo

VIII





Máximo común divisor, mínimo común múltiplo y fracciones

CAPÍTULO VIII

MCD, MCM Y FRACCIONES

Objetivos

- Conocer el significado y aplicaciones del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo.
- Efectuar operaciones con fracciones algebraicas.
- Descomponer una fracción algebraica en sus fracciones parciales.

Introducción

En el presente capítulo veremos que el mínimo común múltiplo (MCM) y el máximo común divisor (MCD) son consecuencias de la teoría de múltiplos y divisores de magnitudes estudiadas en aritmética. Una de las aplicaciones técnicas del MCM y del MCD es distribuir (encajar) una cantidad de objetos geométricos semejantes de una forma exacta en otro de mayor magnitud.

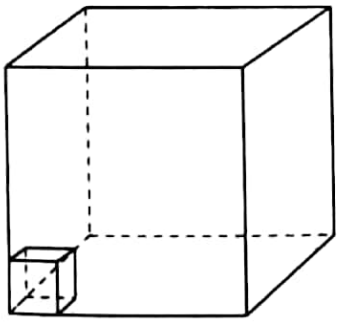


fig. 1

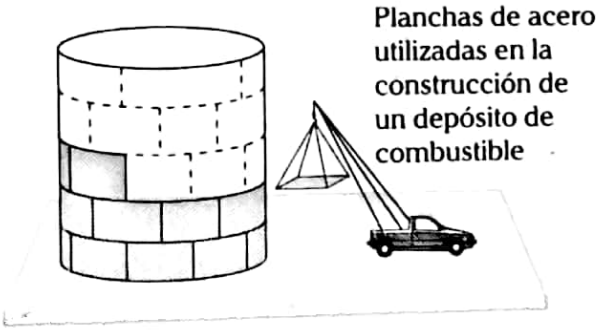


fig. 2

Fig. (1): En esta figura, para poder encontrar la cantidad de cajas pequeñas que entran en la caja grande se debe utilizar los conceptos de MCM y de MCD.
Fig. (2): En esta figura, para calcular el número de planchas que se deben utilizar en la construcción de un depósito de dimensiones conocidas, es necesario utilizar el concepto de fracciones.
En álgebra, estos conceptos de MCM y de MCD se generalizan a expresiones algebraicas y este será el estudio que se realice en el presente capítulo.

CONCEPTOS BÁSICOS

FACTOR DE UN POLINOMIO

Dados dos polinomios de grados no nulos $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$, se dice que $Q_{(x)}$ es un factor de $P_{(x)}$ si y solo si la división $P_{(x)} \div Q_{(x)}$ es exacta. En tal caso, será posible expresarlo por

$$P_{(x)} \equiv Q_{(x)} \cdot H_{(x)};$$

$H_{(x)}$ es un polinomio no nulo

FACTOR COMÚN DE DOS O MÁS POLINOMIOS

Diremos que $M_{(x)}$ será un factor común a dos polinomios $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ si existen otros polinomios $f_{(x)}$ y $g_{(x)}$ no nulos, de tal manera que sea posible expresarlos por

$$P_{(x)} = M_{(x)} \cdot f_{(x)} \;;\; Q_{(x)} = M_{(x)} \cdot g_{(x)}.$$

Ejemplos

1. Sean los polinomios factorizados

   $P_{(x)} = (2x-1)^2(x-3)^3(5x+2);$

   $Q_{(x)} = (x-2)(2x-1)(5x+2)^5.$

   Sus factores comunes son

   $(2x-1),\ (5x+2),\ (2x-1)(5x+2).$

2. Sean los polinomios factorizados

   $P_{(x)} = (x+2)^3(x-1);$

   $Q_{(x)} = (x+2)^2(x+3).$

   Sus factores comunes son

   $(x+2),\ (x+2)^2.$

MÚLTIPLO DE UN POLINOMIO

Sea el polinomio $P_{(x)} = (x+2)(x-5)$.

Los múltiplos de $P_{(x)}$ son

$$(x+2)(x-5),\ (x+2)^2(x-5),\ (x+2)(x-5)x\ldots$$

POLINOMIO MÚLTIPLO COMÚN

El polinomio múltiplo común de dos o más polinomios es aquel polinomio que es divisible exactamente por estos en forma separada.

Así, sean los polinomios

$$P_{(x)} = (x+1)(x^2+3);$$

$$Q_{(x)} = (x-1)(x+1).$$

Los polinomios múltiplos comunes de $P_{(x)}$, $Q_{(x)}$ son

$$(x-1)(x+1)(x^2+3),\ (x-1)^2(x+1)(x^2+3)$$

$$(x-1)(x+1)^2(x^2+3)^3, \ldots$$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

DEFINICIÓN

Dados dos o más polinomios no constantes, llamaremos máximo común divisor de estos polinomios al factor común de mayor grado.

El cálculo del máximo común divisor en los polinomios es similar al cálculo del máximo común divisor en los enteros, para ello, primero se toman los factores primos comunes elevados al menor exponente y luego se multiplican dichos factores.

Ejemplos

1. Sean los polinomios

   $P_{(x)} = (2x+7)^4(x-1)^2(3x-1);$

   $Q_{(x)} = (2x-1)^5(3x-1)^2(x-1)^2.$

   Los factores comunes son

   $3x-1,\ x-1,\ (3x-1)(x-1),\ (3x-1)(x-1)^2.$

   De ellos, el de mayor grado es $(3x-1)(x-1)^2$.

   $\therefore\ \text{MCD}(P;\ Q) = (3x-1)(x-1)^2$

2. Sean los polinomios

$T_{(x,y)}=(x-y)^3(x+3)$;

$U_{(x,y)}=(x-y)^2(x+y)$.

Calcule su MCD.

Resolución

Los factores comunes de T y U son $x-y$; $(x-y)^2$.

El factor común de mayor grado es el máximo común divisor, en este caso, $(x-y)^2$.

> **Tenga en cuenta**
>
> Si $S_{(x)}$ es el MCD de $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$, entonces se tendrá lo siguiente:
>
> $P_{(x)}=S_{(x)}\cdot M_{(x)}$;
>
> $Q_{(x)}=S_{(x)}\cdot N_{(x)}$.
>
> Donde $M_{(x)}$, $N_{(x)}$ son polinomios que no poseen ningún factor común, llamados primos entre sí.

Ejemplo

3. Si x^2-x-6 es el MCD de los polinomios

$P_{(x)}=2x^4-3x^3+x^2+Ax+B$ y

$Q_{(x)}=3x^4-7x^3+Mx+N$,

calcule el valor de $AN+BM$.

Resolución

Como no conocemos los valores de A, B, M y N, es conveniente dividir por el método Horner $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ entre x^2-x-6 por separado. Es decir, x^2-x-6 divide exactamente a los polinomios $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$, respectivamente. Luego

I. $P_{(x)}\div(x^2-x-6)$

Por el método de Horner

		+	+		
1	2	−3	1	A	B
1		2	12		
6			−1	−6	
				12	72
	2	−1	12	0	0

Entonces

$A-6+12=0 \rightarrow A=-6$

$B+72=0 \rightarrow B=-72$

II. Igualmente

$Q_{(x)}\div(x^2-x-6)$

Por el método de Horner

		+	+		
1	3	−7	0	M	N
1		3	18		
6			−4	−24	
				14	84
	3	−4	14	0	0

De I y II se tiene que

$AN+BM=(-6)(-84)+(-72)(10)=-216$

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

DEFINICIÓN

Dados dos o más polinomios, el MCM es el polinomio múltiplo común de menor grado.

> **Observación**
>
> El cálculo del mínimo múltiplo en los polinomios es análogo al cálculo del mínimo común múltiplo en los enteros.

Ejemplos

1. Sean los polinomios factorizados

$P_{(x)}=(2x-1)(x+1)^3$;

$Q_{(x)}=(x-1)(x+1)^2$.

Halle su MCM.

Resolución

El MCM es el polinomio de menor grado que tiene como divisores o factores a $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$. En forma práctica es la multiplicación de los factores primos comunes con su mayor exponente, respectivamente, y sus factores no comunes.

De

$P_{(x)}=(x+1)^3(2x-1)$;

$Q_{(x)}=(x+1)^2(x-1)$,

el factor primo común es $(x+1)$.

Luego, $\text{MCM}(P;Q)=\underbrace{(x+1)^3}_{\text{factor común}}\cdot\underbrace{(2x-1)(x-1)}_{\text{factores no comunes}}$

$\therefore\ \text{MCM}(P;Q)=(x+1)^3\cdot(2x-1)(x-1)$

2. Sean los polinomios factorizados

$P_{(x)}=(2x-1)(4x+3)^3(x-1)^2$;

$Q_{(x)}=(3x+1)(x-1)(4x+3)^2$.

Halle su MCM.

Resolución

Los múltiplos comunes de $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ son

$(2x-1)(4x+3)^3(x-1)^2(3x+1)$;

$(2x-1)^2(4x+3)^3(x-1)^3(3x+1)$,

$\vdots$

pero el de menor grado es el mínimo común múltiplo.

$\therefore\ \text{MCM}(P;Q)=(x-1)^2(4x+3)^3(2x-1)(3x+1)$

Otro método

Aplicamos la regla práctica a los factores primos comunes

$4x+3,\ x-1$

y a los no comunes.

$(2x-1),\ (3x+1)$.

Luego

$\text{MCM}(P;Q)=(4x+3)^3(x-1)^2(2x-1)(3x+1)$

Teorema

Dados dos polinomios $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$, se cumple que

$P_{(x)}\cdot Q_{(x)}\equiv\text{MCD}(P;Q)\cdot\text{MCM}(P;Q)$

Demostración

Sean

$P_{(x)}=A_{(x)}\cdot B_{(x)}$ (I)

$Q_{(x)}=A_{(x)}\cdot C_{(x)}$ (II)

donde $B_{(x)}$ y $C_{(x)}$ son primos entre sí.

$\rightarrow\ \text{MCD}(P;Q)=A_{(x)}$

$\rightarrow\ \text{MCM}(P;Q)=A_{(x)}\cdot B_{(x)}\cdot C_{(x)}$

De (I) · (II)

$P_{(x)}\cdot Q_{(x)}\equiv A_{(x)}\cdot B_{(x)}\cdot A_{(x)}\cdot C_{(x)}$

$P_{(x)}\cdot Q_{(x)}\equiv\underbrace{A_{(x)}}_{\text{MCD}(P;Q)}\cdot\underbrace{B_{(x)}\cdot A_{(x)}\cdot C_{(x)}}_{\text{MCM}(P;Q)}$

$\therefore\ P_{(x)}\cdot Q_{(x)}\equiv\text{MCD}(P;Q)\cdot\text{MCM}(P;Q)$

3. El MCM de dos polinomios $A_{(x)}$ y $B_{(x)}$ es x^3-x^2-4x+4 y su MCD es x^2+x-2. Halle el número de factores primos de $A_{(x)}\cdot B_{(x)}$.

Resolución

Por el teorema

$$A_{(x)}\cdot B_{(x)}=\text{MCD}(A;B)\cdot\text{MCM}(A;B).$$

$$=(x^3-x^2-4x+4)(x^2+x-2)$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & -4 & x \quad 2 \\ x & -1 & x \quad -1 \end{array}$$

$$\equiv(x^2-4)(x-1)(x+2)(x-1)$$

$$\equiv(x+2)(x-2)(x-1)(x+2)(x-1)$$

$$\equiv(x+2)^2(x-1)^2(x-2)$$

Por lo tanto, $A_{(x)}\cdot B_{(x)}$ tiene tres factores primos.

4. El producto de multiplicar dos polinomios en variable x es $(x^6+1)^2-4x^6$ y el cociente de dividir su MCM y MCD de esos polinomios es $(x^2+1)^2-4x^2$. Halle su MCD.

Resolución

Sean $A_{(x)}$ y $B_{(x)}$ los polinomios.

Como

$$A_{(x)}\cdot B_{(x)}\equiv\text{MCD}_{(x)}\cdot\text{MCM}_{(x)}$$

$$\rightarrow\ \text{MCD}(A;B)\cdot\text{MCM}(A;B)=(x^6+1)^2-4x^6 \quad \text{(I)}$$

También

$$\frac{\text{MCM}(A;B)}{\text{MCD}(A;B)}=(x^2+1)^2-4x^2 \qquad \text{(II)}$$

Como buscamos despejar MCD, entonces (I) ÷ (II)

$$\frac{\text{MCD}(A;B)\cdot\text{MCM}(A;B)}{\dfrac{\text{MCM}(A;B)}{\text{MCD}(A;B)}}\equiv(\text{MCD}(A;B))^2$$

$$\equiv\frac{(x^6+1)^2-4x^6}{(x^2+1)^2-4x^2}=\frac{(x^6-1)^2}{(x^2-1)^2}$$

$$\equiv\left[\frac{\cancel{(x^2-1)}(x^4+x^2+1)}{\cancel{x^2-1}}\right]^2$$

de donde $\text{MCD}(A;B)=x^4+x^2+1$.

5. Halle el MCD y MCM de los polinomios

$$A_{(x)}=x^4+2x^2-3;$$

$$B_{(x)}=x^4+x^3-x^2-x;$$

$$C_{(x)}=x^3-7x+6.$$

Resolución

Factorizando los polinomios:

$$A_{(x)}=x^4+2x^2-3$$

$$\begin{array}{cc} x^2 & 3 \\ x^2 & -1 \end{array}$$

$$=(x^2+3)(x^2-1)=(x^2+3)(x+1)(x-1)$$

$$B_{(x)}=x^4+x^3-x^2-x\equiv x(x^3+x^2-x-1)$$

Agrupando como se indica

$$=x(\underline{x^3}+\underline{x^2}-x-1)$$

$$=x[x^2(x+1)-(x+1)]$$

$$=x(x+1)(x^2-1)=x(x+1)^2(x-1)$$

De donde

$$A_{(x)}=(x^2+3)(x+1)(x-1);$$

$$B_{(x)}=x(x+1)^2(x-1).$$

$$\rightarrow\ \text{MCD}(A;B)=(x+1)(x-1)$$

$$\rightarrow\ \text{MCM}(A;B)=(x-1)(x+1)^2\cdot x\cdot(x^2+3)$$

6. Halle el MCD y MCM de los polinomios

$$P_{(x)}=x^3-6x^2+11x-6;$$

$$Q_{(x)}=x^5-2x^3+2x^2-3x+2.$$

Resolución

Factorizando los polinomios:

$$P_{(x)}=x^3-6x^2+11x-6\equiv(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$Q_{(x)}=x^5-2x^3+2x^2-3x+2$$

Observamos $Q_{(1)}=0$, entonces $(x-1)$ es un factor. El otro factor, hallado con el método de Ruffini, es $Q_{(x)}\div(x-1)$.

	1	0	−2	2	−3	2
1	↓	1	1	−1	1	−2
	1	1	−1	1	−2	0

$$(x-1)(x^4+x^3-x^2+x-2)$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & x & -2 \\ x^2 & 0x & 1 \end{array}$$

$$0x^2$$

$$(x-1)(x^2+x-2)(x^2+1)$$

$$\begin{array}{cc} x & 2 \\ x & -1 \end{array}$$

$$=(x-1)^2(x+2)(x^2+1)$$

Luego

$$P_{(x)}=(x-1)(x-2)(x-3);$$

$$Q_{(x)}=(x-1)^2(x+2)(x^2+1)$$

De donde

$$\text{MCD}(P;\,Q)=x-1$$

$$\text{MCM}(P;\,Q)=(x-1)^2(x-2)(x-3)(x+2)(x^2+1)$$

▸ FRACCIONES ALGEBRAICAS

DEFINICIÓN

Se denomina fracción algebraica a la división indicada de dos polinomios, exceptuándose a las divisiones exactas.

En forma general, se denotan por

$\dfrac{N_{(x)}}{D_{(x)}}$ ← numerador
← denominador (no nulo ni constante)

Ejemplos

1. Las siguientes fraccciones son algebraicas.

a. $S_{(x)}=\dfrac{3x^2+5x}{x-1}$

b. $T_{(x;\,y)}=\dfrac{x+y}{x-y}$

c. $R_{(x;y;z)}=\dfrac{x+y-z}{2z}$

d. $R_{(x)}=\dfrac{x^6+x^2+1}{x^3+x+1}$

e. $S_{(x;\,y;\,z)}=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{4xyz}$

f. $T_{(x;\,y;\,z)}=\dfrac{2x^2+3y^2+4z^4}{2z^4+3y^3+4x^2}$

g. $M_{(x;\,z)}=\dfrac{8x^2+5z^2}{\dfrac{x-z}{8}+3xz}$

2. Las siguientes fracciones no son algebraicas

a. $P_{(x;\,y)}=\dfrac{x^2+x+4}{\dfrac{1}{x}-2}$

no es fracción algebraica, pues el denominador no es polinomio.

b. $Q_{(x;\,y;\,z)}=\dfrac{x+y+z+4}{y-x-z^{-2}}$

no es fracción algebraica, pues el denominador no es polinomio.

c. $P_{(x)}=\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$

no es fracción algebraica, pues es una división exacta.

d. $Q_{(x)}=\dfrac{3\pi a^2x^5}{203}$

no es fracción algebraica, puesto que ella no presenta variable en el denominador

DOMINIO O CONJUNTO DE VALORES ADMISIBLES DE FRACCIONES ALGEBRAICAS (CVA)

Se tiene la siguiente fracción algebraica:

$f_{(x)} = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ en variable x, y sea m un número cualquiera.

El valor numérico $f_{(m)}$ obtenido al sustituir x por m en $f_{(x)}$ puede no tener sentido para algún valor de m.

Por ejemplo, si se sustituye x por 1, sería

$f_{(1)} = \dfrac{1^2+3}{1-1}$, el cual carece de sentido.

Esto nos muestra que la variable x no puede tomar cualquier valor, sino que está restringido a un conjunto llamado **dominio o conjunto de valores admisibles** (CVA).

En general, para el caso de una fracción en una variable

$$F_{(x)} = \frac{N_{(x)}}{D_{(x)}}$$

$$\text{CVA}(F) = U - \{x \in U / D_{(x)} = 0\}$$

Donde U: universo (conjunto referencial).

Ejemplos

1. En $U = \mathbb{R}$ ← conjunto referencial

$$f_{(x)} = \frac{x^2+5x+7}{(x+2)(x+1)}$$

La fracción está bien definida para todo número real que tome su variable x, excepto -2 y -1, porque de tomar x tales valores, el denominador tomaría el valor de cero, para el cual no tiene sentido la fracción.

Entonces CVA $(f) = \mathbb{R} - \{-2; -1\}$.

2. En $U = \mathbb{R}$

$$f_{(x)} = \frac{x+1}{x^2+4}$$

La fracción está bien definida para todo número real x, pues x^2+4 nunca es cero.

Entonces CVA $(f) = \mathbb{R}$

OPERACIONES ENTRE NÚMEROS RACIONALES

Sean $\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{c}{d}$ números racionales. En $\mathbb{Q}$ definimos las siguientes operaciones.

Adición

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Ejemplo

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{2\cdot 4 + 3\cdot 5}{3\cdot 4} = \frac{8+15}{12} = \frac{23}{12}$$

Multiplicación

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplos

1. Tenemos

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{17}{5} = \frac{3\cdot 17}{4\cdot 5} = \frac{51}{20}.$$

Además, para dividir fracciones podemos emplear la regla práctica que consiste en la división del producto de extremos entre producto de medios:

$$\left[\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\right] = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}; \quad bcd \neq 0$$

2. Efectuamos una división así

$$\left[\begin{array}{c}\frac{2}{5}\\ \hline \frac{7}{3}\end{array}\right]=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}.$$

De manera análoga, se realizan las operaciones entre fracciones algebraicas.
Sean las fracciones algebraicas

$$f_{1(x)}=\frac{N_{1(x)}}{D_{1(x)}};\quad f_{2(x)}=\frac{N_{2(x)}}{D_{2(x)}}.$$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Adición y sustracción

$$\boxed{\frac{N_{1(x)}}{D_{1(x)}}\pm\frac{N_{2(x)}}{D_{2(x)}}=\frac{N_{1(x)}D_{2(x)}\pm N_{2(x)}D_{1(x)}}{D_{1(x)}\cdot D_{2(x)}}}$$

$$\text{CVA}(f_1\pm f_2)=U-\{x/D_{1(x)}=0\ \vee\ D_{2(x)}=0\}$$

Ejemplo

$$f_{(x)}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}$$

$$=\frac{(x+1)(x+1)+(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{2(x^2+1)}{x^2-1};\quad \forall x\in U-\{1;-1\}$$

Multiplicación

$$\boxed{\frac{N_{1(x)}}{D_{1(x)}}\cdot\frac{N_{2(x)}}{D_{2(x)}}=\frac{N_{1(x)}\cdot N_{2(x)}}{D_{1(x)}\cdot D_{2(x)}}}$$

$$\text{CVA}(f_1\cdot f_2)=U-\{x/D_{1(x)}=0\ \vee\ D_{2(x)}=0\}$$

Ejemplo

$$f_{(x)}=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2-1}{x^2-1}=1$$

$$\forall x\in U-\{1;-1\}$$

División

$$\boxed{\frac{N_{1(x)}}{D_{1(x)}}\div\frac{N_{2(x)}}{D_{2(x)}}=\frac{N_{1(x)}\cdot D_{2(x)}}{D_{1(x)}\cdot N_{2(x)}}}$$

$$\text{CVA}(f_1\div f_2)=U-\{x/D_{1(x)}=0\ \vee\ D_{2(x)}=0\ \vee\ N_{2(x)}=0\}$$

Ejemplo

$$f_{(x)}=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\div\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$$

$$=\left[\begin{array}{c}\frac{x+1}{x-1}\\ \hline \frac{x+2}{x-3}\end{array}\right]=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2};\quad \forall x\in U-\{1;3;-2\}$$

FRACCIONES ALGEBRAICAS REDUCTIBLES

Una fracción $f_{(x)}=\dfrac{N_{(x)}}{D_{(x)}}$ es reductible si $N_{(x)}\wedge D_{(x)}$ poseen factores comunes; en otro caso, a la fracción se le llama irreducible. Cuando la fracción es reducible, se procede a la simplificación de factores comunes considerando como CVA de la fracción reducida al CVA de la fracción inicial.

Ejemplos

1. La fracción en $\mathbb{R}$

$$f_{(x)} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x-5)(x-3)}; \quad CVA(f) = \mathbb{R} - \{3; 5\}$$

puede reducirse a

$$f_{(x)} = \frac{x+2}{x-5}, \text{ para } x \neq 5 \ \wedge \ x \neq 3$$

$\therefore$ $CVA(f) = \mathbb{R} - \{3; 5\}$.

2. Sea

$$f_{(x)} = \left(\frac{x-2}{x+2}\right) \cdot \left(\frac{x+2}{x-2}\right)$$

vemos que $x \neq -2 \ \wedge \ x \neq 2$, luego

$$f_{(x)} = \frac{x^2-4}{x^2-4} = 1$$

$\rightarrow$ $CVA(f) = \mathbb{R} - \{2; -2\}$

CLASIFICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Sea la fracción algebraica

$$f_{(x)} = \frac{N_{(x)}}{D_{(x)}}$$

La podemos clasificar de acuerdo al grado de N y D.

Fracción propia

Cuando el grado del polinomio $N_{(x)}$ es menor que el grado del polinomio $D_{(x)}$.

Fracción impropia

Cuando el grado del polinomio $N_{(x)}$ es mayor o igual que el grado del polinomio $D_{(x)}$.

Ejemplos

1. Son fracciones propias

$$f_{1(x)} = \frac{x+1}{x^3+2}$$

$$f_{2(x)} = \frac{3x^4+6x+1}{3x^5+6x+1}$$

$$f_{3(x)} = \frac{x^2+3x}{x^4+5x+1}$$

$$f_{4(x)} = \frac{1}{x^5}$$

2. Son fracciones impropias

$$f_{1(x)} = \frac{x^2+2x+4}{x-3}$$

$$f_{2(x)} = \frac{3x^5+1}{x^2+2x-5}$$

$$f_{3(x)} = \frac{x^2+1}{x}$$

$$f_{4(x)} = \frac{x^2+2x+1}{x^2+5x+6}$$

También las podemos clasificar por grupo.

Fracciones homogéneas

Un grupo de fracciones algebraicas son homogéneas si todas poseen igual polinomio denominador.

Ejemplos

a. $f_{1(x)} = \dfrac{1}{x+1}$

b. $f_{2(x)} = \dfrac{x+2}{x+1}$

c. $f_{3(x)} = \dfrac{x^2}{x+1}$

Como los denominadores son iguales, entonces $f_{1(x)}$; $f_{2(x)}$ y $f_{3(x)}$ son fracciones homogéneas.

Fracciones heterogéneas

Dos o más fracciones algebraicas son heterogéneas si al menos una de ellas posee distinto polinomio denominador.

Ejemplos

a. $f_{1(x)} = \dfrac{2}{x+2}$

b. $f_{2(x)} = \dfrac{5x}{x+3}$

c. $f_{3(x)} = \dfrac{6}{x+1}$

Como los denominadores son diferentes, entonces $f_{1(x)}$; $f_{2(x)}$ y $f_{3(x)}$ son fracciones heterogéneas.

Teorema

El valor numérico de

$$f_{(x;\,y)} = \frac{a_1x + b_1xy + c_1y + d_1}{a_2x + b_2xy + c_2y + d_2};$$

$a_2 \neq 0$; $b_2 \neq 0$; $c_2 \neq 0$; $d_2 \neq 0$

no depende de las variables x; y.

Entonces se cumple

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = k$$

Demostración

$$\frac{a_1x + b_1xy + c_1y + d_1}{a_2x + b_2xy + c_2y + d_2} = k$$

Entonces

$$a_1x+b_1xy+c_1y+d_1 \equiv k(a_2x+b_2xy+c_2y+d_2)$$

$$a_1x+b_1xy+c_1y+d_1=ka_2x+kb_2xy+kc_2y+kd_2$$

$$a_1 = ka_2 \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = k;\quad a_2 \neq 0$$

$$b_1 = kb_2 \rightarrow \frac{b_1}{b_2} = k;\quad b_2 \neq 0$$

$$c_1 = kc_2 \rightarrow \frac{c_1}{c_2} = k;\quad c_2 \neq 0$$

$$d_1 = kd_2 \rightarrow \frac{d_1}{d_2} = k;\quad d_2 \neq 0$$

$$\therefore\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = k$$

Ejemplo

Si la fracción

$$f_{(x;\,y)} = \frac{(P-2)x + (2P+3q-1)y + 3q}{8x - 4y + 7}$$

toma un valor constante distinto de cero para todos los valores de x e y que pertenecen al CVA de la fracción, entonces determine este valor.

Resolución

Haremos uso del teorema anterior

$f_{(x;\,y)}=k$; $k \neq 0$

Entonces

$$\frac{P-2}{8} = \frac{2P+3q-1}{-4} = \frac{3q}{7} = k \qquad (*)$$

De (*) se tiene:

$$\frac{\cancel{P}-2}{8} = \frac{2\cancel{P}+3\cancel{q}-1}{-4} \wedge \frac{\cancel{P}-2}{8} = \frac{3q}{7}$$

$$\cancel{P}-2=-4\cancel{P}-6q+2 \wedge 7\cancel{P}-14=24q$$

$$5\cancel{P}=4-6q \wedge 7\cancel{P}=14+24q$$

$$\rightarrow \frac{5}{7} = \frac{4-6q}{14+24q}$$

Obtenemos

$$q=-\frac{7}{27}$$

Luego, reemplazando en

$5p=4-6q$, se tiene

$$p=\frac{10}{9}$$

De donde resulta que

$$P=\frac{10}{9} \wedge q=\frac{-7}{27}$$

Por lo que reemplazando en (*) obtenemos

$$k=\frac{-1}{9}.$$

DESCOMPOSICIÓN DE UNA FRACCIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

Hemos visto que es de suma importancia saber aplicar la adición de fracciones, por ejemplo

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3x}{(x-2)(x+1)}$$

Ahora aprenderemos el proceso inverso, es decir, expresar una fracción como la adición indicada de fracciones simples.

Caso I

Para fracciones propias

Sea $F_{(x)}$ una fracción propia irreducible, de no ser así tenemos que reducirla:

$$F_{(x)}=\frac{N_{(x)}}{D_{(x)}}$$

Ahora debemos factorizar el polinomio denominador $D_{(x)}$.

I. Si en la factorización del polinomio $D_{(x)}$ se observa que $(ax+b)$ es factor y $(ax+b)^2$ no es factor, por cada uno de estos se genera como sumando a la fracción

$$\boxed{\frac{A}{ax+b};\ \{A;\ a;\ b\}\subset \mathbb{R} \wedge a\neq 0}$$

Ejemplos

1. Descomponga en fracciones parciales a

$$f_{(x)}=\frac{3x+4}{x^2+3x+2}.$$

Resolución

Se observa que es una fracción propia irreducible. Entonces, factorizamos el denominador $(x+1)(x+2)$, donde

$$x+1 \rightarrow \text{genera } \frac{A}{x+1}$$

$$x+2 \rightarrow \text{genera } \frac{B}{x+2}$$

Por consiguiente

$$f_{(x)}=\frac{3x+4}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

$$\rightarrow \frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

Luego tenemos

$$3x+4\equiv(A+B)x+2A+B$$

De donde

$A+B=3$

$2A+B=4$

Resolviendo: $A=1 \wedge B=2$

Entonces

$$f_{(x)}=\frac{3x+4}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}$$

2. Descomponga en fracciones parciales

$$f_{(x)}=\frac{4x^2+11x+3}{x^3+2x^2-x-2}.$$

Resolución

Como es propia e irreductible, factorizamos el denominador $(x+1)(x-1)(x+2)$, donde

$$(x+1) \rightarrow \text{genera } \frac{A}{x+1}$$

$$(x-1) \rightarrow \text{genera } \frac{B}{x-1}$$

$$(x+2) \rightarrow \text{genera } \frac{C}{x+2}$$

Entonces

$$f_{(x)} = \frac{4x^2+11x+3}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$f_{(x)} = \frac{A(x-1)(x+2)+B(x+1)(x+2)+C(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$\rightarrow 4x^2+11x+3 \equiv A(x-1)(x+2)+$$
$$+B(x+1)(x+2)+C(x+1)(x-1)$$

Como es una identidad, podemos evaluar en particular para

$x=1; -1; -2.$

$x=1: \quad 18=6B \quad \rightarrow B=3$

$x=-1: \quad -4=-2A \quad \rightarrow A=2$

$x=-2: \quad -3=3C \quad \rightarrow C=-1$

Finalmente tenemos

$$f_{(x)} = \frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

II. Por cada factor de la forma $(ax+b)^n \wedge a \neq 0$, tal que $(ax+b)^{n+1}$ no es factor del denominador, se genera la adición indicada de fracciones de la forma

$$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(ax+b)^3}+\ldots+\frac{M}{(ax+b)^n}$$

Ejemplos

1. Descomponga en fracciones parciales la expresión

$$f_{(x)} = \frac{3x+1}{(x-1)^2}.$$

Resolución

Como el denominador es $(x-1)^2$, entonces en la descomposición se tendrá en los denominadores a $x-1$ y $(x-1)^2$. Así:

$$f_{(x)} = \frac{3x+1}{(x-1)^2} \equiv \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}$$

$$\rightarrow f_{(x)} \equiv \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$

Luego se tendrá

$$3x+1 \equiv A\cdot(x-1)+B = Ax-A+B$$

$$3x+1 \equiv Ax+(B-A)$$

De donde

$$A=3 \wedge 1=B-A \rightarrow B=4$$

$$\therefore f_{(x)} = \frac{3x+1}{(x-1)^2} \equiv \frac{3}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}$$

Otro método

Haciendo un cambio de variable

$$x-1=t \rightarrow x=t+1$$

$$\rightarrow \frac{3x+1}{(x-1)^2} \equiv \frac{3(t+1)+1}{t^2} \equiv \frac{3t+4}{t^2} \equiv \frac{3}{t}+\frac{4}{t^2}$$

Luego, reponiendo $t \equiv x-1$ se tiene

$$\frac{3x+1}{(x-1)^2} \equiv \frac{3}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}$$

2. Exprese la fracción algebraica en la suma de fracciones parciales.

$$f_{(x)} = \frac{2x^3-9x^2+10x-9}{(x-1)^3(x+2)}$$

Resolución

Observamos que en el denominador $(x-1)^3$ es factor y $(x-1)^4$ no lo es, entonces, $(x-1)^3$ genera

$$\boxed{\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}}$$

Además, $(x+2)$ también es factor, entonces genera $\dfrac{D}{x+2}$.

Luego tenemos

$$f_{(x)}=\frac{2x^3-9x^2+10x-9}{(x-1)^3(x+2)}$$

$$\rightarrow\ f_{(x)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x+2}$$

$$\rightarrow\ f_{(x)}\equiv\frac{A(x-1)^2(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x+2)+D(x-1)^3}{(x-1)^3(x+2)}$$

De donde debemos encontrar los valores de A; B; C; D, además los polinomios en los numeradores deben ser idénticos.

$$2x^3-9x^2+10x-9\equiv A(x-1)^2(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x+2)+D(x-1)^3$$

Por lo tanto, asignando valores convenientes a x

$x=1$: $\quad -2=C$

$x=-2$: $\quad 3=D$

$x=0$: $\quad -9=A(2)+B(-2)+C(2)+D(-1)\ \rightarrow\ B-A=1$

$x=-1$: $\quad 30=4A-2B-26\ \rightarrow\ B-2A=2$

De donde $A=-1\ \wedge\ B=0$

$$\therefore\ f_{(x)}=\frac{-1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{3}{x+2}$$

III. A cada factor de la forma $(ax^2+bx+c)^n$, con ax^2+bx+c, $a\neq 0$ polinomio irreducible y $(ax^2+bx+c)^{n+1}$ no es factor, se genera la adición indicada de fracciones de la forma

$$\boxed{\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}+\frac{Ex+F}{(ax^2+bx+c)^3}+\ldots+\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^n}}$$

Ejemplos

1. Descomponga en la adición indicada de fracciones parciales

$$f_{(x)}=\frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x^2+2x+2)^2}.$$

Resolución

El denominador $(x^2+2x+2)^2$ genera las fracciones parciales

$$\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2},$$

entonces

$$f_{(x)}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2} \rightarrow f_{(x)}=\frac{(Ax+B)(x^2+2x+2)+Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}$$

Luego, los polinomios numeradores deben ser idénticos

$$x^3+4x^2+3x+2\equiv Ax^3+(2A+B)x^2+(2A+2B+C)x+2B+D$$

De donde $A=1$; $B=2$; $C=-3$; $D=-2$.

Por lo que f puede expresarse

$$f_{(x)}=\frac{x+2}{x^2+2x+2}-\frac{3x+2}{(x^2+2x+2)^2}$$

2. Descomponga en la adición indicada de fracciones parciales

$$f_{(x)}=\frac{2x^2+8x-8}{(x+2)(x^2+4)}.$$

Resolución

Deducimos que

$x+2$ genera $\dfrac{A}{x+2}$ $\qquad$ x^2+4 genera $\dfrac{Bx+C}{x^2+4}$

Entonces

$$f_{(x)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+4} \rightarrow f_{(x)}=\frac{(A+B)x^2+(2B+C)x+2C+4A}{(x+2)(x^2+4)}$$

Luego, los polinomios numeradores deben ser idénticos.

$$2x^2+8x-8\equiv(A+B)x^2+(2B+C)x+2C+4A$$

De donde

$2=A+B;$

$8=2B+C;$

$-8=2C+4A.$

De ahí obtenemos $A=-2;\ B=4;\ C=0.$

Por lo que f puede expresarse

$$f_{(x)}=\frac{-2}{x+2}+\frac{4x}{x^2+4}$$

3. Descomponga f en la adición indicada de fracciones parciales.

$$f_{(x)}=\frac{x^5-3x^3}{(x^3+x)^2}.$$

Resolución

Reduciendo tenemos

$$f_{(x)}=\frac{x^3-3x}{(x^2+1)^2}$$

Donde $(x^2+1)^2$ genera las fracciones parciales

$$\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

Luego

$$f_{(x)}=\frac{x^3-3x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

De ahí

$$f_{(x)}=\frac{(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

Como los polinomios numeradores son idénticos, entonces

$$x^3-3x\equiv(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D.$$

De donde se obtiene

$A=1;\ B=0;\ C=-4;\ D=0$

Por lo tanto

$$f_{(x)}=\frac{-4x}{(x^2+1)^2}+\frac{x}{x^2+1}.$$

IV. De obtener factores en el denominador de la forma $(ax^3+bx^2+cx+d)^n$, como ax^3+bx^2+cx+d es no reductible, se genera

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{ax^3+bx^2+cx+d}+\frac{Dx^2+Ex+F}{(ax^3+bx^2+cx+d)^2}+\ldots+\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(ax^3+bx^2+cx+d)^n}$$

Caso II

Para fracciones impropias

Sea $F_{(x)}$ una fracción impropia

$$F_{(x)}=\frac{N_{(x)}}{D_{(x)}}$$

En este caso, debemos efectuar la división

$$F_{(x)}=\frac{N_{(x)}}{D_{(x)}}=q_{(x)}+\underbrace{\frac{R_{(x)}}{D_{(x)}}}_{\text{fracción propia}}$$

En el segundo miembro tenemos una fracción propia, por lo que debemos transformarla en la adición indicada de fracciones parciales.

Ejemplo

Descomponga f en la adición de fracciones parciales

$$f_{(x)}=\frac{x^4-3}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Resolución

Observamos que la fracción es impropia, entonces debemos efectuar la división, pues el grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

Para ello tenga en cuenta que:

$$x^4-1\equiv(x+1)(x-1)(x^2+1)$$

$$f_{(x)}=\frac{x^4-3}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{x^4-1-2}{x^3-x^2+x-1}$$

$$\equiv x+1-\underbrace{\frac{2}{x^3-x^2+x-1}}_{\text{fracción propia}}$$

Descomponemos la fracción propia irreductible en fracciones

$$\frac{-2}{x^3-x^2+x-1}=\frac{-2}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{-2}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A(x^2+1)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$\rightarrow\ -2\equiv A(x^2+1)+(x-1)(Bx+C)$$

Asignando valores convenientes a x

$x=1$: $\quad -2=2A \rightarrow A=-1$

$x=0$: $\quad -2=A-C \rightarrow C=1$

$x=-1$: $\quad -2=2A-2(-B+C) \rightarrow B=1$

Entonces

$$\frac{-2}{x^3-x^2+x-1}=\frac{-1}{x-1}+\frac{x+1}{x^2+1}$$

La descomposición de fracción impropia es

$$f_{(x)}=\frac{x^4-3}{(x-1)(x^2+1)}=x+1-\frac{1}{x-1}+\frac{x+1}{x^2+1}$$

Biografía

Blaise Pascal

Nació en Clermont-Ferrand, en la región francesa de Auvernia, el 19 de junio de 1623 y murió en París el 19 de agosto de 1662. Fue un matemático, físico, filósofo y teólogo francés considerado el padre de las computadoras, junto con Charles Babbage.

A los tres años perdió a su madre, Antoinette Begon. Su padre, Étienne Pascal, era juez local, presidente de la Corte de Impuestos de Montferrand y miembro de la pequeña nobleza, y también estaba interesado en la ciencia y en las matemáticas. Tuvo dos hermanas: la menor, Jacqueline; y Gilberte, la mayor.

En 1631, Étienne Pascal viajó a París junto con sus tres hijos; había decidido educarlos por su cuenta en aquella ciudad y muy pronto iba a descubrir que los tres demostrarían muy buenas aptitudes intelectuales, en especial su hijo Blaise, para las ciencias y matemáticas.

A los once años, el joven Pascal escribió un pequeño tratado sobre los sonidos de los cuerpos en vibración. Su padre, por miedo a que se perjudicaran sus estudios de latín y griego, le prohibió continuar dedicándose a las matemáticas hasta que cumpliese quince años. Sin embargo, meses después lo encontró escribiendo con un trozo de carbón en la pared la demostración independiente de que los ángulos de un triángulo suman dos ángulos rectos. A partir de ahí, a Pascal se le permitió estudiar a Euclides, además de sentarse a escuchar las asambleas de algunos de los mejores matemáticos y científicos de Europa, como Roberval, Desargues, Mydorge, Gassendi y Descartes, en la celda monástica del padre Marin Mersenne.

El trabajo de Gérard Desargues sobre secciones cónicas atrajo su interés. Desde aquel momento, un joven Pascal, de tan solo dieciséis años, se animó a escribir, a modo de prueba, *Essai pour les coniques* (Ensayo sobre cónicas), su primer trabajo serio sobre matemáticas, y que fue enviado al padre Mersenne en París. Lamentablemente, esta obra se perdió pues no fue publicada y solo queda el fragmento de una copia realizada por Leibniz (que había recibido el manuscrito completo a través del sobrino de Pascal, Étienne Périer). En su trabajo, Pascal establece que si un hexágono se inscribe en una sección cónica, entonces los tres puntos de intersección de los lados opuestos forman una línea (llamada línea Pascal).

Por aquella época, los puestos oficiales en Francia podían venderse, así que el padre de Pascal decidió traspasar su puesto de vicepresidente del Cour des Aides, e invirtió el dinero en bonos del tesoro que le darían buenas rentas. No obstante, en 1638, el cardenal Richelieu congeló las cuentas del tesoro debido a la complicada situación financiera del país, producto de la Guerra de los treinta años.

Debido a su oposición política, Étienne huye de París y deja a sus hijos bajo el cuidado de una vecina, pero regresa al recibir el perdón del cardenal, quien lo nombra como el encargado del cobro de impuestos en Ruán, Normandía. Este puesto, que consistía básicamente en realizar una serie de cálculos de impuestos y deudas, significó, más que un premio, una ardua labor, debido a que los archivos fiscales de la ciudad se encontraban en desorden. En 1642, Blaise, en un intento por ayudar a su padre en esta tarea, inventó y construyó la llamada Pascalina, la primera máquina sumadora de la historia, precursora de las calculadoras de hoy.

En Ruán, Pascal se interesó también por la física y la hidrostática. Gracias a sus estudios, inventó la jeringa y la prensa hidráulica, y logró descubrir lo que hoy se conoce como la Ley de la Presión de Pascal.

En 1646, la familia Pascal adoptó la doctrina del janseismo. En aquella época, la salud del joven Blaise empezaba a deteriorarse, pues su aparato digestivo funcionaba mal y además sufrió de parálisis temporal. Para el verano del siguiente año, decidió regresar a París, donde los médicos le aconsejaron distraerse. En 1654, empezó una experiencia mística, pues creía que el camino hacia Dios estaba en el cristianismo y no en la filosofía. Por este motivo, su trabajo científico estuvo relegado durante un tiempo. Sin embargo, en 1658 Pascal retoma sus investigaciones para elaborar lo que sería su último trabajo, que resultó un importante estímulo en el desarrollo del cálculo infinitesimal: el estudio de la cicloide, la curva trazada por un punto en la circunferencia de un círculo rodante. Aplicó el cálculo de indivisibles de Cavalieri al problema del área de un segmento de la cicloide y del centro de gravedad de cualquier segmento. También resolvió los problemas del volumen de un área de superficie del sólido de revolución formado girando la cicloide sobre el eje *X*.

Afectado por un tumor maligno en el estómago que se extendió al cerebro, Pascal murió en 1662, en París, dos meses después de cumplir 39 años.

Fuente:

http://es.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal
http://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/pascal.htm

Problemas RESUELTOS

Problema 1

Halle el MCD de los polinomios

$A_{(x)}=(x-1)^2(x+2)(3x-1)^3$;

$B_{(x)}=(x+1)(x-2)(x+2)(3x-1)^2$.

Resolución

Recordando que el MCD de $A_{(x)}$ y $B_{(x)}$ es el factor común de mayor grado, se tiene:

$\text{MCD}(A; B)=(x+2)(3x-1)^2$

Otro método

Se toman los factores primos comunes y se elevan al menor exponente.

En este caso son $(x+2)$ y $(3x-1)$.

Luego elevando al menor exponente se tiene

$$\text{MCD}(A; B)=(x+2)^1(3x-1)^2$$
$$=(x+2)(3x-1)^2.$$

Problema 2

Halle el MCM de los polinomios

$T_{(x)}=(x+5)(2x-1)^2(3x+2)$;

$S_{(x)}=(2x-1)^3(3x+2)^5(x+4)$.

Resolución

Por regla práctica, el MCM está dado por la multiplicación entre factores primos comunes elevados a su mayor exponente y factores no comunes.

$\therefore\ \text{MCM}(T; S)=(2x-1)^3(3x+2)^5(x+5)(x+4)$

Problema 3

Si $(x+1)$ es el MCD de los polinomios

$P_{(x)}=x^2-3x+A$ y $Q_{(x)}=x^2-4x+B$,

calcule el valor de $A+B$.

Resolución

Como $x+1$ es el MCD de P y Q, entonces P y Q son divisibles entre $x+1$.

$\rightarrow\ P_{(-1)}=0 \rightarrow (-1)^2-3(-1)+A=0 \rightarrow A=-4$

$Q_{(-1)}=0 \rightarrow (-1)^2-4(-1)+B=0 \rightarrow B=-5$

$\therefore\ A+B=-9$

Problema 4

Sean $A_{(x)}$, $B_{(x)}$ dos polinomios que cumplen lo siguiente:

I. $A_{(x)}\cdot B_{(x)}=(x-1)^3(x+1)^3$

II. $\text{MCD}(A; B)=x^2-1$

¿Cuál es el polinomio que representa al MCM de A y B?

Resolución

Recordando

$$\underbrace{A_{(x)}\cdot B_{(x)}}_{\text{dato}}=\underbrace{\text{MCD}(A; B)}_{\text{dato}}\cdot\text{MCM}(A; B)$$

Entonces

$$(x+1)^3(x-1)^3=(x^2-1)\cdot\text{MCM}(A; B)$$

$\therefore\ \text{MCM}(A; B)=(x+1)^2(x-1)^2$

Problema 5

Dados los polinomios P, Q que cumplen

I. $P_{(x)}+Q_{(x)}=x^2+3x-4$

II. $\text{MCD}(P; Q)\cdot\text{MCM}(P; Q)=(x-1)^2(x+3)$

III. Grado(P) > Grado Q

Calcule el término lineal de P.

Resolución

De I

$$P+Q=x^2+3x-4 \qquad (\alpha)$$

De II, como $\text{MCD}(P, Q)\cdot\text{MCM}(P; Q)=P\cdot Q$

entonces $P\cdot Q=(x-1)^2(x+3)$ $\qquad (\beta)$

Luego en (α) multiplicando por P se tiene:

$$P^2+P\cdot Q=(x^2+3x-4)P$$

$$P2-(x^2+3x-4)P+(x-1)^2(x+3)=0$$

P $\quad -(x-1)$

P $\quad -(x-1)(x+3)$

$\rightarrow \quad P=x-1 \quad \vee \quad P=(x-1)(x+3)$

Por III: $\quad P_{(x)}=(x-1)(x+3)=x^2+2x-3$

Por lo tanto, el término lineal de P es $2x$.

Problema 6

Halle el MCD de los polinomios

$Q_{(a;b)}=ab(ab+a+b+2)+a+b+1;$

$R_{(a;b)}=ab[a(a+1)+b(a+1)+1]+a^2+a+b;$

$S_{(a;b)}=[a^2b-a+a^2-b+ab^2-b^2](a+1).$

Resolución

Factorizando cada uno de los polinomios

$$Q_{(a;b)}=ab(ab+a+b+2)+a+b+1$$

$$\rightarrow \quad Q_{(a;b)}=(ab)^2+ab(a+b)+2ab+a+b+1$$

Agrupando como se indica

$$Q_{(a;b)}=(ab+1)^2+(a+b)(ab+1)$$

$$\rightarrow \quad Q_{(a;b)}=(ab+1)(ab+1+a+b)$$

$$\rightarrow \quad Q_{(a;b)}=(ab+1)\{(b+1)a+(b+1)\}$$

$$\rightarrow \quad Q_{(a;b)}=(ab+1)(b+1)(a+1)$$

Efectuando

$$R_{(a;b)}=ab[a(a+1)+b(a+1)+1]+a^2+a+b$$

$$R_{(a;b)}=a^2b(a+1)+ab^2(a+1)+ab+a^2+a+b$$

$$R_{(a;b)}=(a+1)[a^2b+ab^2+a+b]$$

$$R_{(a;b)}=(a+1)(a+b)(ab+1)$$

Análogamente factorizamos $S_{(a;b)}$

$$S_{(a;b)}=(a+b)(b+1)(a-1)(a+1)$$

Luego, observando los tres polinomios, concluimos que MCD(Q; R; S)$=(a+1)$.

Problema 7

Halle el MCM de los polinomios del problema 6.

Resolución

Observando los polinomios, el MCM es

$$(ab+1)(b+1)(a+1)(a+b)(a-1).$$

Problema 8

Si el MCD de los polinomios

$A_{(x)}=x^3+4x^2+ax+b$ y

$B_{(x)}=x^3+cx+d$ es $(x-1)(x+3)$,

halle su MCM.

Resolución

Por definición, el MCD$=x^2+2x-3$ es un factor de los polinomios. Luego, por el método de Horner

$A_{(x)}\div$MCD y $B_{(x)}\div$MCD

1	1	4	a	b
−2		−2	3	
3			−4	6
	1	2	0	0

$q_{1(x)}=x+2$

1	1	0	c	d
−2		−2	34	−6
3				
	1	−2	0	0

$q_{1(x)}=x-2$

$\rightarrow \quad A_{(x)}=(x-1)(x+3)(x+2) \quad \wedge$

$B_{(x)}=(x-1)(x+3)(x-2)$

$\therefore \quad$ MCM(A; B)$=(x-1)(x+3)(x+2)(x-2)$

Problema 9

Sean los polinomios

$P_{(x)}=x^4+mx-9x^2+n$ y $Q_{(x)}$,

cuyo MCD(P; Q) es x^2-5x+6.

Calcule $\frac{m}{n}$.

Resolución

Como el MCD es un factor común a $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$, entonces la división $P_{(x)} \div (x^2-5x+6)$ es exacta; esto implica que

$$P_{(2)}=0 \quad \wedge \quad P_{(3)}=0$$

Luego

$$P_{(2)}=2^4+2m-9\cdot 2^2+n=0$$

$$\rightarrow \ 2m+n=20 \qquad (\alpha)$$

$$P_{(3)}=3^4+3m-9\cdot 3^2+n=0$$

$$\rightarrow \ 3m+n=0 \qquad (\beta)$$

De (α) y (β) $m=-20$; $n=60$

$$\therefore \ \frac{m}{n}=-\frac{20}{60}=-\frac{1}{3}$$

Problema 10

Se sabe que el producto de multiplicar el MCD y MCM de dos polinomios en x es (x^5-x^3); además, la suma de dichos polinomios es (x^3+x^2-1). Halle el residuo de dividir el MCM de aquellos polinomios entre x^2+2.

Resolución

Sean los polinomios $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$

Por propiedad

$$P_{(x)}\cdot Q_{(x)}\equiv \text{MCD}(P;\,Q)\cdot \text{MCM}(P;\,Q)$$

$$\rightarrow \ P_{(x)}\cdot Q_{(x)}=x^5-x^3 \qquad (\text{I})$$

Dato: $P_{(x)}+Q_{(x)}=x^3+x^2-1$ (II)

De (I) y (II)

$$P_{(x)}\cdot Q_{(x)}=x^3(x^2-1)$$

$$P_{(x)}=x^3, \quad Q_{(x)}=x^2-1$$

Como $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ son primos,

entonces MCM (P; Q)$=x^3(x^2-1)$

Para hallar el resto de MCM, se divide

$$(P;\,Q)\div(x^2+2)$$

Por teorema del resto: $x^2+2=0 \ \rightarrow \ x^2=-2$

Reemplazando tenemos

$$R_{(x)}=-2x(-2-1)=6x$$

$$\therefore \ R_{(x)}=6x$$

Problema 11

¿Cuántos factores racionales irreductibles admite el cociente que se obtiene de dividir el MCM entre el MCD de los polinomios?

$$M_{(x;\,y)}=(xy+1)^4+(x^2y^2-1)^2+(xy-1)^4$$

$$N_{(x;\,y)}=(xy+1)^6-(xy-1)^6$$

Resolución

Hacemos un cambio de variable

$$xy+1=m \quad \wedge \quad xy-1=n$$

$$M_{(m;\,n)}=m^4+m^2n^2+n^4$$

$$=(m^2+mn+n^2)(m^2-mn+n^2)$$

$$N_{(m;\,n)}=m^6-n^6$$

$$=(m^2-n^2)(m^4+m^2n^2+n^4)$$

$$=(m+n)(m-n)(m^2+mn+n^2)(m^2-mn+n^2)$$

Luego

$$\text{MCD}(M;\,N)=m^4+m^2n^2+n^4$$

$$\text{MCM}(M;\,N)=(m^2-n^2)(m^4+m^2n^2+n^4)$$

De donde

$$\frac{\text{MCM}(M;N)}{\text{MCD}(M;N)}=m^2-n^2=(m+n)(m-n)$$

Reemplazando m y n se tiene:

$$\frac{\text{MCM}(x;y)}{\text{MCD}(x;y)}=(xy+1+xy-1)(xy+1-xy+1)$$
$$=4xy$$

Por lo tanto, tendrá dos factores primos.

Problema 12

¿Cuál será aquel polinomio que con $P_{(x)}=(x^2-9)^2(x+2)$ tenga como MCD x^2+5x+6, además $\sqrt{\text{MCM}}=x^4-13x^2+36$?

Resolución

Sea $Q_{(x)}$ el polinomio. Sabemos que

$$P_{(x)}\cdot Q_{(x)}\equiv \text{MCD}(P;Q)\cdot\text{MCM}(P;Q)$$

$$\rightarrow\ Q_{(x)}=\frac{\text{MCD}(P;Q)\cdot\text{MCM}(P;Q)}{P_{(x)}}$$

Por dato

$$Q_{(x)}=\frac{(x^2+5x+6)(x^4-13x^2+36)^2}{(x^2-9)^2(x+2)}$$

$$\rightarrow\ Q_{(x)}=\frac{(x+2)(x+3)(x^2-9)^2(x^2-4)^2}{(x^2-9)^2(x+2)}$$

$$\therefore\ Q_{(x)}=(x+3)(x^2-4)^2$$

Problema 13

Halle el valor numérico del MCD de los polinomios

$F_{(x)}=x^6+2x^5+x^4+x+1$;

$P_{(x)}=2x^4+7x^2+9x^2+7x+2$,

para $x=\sqrt{2}+1$.

Resolución

Factorizando los polinomios

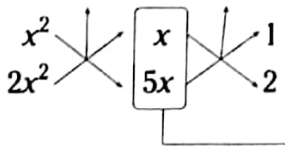
$$F_{(x)}=x^6+x^5+x^5+x^4+x+1$$
$$=x(x^5+x^4+1)+(x^5+x^4+1)$$
$$=(x^5+x^4+1)(x+1)$$

Pero

$$x^5+x^4+1\equiv(x^2+x+1)(x^3-x+1)$$
$$\rightarrow\ F_{(x)}=(x+1)(x^2+x+1)(x^3-x+1)$$

Análogamente factorizamos $P_{(x)}$

$$P_{(x)}=2x^4+7x^3+9x^2+7x+2$$



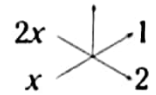
SDT: $9x^2$

ST: $4x^2$

Falta: $5x^2$

Entonces

$$P_{(x)}=(x^2+x+1)(2x^2+5x+2)$$



$$P_{(x)}=(2x+1)(x+2)(x^2+x+1)$$

De donde

$$\text{MCD}(F;P)=x^2+x+1$$

$$\rightarrow\ \text{MCD}(F;P)_{(\sqrt{2}+1)}=(\sqrt{2}+1)^2+\sqrt{2}+1+1$$
$$=3+2\sqrt{2}+\sqrt{2}+2$$
$$=5+3\sqrt{2}$$
$$\therefore\ \text{MCD}(F;P)_{(\sqrt{2}+1)}=5+3\sqrt{2}$$

Problema 14

Simplifique la expresión

$$F_{(x;y)}=\frac{x^3-2x+1}{x^2-2x+1}$$

e indique la suma de los términos lineales del numerador y del denominador.

Resolución

Factorizando numerador y denominador

$$N_{(x)}=x^3-2x+1 \quad \rightarrow \quad N_{(1)}=0$$

Por la regla de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ \hline 1 & \downarrow & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad N_{(x)}=(x-1)(x^2+x-1)$$

$$D_{(x)}=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

Luego

$$F_{(x)}=\frac{\cancel{(x-1)}\,(x^2+x-1)}{(x-1)^{\cancel{2}}}=\frac{x^2+x-1}{x-1}$$

Por lo tanto, la suma de los términos lineales del numerador y el denominador es $x+x=2x$.

Problema 15

Halle el valor numérico de

$$f_{(x)}=\frac{(x+1)^2(x^2-1)}{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}$$

cuando $x=\dfrac{\sqrt[3]{5}+1}{\sqrt[3]{5}-1}$.

Resolución

Previamente simplificando

$$x^4-4x^3+6x^2-4x+1\equiv(x-1)^4$$

$$\rightarrow \quad f_{(x)}=\frac{(x+1)^2(x+1)\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}}}=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^3}$$

$$f_{(x)}=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$$

Del dato

$$\frac{x}{1}=\frac{\sqrt[3]{5}+1}{\sqrt[3]{5}-1} \quad \rightarrow \quad \frac{x+1}{x-1}=\frac{\cancel{2}\sqrt[3]{5}}{\cancel{2}}=\sqrt[3]{5}$$

Luego

$$f_{\left(\frac{\sqrt[3]{5}+1}{\sqrt[3]{5}-1}\right)}=\left(\sqrt[3]{5}\right)^3=5$$

Problema 16

Simplifique la expresión

$$H_{(x)}=\frac{x^5+x^4+x^3-x+2}{x^5+x^3+x^2-2x+2}$$

y dé la suma del numerador y del denominador.

Resolución

Factorizando el numerador

$$x^5+x^4+x^3-x+2$$

$$\equiv \boxed{x^5+x^4+1}+x^3-x+1$$

$$\equiv(x^2+x+1)(x^3-x+1)+x^3-x+1$$

$$\equiv(x^3-x+1)(x^2+x+2)$$

Factorizando el denominador

$$x^5+x^3+x^2-2x+2\equiv x(x^4+x^2-2)+x^2+2$$

$$\begin{array}{cc} x^2 & 2 \\ x^2 & -1 \end{array}$$

$$\equiv x(x^2+2)(x^2-1)+x^2+2$$

$$\equiv(x^3-x+1)(x^2+2)$$

Reemplazando

$$H_{(x)}=\frac{(x^3-x+1)(x^2+x+2)}{(x^2+2)(x^3-x+1)}\equiv\frac{x^2+x+2}{x^2+2}$$

Sumando numerador y denominador se tiene

$$(x^2+x+2)+(x^2+2)\equiv 2x^2+x+4.$$

Problema 17

Simplifique la expresión

$$\left[\left(\frac{a^2-3ab+2b^2}{a+b-ab-b^2}\right)\left(\frac{a^2+3ab+2b^2}{a+ab-b-b^2}\right)\right]\div\frac{a^2-4b^2}{(1-b)^2}.$$

Resolución

Factorizando

$$\left[\left(\frac{(a-b)(a-2b)}{(a+b)-b(a+b)}\right)\left(\frac{(a+b)(a+2b)}{a(1+b)-b(1+b)}\right)\right]\div$$

$$\div\frac{(a+2b)(a-2b)}{(1-b)^2}$$

Luego

$$\left[\left(\frac{(a-b)(a-2b)(a+b)(a+2b)}{(a+b)(1-b)(1+b)(a-b)}\right)\div\frac{(a+2b)(a-2b)}{(1-b)^2}\right]$$

Simplificando

$$=\frac{\cancel{(a-2b)}\,\cancel{(a+2b)}}{\cancel{(1-b)}\,(1+b)}\cdot\frac{\cancel{(1-b)}^2}{\cancel{(a+2b)}\,\cancel{(a-2b)}}$$

$$=\frac{1-b}{1+b}$$

Problema 18

Si se sabe que

$$A=\left(\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}}\right)\left[\left(\frac{x^2+1}{2a^2+2b}\right)\div\frac{2x}{a^2+b}\right];$$

$$B=\frac{x-1}{(x+2)-\dfrac{x^2+2}{x-\dfrac{x-2}{x+1}}},$$

halle $A+B$.

Resolución

Efectuando

$$A=\left(\frac{\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{\cancel{(x-1)(x+1)}}}{\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2}{\cancel{(x-1)(x+1)}}}\right)\left[\frac{x^2+1}{2\cancel{(a^2+b)}}\div\frac{2x}{\cancel{a^2+b}}\right]$$

Usando las identidades de Legendre

$$\frac{4x}{2(x^2+1)}\cdot\frac{x^2+1}{2(2x)}=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ A=\frac{1}{2}$$

$$B=\frac{x-1}{x+2-\dfrac{x^2+2}{\boxed{x-\dfrac{x-2}{x+1}}}}\qquad(*)$$

De (*)

$$x-\frac{x-2}{x+1}=\frac{x^2+x-x+2}{x+1}=\frac{x^2+2}{x+1}$$

Luego

$$B=\frac{x-1}{x+2-\dfrac{x^2+2}{\dfrac{x^2+2}{x+1}}}=\frac{x-1}{x+2-x-1}=x-1$$

$$\therefore\ A+B=\frac{1}{2}+x-1=x-\frac{1}{2}$$

Problema 19

Reduzca la expresión

$$\frac{1-\dfrac{4xy}{4x^2+2xy+y^2}}{\dfrac{8x^3+y^3}{8x^3-y^3}\left(1-\dfrac{2y}{2x+y}\right)}$$

Resolución

Efectuamos operaciones en el numerador y denominador

$$\frac{\dfrac{4x^2+2xy+y^2-4xy}{4x^2+2xy+y^2}}{\dfrac{8x^3+y^3}{8x^3-y^3}\left(\dfrac{2x+y-2y}{2x+y}\right)}=\frac{\dfrac{4x^2-2xy+y^2}{4x^2+2xy+y^2}}{\dfrac{8x^3+y^3}{8x^3-y^3}\left(\dfrac{2x-y}{2x+y}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)}{(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)}}{\left(\dfrac{8x^3+y^3}{8x^3-y^3}\right)}=\frac{\dfrac{8x^3+y^3}{8x^3-y^3}}{\left(\dfrac{8x^3+y^3}{8x^3-y^3}\right)}=1$$

Problema 20

Reduzca la expresión

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-b)(x-a)}{(c-b)(c-a)}.$$

Resolución

Sumamos las fracciones y obtenemos

$$\frac{(b-c)(x-b)(x-c)+(c-a)(x-a)(x-c)+(a-b)(x-b)(x-a)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

Efectuando en el numerador

$$(b-c)\left[x^2-(b+c)x+bc\right]+(c-a)\left[x^2-(a+c)x+ac\right]+$$
$$+(a-b)\left[x^2-(a+b)x+ab\right]$$

Agrupando x^2, x e independientes

$$x^2(\cancel{b}-\cancel{c}+\cancel{c}-\cancel{a}+\cancel{a}-\cancel{b})-x\left[\cancel{(b-c)(b+c)}\right.$$
$$\left.+\cancel{(c-a)(a+c)}+\cancel{(a-b)(a+b)}\right]+bc(b-c)$$
$$+ac(c-a)+ab(a-b)$$

$$=-x\left[\cancel{b^2}-\cancel{c^2}+\cancel{c^2}-\cancel{a^2}+\cancel{a^2}-\cancel{b^2}\right]+bc(b-c)$$
$$+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2$$

$$=bc(b-c)-a(b^2-c^2)+a^2(b-c)$$

$$=(b-c)(bc-ab-ac+a^2)$$

$$=(b-c)(a-b)(a-c)$$

Reemplazando el numerador se tiene

$$\frac{(b-c)(a-b)\cancel{(a-c)}}{\cancel{(a-b)}(a-c)(b-c)}=1$$

Problema 21

Si la expresión

$$\frac{(a-3)x+(2a-5b+3)y+(5b-2)}{3x-5y+3}$$

adopta un valor constante para cualquier valor de x e y, halle el valor de la constante.

Resolución

Si es independiente de las variables se cumplirá

$$\frac{a-3}{3}=\frac{2a-5b+3}{-5}=\frac{5b-2}{3}=k$$

(1) (2)

De (1)

$$a-3=5b-2 \quad\rightarrow\quad a=5b+1 \qquad \text{(I)}$$

De (2)

$$3(2a-5b+3)=-5(5b-2)$$
$$6a-15b+9=-25b+10$$
$$10b+6a=1 \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$10b+6a=a-5b$$
$$\rightarrow\ 15b+5a=0$$
$$\therefore\ a=-3b$$

En (1)

$$-3b=5b+1 \quad\rightarrow\quad b=-\frac{1}{8}$$

Entonces

$$k=\frac{5\left(-\frac{1}{8}\right)-2}{3}=\frac{\frac{-21}{8}}{3}$$

$$\therefore\ k=-\frac{7}{8}$$

Problema 22

De la equivalencia

$$\frac{5x+7}{x^2+5x+4}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+4},$$

¿cuál es el valor de $A-B$?

Resolución

$$\frac{5x+7}{\cancel{x^2+5x+4}} \equiv \frac{A\cdot(x+4)+B\cdot(x+1)}{\cancel{(x+1)(x+4)}}$$

$$5x+7=Ax+4A+Bx+B$$

$$5x+7=(A+B)x+(4A+B)$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=5 \\ 4A+B=7 \end{array}\right\} (-)$$

$$3A=2 \rightarrow A=\frac{2}{3}$$

$$B=5-\frac{2}{3}=\frac{13}{3}$$

$$\therefore\ A-B=\frac{2}{3}-\frac{13}{3}=-\frac{11}{3}$$

Problema 23

Si $\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-4x+4}=A+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{(x-2)^2}$,

¿cuál es el valor de $A+B-C$?

Resolución

$$\frac{x^2+3x+1}{x^2-4x+4}=\frac{x^2+3x+1}{(x-2)^2}$$

Haciendo un cambio de variable

$$x-2=t \rightarrow x=t+2$$

Luego

$$\frac{(t+2)^2+3(t+2)+1}{t^2}=\frac{t^2+4t+4+3t+6+1}{t^2}$$

$$=\frac{t^2+7t+11}{t^2}=1+\frac{7}{t}+\frac{11}{t^2}$$

Reponiendo t por $x-2$ se tiene

$$=1+\frac{7}{x-2}+\frac{11}{(x-2)^2} \rightarrow A=1;\ B=7;\ C=11$$

$$\therefore\ A+B-C=-3$$

Problema 24

La fracción $\dfrac{7x-1}{1-5x+6x^2}$ se obtuvo sumando las fracciones $\dfrac{A}{1-3x}$, $\dfrac{B}{1-2x}$.

Calcule los valores de A y B, respectivamente.

Resolución

$$\frac{7x-1}{1-5x+6x^2}=\frac{A}{1-3x}+\frac{B}{1-2x}$$

$$=\frac{A(1-2x)+B(1-3x)}{(1-3x)(1-2x)}$$

Entonces

$$7x-1\equiv A(1-2x)+B(1-3x)$$

$$7x-1\equiv(-2A-3B)x+A+B$$

De donde

$$2A+3B=-7 \qquad \text{(I)}$$

$$A+B=-1 \qquad \text{(II)}$$

De (I)-2(II): $B=-5$

En (II)

$$A-5=-1 \rightarrow A=4$$

$$\therefore\ A=4 \text{ y } B=-5$$

Problema 25

Descomponga en fracciones parciales $\dfrac{9}{(x-1)(x+2)^2}$.

Resolución

La fracción será posible escribir como

$$\frac{9}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

Buscando A, B, C

$$\frac{9}{(x-1)(x+2)^2} \equiv \frac{A(x+2)^2+B(x+2)(x-1)+C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}$$

$$9 \equiv x^2(A+B)+x(4A+B+C)+4A-2B-C$$

de donde

$A+B=0$ (I)

$4A+B+C=0$ (II)

$4A-2B-C=9$ (III)

De

(II)+(III): $8A-B=9$ (IV)

(IV)+(I): $9A=9 \rightarrow A=1$

En (IV) $8-B=9 \rightarrow B=-1$

En (II) $4-1+C=0 \rightarrow C=-3$

Luego

$$\frac{9}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}$$

Problema 26

Descomponga en fracciones parciales

$$\frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}.$$

Resolución

La fracción se descompondrá así

$$\frac{2x^3+x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$2x^3+x^2+2x-1 \equiv A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)(x-1)$$

Por identidad

Si $x=1 \rightarrow 2+1+2-1=A(2)(2)+0+0$

$\rightarrow A=1$

Si $x=-1 \rightarrow -2+1-2-1=0+B(-2)(2)+0$

$\rightarrow B=1$

Si $x^2=-1 \rightarrow 2x(-1)-1+2x-1$

$=0+0+(Cx+D)((-1)-1)-2=-2cx-2d$

Luego $c=0, d=1$

$$\therefore \frac{2x^3+x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

Problema 27

Descomponga en fracciones parciales

$$f_{(x)} = \frac{10x^4-4x^3+15x^2-24x-46}{10x^3-4x^2+25x-10}.$$

Resolución

Como la fracción es impropia, descomponiendo se tendrá

$$\frac{10x^4-4x^3+25x^2-10x}{10x^3-4x^2+25x-10} - \frac{10x^2+14x+46}{10x^3-4x^2+25x-10}$$

$$= x - \underbrace{\boxed{\frac{10x^2+14x+46}{10x^3-4x^2+25x-10}}}_{\text{fracción propia}}.$$

Pero

$$10x^3-4x^2+25x-10 \equiv (2x^2+5)(5x-2)$$

$$\rightarrow \frac{10x^2+14x+46}{10x^3-4x^2+325x-10} = \frac{A}{5x-2} + \frac{Bx+C}{2x^2+5}$$

Luego

$$10x^2+14x+46 \equiv A(2x^2+5)+(5x-2)(Bx+C)$$

$$\equiv (2A+5B)x^2+(5C-2B)x+5A-2C$$

Por lo tanto

$2A+5B=10$

$5C-2B=14$

$5A-2C=46$

De donde

$$A=10;\ B=-2;\ C=2$$

$$\rightarrow\ \frac{10x^2+14x+46}{10x^3-4x^2+25x-10}\equiv\frac{10}{5x-2}+\frac{-2x+2}{2x^2+5}$$

$$\therefore\ f_{(x)}=x-\frac{10}{5x-2}+\frac{2x-2}{2x^2+5}$$

Problema 28

Descomponga en fracciones parciales

$$g_{(x)}=\frac{x^3+2x-1}{(x-1)(x^2+2x+2)}.$$

Resolución

Por ser una fracción impropia se tendrá

$$\frac{x^3+2x-1}{x^3+x^2-2}=\frac{x^3+x^2-2}{x^3+x^2-2}-\frac{x^2-2x-1}{x^3+x^2-2}$$

$$=1-\frac{x^2-2x-1}{x^3+x^2-2}$$

Luego

$$\frac{x^2-2x-1}{x^3+x^2-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

De donde

$$x^2-2x-1\equiv A(x^2+2x+2)+(x-1)(Bx+C)$$

$$\rightarrow\ x^2-2x-1\equiv(A+B)x^2+(2A+C-B)x+2A-C$$

Por lo tanto

$$A+B=1$$
$$2A+C-B=-2$$
$$2A-C=-1$$

Entonces

$$A=-\frac{2}{5},\ B=\frac{7}{5},\ C=\frac{1}{5}$$

Además

$$\frac{x^3+2x-1}{(x-1)(x^2+2x+2)}=1-\left\{\frac{-\frac{2}{5}}{x-1}+\frac{\frac{7}{5}x+\frac{1}{5}}{x^2+2x+2}\right\}$$

$$\therefore\ g_{(x)}=1+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{x-1}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{7x+1}{x^2+2x+2}\right)$$

Problema 29

Simplifique la fracción

$$f_{(x)}=\frac{\left(\frac{x+2a}{x+a}\right)^2-\left(\frac{x+2a}{x+a}\right)-2}{\frac{x+2a}{x+a}-2};\quad x\neq -a.$$

Resolución

Haciendo

$$\frac{x+2a}{x+a}=y$$

se tendrá

$$\frac{y^2-y-2}{y-2}=\frac{(y-2)(y+1)}{(y-2)}=y+1.$$

Reponiendo y

$$f_{(x)}=\frac{x+2a}{x+a}+1=\frac{x+2a+x+a}{x+a}=\frac{2x+3a}{x+a}$$

Problema 30

Simplifique la expresión

$$f_{(x;y)}=\frac{\frac{x^2}{y^4}-\frac{y^2}{x^4}}{\frac{(x^2+y^2)^2-x^2y^2}{x^2y^2}};\quad xy\neq 0.$$

Resolución

Efectuando

$$\frac{\dfrac{x^6-y^6}{x^4y^4}}{\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2y^2}}=\frac{(x^6-y^6)x^2y^2}{x^4y^4(x^4+x^2y^2+y^4)}$$

$$=\frac{(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)x^2y^2}{(x^2y^2)^2(x^4+x^2y^2+y^4)}=\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$$

$$\therefore\ f_{(x,y)}=\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$$

Problema 31

Simplifique y exprese en fracciones parciales

$$f_{(x)}=\frac{(x-1)^2(2x+3)-(x^2-3x+2)(x-1)}{(x-1)^4};\ xy\neq 0.$$

Resolución

Efectuando

$$f_{(x)}=\frac{(x-1)^2(2x+3)-(x-1)^2(x-2)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{x+5}{(x-1)^2}=\frac{x-1}{(x-1)^2}+\frac{6}{(x-1)^2}$$

$$\therefore\ f_{(x)}=\frac{1}{x-1}+\frac{6}{(x-1)^2}$$

Problema 32

Luego de simplificar

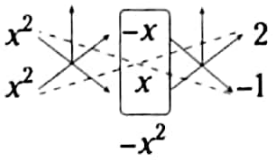
$$f_{(x)}=\frac{2x^5+x^4+7x^2-3}{x^4+3x-2},$$

halle la suma de los términos lineales del numerador y del denominador.

Resolución

Factorizando el denominador

$$x^4+3x-2\equiv x^4+0x^3-0x^2+3x-2$$



$$=(x^2-x+2)(x^2+x-1)$$

Factorizando el numerador

$$2x^5+x^4+7x^2-3=(x^2+x-1)(2x^3-x^2+3x+3)$$

Luego

$$f_{(x)}=\frac{\cancel{(x^2+x-1)}(2x^3-x^2+3x+3)}{(x^2-x+2)\cancel{(x^2+x-1)}}$$

$$=\frac{2x^3-x^2+3x+3}{x^2-x+2}$$

Por lo tanto, la suma de términos lineales $3x-x=2x$.

Problema 33

Simplifique la fracción

$$\frac{x^3-nx^2+19x^2-n-4}{x^3-(n+1)x^2+23x-n-7}$$

sabiendo que es reductible y dé como respuesta la suma del numerador y denominador.

Resolución

Se deben factorizar el numerador y el denominador por divisores binómicos; los posibles ceros racionales son los divisores de $n+4 \wedge n+7$.

Así, si x toma el valor de 1 se tiene

N: $1-n+19-n-4=0 \quad\rightarrow\quad n=8$

D: $1-n-1+23-n-7=0 \quad\rightarrow\quad n=8$

Luego

numerador

	1	−8	19	−12
$x=1$	↓	−1	7	12
	1	−7	12	0
	x			−3
	x			−4

denominador

	1	−9	23	−15
$x=1$	↓	1	−8	15
	1	−8	15	0
	x			−3
	x			−4

Luego la fracción es

$$\frac{\cancel{(x-1)(x-3)}\,(x-4)}{\cancel{(x-1)(x-3)}\,(x-5)}=\frac{x-4}{x-5}$$

Sumando numerador y denominador se tendrá

$$(x-4)+(x-5)=2x-9$$

Problema 34

Halle el equivalente reducido de S.

$$S=\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{x^2(2k-1)x+k^2-k}.$$

Resolución

La expresión es equivalente a

$$S=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{(x+k-1)(x+k)}$$

$$=\frac{1}{x}-\cancel{\frac{1}{x+1}}+\cancel{\frac{1}{x+1}}-\cancel{\frac{1}{x+2}}+\cancel{\frac{1}{x+2}}-\cancel{\frac{1}{x+3}}+\ldots$$

$$\ldots+\cancel{\frac{1}{x+k-1}}-\frac{1}{x+k}$$

$$\rightarrow\ S=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+k}=\frac{(x+k)-x}{x(x+k)}=\frac{k}{x(x+k)}$$

$$\therefore\ S=\frac{k}{x(x+k)}$$

Problema 35

¿Qué valor toma $\frac{n^2}{mq}$ para que $f_{(x)}=\frac{mx^2+q}{nx-q}$ sea igual a la unidad? Además, x toma un solo valor.

Resolución

Como $f_{(x)}=1\ \rightarrow\ mx^2+q=nx-q$

$\rightarrow\ mx^2-nx+2q=0$

Si x adopta un solo valor, $mx^2-nx+2q$ es un trinomio cuadrado perfecto

$\rightarrow\ n^2-4m(2q)=0$

$$\therefore\ \frac{n^2}{mq}=8$$

Problema 36

Sean los polinomios

$P_{(x)}=(x+3)\left(x^2+(a-2)x-2a\right)$;

$Q_{(x)}=(x-2)\left(x^2+(b+3)x+3b\right)$,

donde el término independiente del MCM de estos es 120. Además, el coeficiente del término cúbico de efectuar $P_{(x)}\cdot Q_{(x)}\div(\text{MCD})$ es 2.

Calcule el valor de $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Resolución

Vemos que

$P_{(x)}=(x+3)(x+a)(x-2)$;

$Q_{(x)}=(x-2)(x+3)(x+b)$

I. Si $a=b \rightarrow \text{MCM}=(x+3)(x-2)(x+a)$

II. Si $a\neq b \rightarrow \text{MCM}=(x+3)(x-2)(x+a)(x+b)$

Del dato, el término cúbico del MCM=2 hace que (I) sea imposible

$\rightarrow \text{MCM}=(x+3)(x-2)(x+a)(x+b)$

a. Como el término independiente del MCM es conocido, entonces $3(-2)(a)(b)=120$

$\rightarrow ab=-20$ (α)

b. Término cúbico

$(3-2+a+b)x^3=(a+b+1)x^3$

$\rightarrow a+b+1=2 \rightarrow a+b=1$ (β)

De (α) y (β)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=-\frac{1}{20}$$

$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{20}$$

Problema 37

Dados los polinomios

$A_{(x)}=x^3-2x^2+ax+b$; $B_{(x)}=x^3+mx^2+px+q$,

halle el producto de los factores no comunes, siendo

$\text{MCM}(A;B)=a_0x^n+\ldots-24$

$\text{MCD}(A;B)=(x-1)(x+3)$

Resolución

Del MCD

$A_{(x)}=(x-1)(x+3)(x+r)$

$B_{(x)}=(x-1)(x+3)(x+s)$

En A: $-1+3+r=-2 \rightarrow r=-4$

$\rightarrow A_{(x)}=(x-1)(x+3)(x-4)$

$B_{(x)}=(x-1)(x+3)(x+s)$

Además

$\text{MCM}(A;B)=(x-1)(x+3)(x-4)(x+s)$

Por dato: $(-1)(+3)(-4)\cdot s=-24$

$\rightarrow s=-2$

Luego, los factores no comunes son

$x-4 \wedge x-2$,

cuyo producto es x^2-6x+8.

Test 8

1. ¿Cuál es el MCD de los polinomios?

$P_{(x)}=x^3-3x^2+3x-1$

$Q_{(x)}=x^3-x^2-x+1$

A) $x-1$ B) $x+1$ C) $(x-1)^2$
D) x^2-1 E) 1

2. ¿Cuál es el MCM de los polinomios?

$T_{(x)}=x^3+3x^2+3x+1$

$U_{(x)}=x^3+x^2-x-1$

A) $(x+1)^3$
B) $(x+1)^2(x-1)$
C) $(x+1)^2(x-1)^2$
D) $(x+1)^3(x-1)$
E) $(x+1)^3(x-1)^2$

3. Si $x-1$ es el MCD de los polinomios

$A_{(x)}=x^3-2x+a$;

$B_{(x)}=x^3+2x+b$,

¿cuál es el término lineal del MCM?

A) $5x$ B) $-5x$ C) $3x$
D) $-3x$ E) $2x$

4. Sean A y B dos polinomios cúbicos mónicos tales que

I. $A_{(0)}$ es negativo

II. $\text{MCD}(A;B)=(x^2-1)$

III. $\text{MCM}(A;B)=x^4-10x^2+9$

¿Cuál es el factor primo mónico de mayor suma de coeficientes de $A_{(x)}+B_{(x)}$?

A) $x+1$ B) $x-1$ C) x^2+1
D) $x+2$ E) $x+3$

5. Sea f una expresión tal que

$$f_{(x)}=\frac{2x+1}{x-2};\quad x\neq 2,$$

halle $f_{(f(x))}$

A) $2x$ B) $\frac{x}{2}$ C) x
D) $\frac{x+1}{x-1}$ E) $-x$

6. Sea $P_{(x)}=\frac{1}{x(x+1)}$. Simplifique

$$P_{(n-2)}+P_{(n-1)}+P_{(n)}+P_{(n+1)}+P_{(n+2)}+\frac{1}{n+3}.$$

A) $\frac{1}{n}$ B) $\frac{1}{n-1}$ C) $\frac{n}{n-2}$
D) $\frac{n}{n-1}$ E) $\frac{1}{n-2}$

7. ¿Cuál es el equivalente reducido de la expresión?

$$\frac{x+1}{x+1-\frac{1}{x-1}}-\frac{x-1}{x-1-\frac{1}{x+1}}$$

A) 0 B) $\frac{1}{x^2-1}$ C) $\frac{x+1}{x-1}$
D) $\frac{x-1}{x+1}$ E) $\frac{2}{x^2-1}$

8. Se sabe que la fracción

$$f_{(x;y)}=\frac{ax^2+3xy-by^2}{4x^2+cxy+5y^2}$$

es independiente de las variables.
¿Cuál es el valor de $c(a+b)$?

A) 27 B) -27 C) 3
D) -3 E) 4

9. Si $\dfrac{5x+1}{x^2-3x-4}$ es equivalente a $\dfrac{A}{x-4}+\dfrac{B}{x+1}$,

¿cuál es el valor de $A-5B$?

A) 15 B) 5 C) 1/5
D) −1/5 E) 41/5

10. Dada la expresión $A=\dfrac{x^3+3x}{3x^2+1}$,

¿cuál es el equivalente de $\sqrt[3]{\dfrac{A+1}{A-1}}$?

A) $\dfrac{x+1}{x-1}$ B) $\dfrac{x-1}{x+1}$ C) x
D) $3x$ E) $\dfrac{x}{3}$

11. Al descomponer $\dfrac{x^2+3x-1}{(x-1)^3}$

como una suma de fracciones parciales, se encontró que uno de los sumandos es

A) $\dfrac{2}{(x-1)^2}$ B) $\dfrac{3}{(x-1)^2}$ C) $\dfrac{5}{(x-1)^3}$
D) $\dfrac{7}{(x-1)^2}$ E) $\dfrac{3}{(x-1)^3}$

12. Se sabe que $f_{(x)}=\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{x+\dfrac{1}{x+1}}$.

$\dfrac{1}{x^3-1}-\dfrac{1}{x^2+1}$

¿Cuál es el valor reducido de $f_{(\sqrt{2})}+f_{(\sqrt{3})}+3$?

A) 8 B) 16 C) 38
D) 10 E) 3

CLAVES

1 C	3 B	5 C	7 A	9 C	11 E
2 D	4 A	6 E	8 D	10 A	12 D

Problemas PROPUESTOS

Nivel I

1. Halle el MCD de los polinomios.
$P_{(x;y)}=(x-y)^2(x+y)(x^2-x+y)$
$Q_{(x;y)}=(x^2-y^2)^2(x^2+x-y)$

A) $(x-y)^2(x+y)$ B) $(x^2-y^2)^2$
C) $(x+y)(x-y)$
D) $(x-y)(x+y)^2$ E) $x-y$

2. Halle el MCM de los polinomios.
$A_{(x)}=3(x-1)^3(x+3)(x+1)$
$B_{(x)}=(x+1)^3(x-3)(x-1)$

A) $(x-1)(x+3)(x-3)$
B) $3(x-1/3)(x+1)(x^2-9)$
C) $x-1$
D) $3(x-1)^3(x+1)^3(x+3)(x-3)$
E) $3(x-1)(x+1)$

3. Halle el MCD de P, Q y R si se sabe que
$P_{(x)}=x^3-2x-1$;
$Q_{(x)}=x^2-1$;
$R_{(x)}=x^4-1$.

A) $x-1$ B) $x+1$ C) x^2-1
D) x^2+1 E) 1

4. Sean dos polinomios P y Q tales que
- $P_{(x)}\cdot Q_{(x)}=(x^2-1)(x-1)^2(x+1)x$
- MCD$(P;Q)=(x-1)(x+1)$

Halle el MCM$(P;Q)$.

A) $(x-1)(x+1)$
B) $(x^2-1)x$
C) $(x^2-1)^2x$
D) $(x-1)^2(x+1)x$
E) $(x+1)^2(x-1)x$

5. Dados los polinomios $R_{(x)}$ y $S_{(x)}$ tales que
I. $\dfrac{R_{(x)}}{S_{(x)}}=2x-1$
II. MCD$(R;S)\cdot$MCM$(R;S)=$
$=(3x-1)^2(2x-1)(2x+1)^2x^2$,
halle el término cuadrático de $S_{(x)}$.

A) $3x^2$ B) $-2x^2$ C) $-x^2$
D) $2x^2$ E) x^2

6. Si $x+1$ es el MCD de los polinomios
$P_{(x)}=x^3-3x+a$;
$Q_{(x)}=x^2-bx+1$,
¿cuál es el valor de $2a+3b$?

A) -5 B) 5 C) -10
D) -15 E) 15

7. Si x^4+2x^2-c es el MCM de $T_{(x)}$ y $U_{(x)}$ tal que
$T_{(x)}=x^3+ax^2+bx+3$; $U_{(x)}=x-1$,
calcule el valor de $a-b+c$.

A) 1 B) -1 C) 3
D) -3 E) 2

8. ¿Cuál es el resultado de simplificar la expresión

$$\frac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-1}?$$

A) $-x$ B) x C) $\dfrac{x+1}{x-1}$
D) $\dfrac{x-1}{x+1}$ E) 1

9. Indique el resultado de simplificar

$$\frac{\dfrac{x^2-x+1}{x-1}-x}{\dfrac{x^2+x+1}{x+1}-x}+\frac{2x-4}{x-1}.$$

A) $\dfrac{x+2}{x-1}$ B) 3 C) $\dfrac{3x-2}{x-1}$

D) $\dfrac{3x+2}{x-1}$ E) 1

10. ¿Cuál es el valor de la fracción

$f_{(x)}=\dfrac{x^2+3x+1}{(x+1)^2}$, cuando $x+\dfrac{1}{x}=1$?

A) $\dfrac{3}{4}$ B) $\dfrac{4}{5}$ C) $\dfrac{3}{5}$

D) $\dfrac{4}{3}$ E) $\dfrac{5}{4}$

11. Indique el término lineal del numerador luego de efectuar

$$\frac{x+1}{x+\dfrac{x}{x-1}}+\frac{2x}{x-\dfrac{x}{x+1}}.$$

A) $3x$ B) x C) $2x$

D) $-2x$ E) $-x$

12. Si el valor de la fracción

$f_{(x)}=\dfrac{2x^2-mx+1}{ax^2+5x+b}$ es independiente de x,

¿cuál es el valor de $\dfrac{a}{b}+bm$?

A) 3 B) -3 C) 2

D) -7 E) 7

13. ¿Cuál es el valor aproximado de m en

$$m=\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{\vdots}}}};\ m>0?$$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

14. Si la fracción $\dfrac{2x^3+x^2+2nx+m}{2x^2-3x+4}$

es equivalente a $x+2+\dfrac{1}{2x^2-3x+4}$,

¿cuál es el valor de $4n-m$?

A) -13 B) 13 C) 6

D) -5 E) -6

15. Si la fracción $\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$ se escribe como

$\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}$,

¿cuál es el valor de $A+3B$?

A) 0 B) 4 C) -5

D) -2 E) 3

16. Señale una de las fracciones parciales de

$$\frac{3x+1}{(x+1)(x-1)^2}.$$

A) $\dfrac{-1}{x+1}$ B) $\dfrac{1}{x-1}$ C) $\dfrac{2}{(x-1)^2}$

D) $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ E) $\dfrac{-1}{(x-1)^2}$

17. Halle la expresión simplificada de

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}-\frac{4}{1-x^4}.$$

A) $\frac{1}{x+1}$ B) $\frac{1}{x-1}$ C) $\frac{1}{1-x}$

D) $\frac{2}{1-x}$ E) $\frac{2}{x-1}$

18. De la fracción

$$f_{(x)}=\frac{x^2+ax+2}{x^2-bx+3},$$

al ser evaluada en $x=-1$ se obtuvo la forma $\frac{0}{0}$. Si $f_{1(x)}$ es el resultado de eliminar el factor que lleva a la forma $\frac{0}{0}$, ¿cuál es el valor de $f_{1(1)}$?

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{5}{3}$

D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{2}$

19. Al descomponer $\frac{x+1}{(x-1)^3}$ en una suma de fracciones parciales se encontró que uno de sus sumandos es $\frac{A_2}{(x-1)^2}$. ¿Cuál es el valor de A_2?

A) 1 B) −1 C) 2
D) −2 E) 3

20. La fracción algebraica

$\frac{3x+2}{(x-1)x(x+1)}$ puede ser escrita como una suma de fracciones parciales.

Calcule la suma de sus numeradores.

A) 3 B) 2 C) 0

D) $\frac{3}{2}$ E) 4

Nivel II

21. Halle el MCD de los siguientes polinomios:

$P_{(x)}=2x^4-x^3-3x^2+3x-9;$

$Q_{(x)}=10x^3-9x^2+17x-6.$

Dé como respuesta la suma de los coeficientes.

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

22. Determine el número de factores primos del MCM de los polinomios

$P_{(x)}=x^5-x^3+x^2-1 \wedge Q_{(x)}=x^6-1.$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

23. Determine el grado del MCM de los polinomios.

$A_{(x)}=x^2-15x+36$

$B_{(x)}=x^2-9$

$C_{(x)}=x^3+6x^2-63x+108$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

24. Calcule la suma de los coeficientes del MCD de los polinomios.

$P_{(x)}=x^3+x^2+x+1 \wedge Q_{(x)}=x^3+3x^2+5x+3$

A) 0 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

25. Si el MCD de los polinomios

$M_{(x;y)}=48x^{n-2}y^{m+1}z^n;$

$N_{(x;y)}=36x^ny^m;$

$P_{(x;y)}=72x^{n-1}y^{m-1}$

es $12x^2y^3$, calcule el valor de m^2-n^2.

A) 0 B) 2 C) 3
D) −4 E) 5

26. Si los polinomios

$P_{(x)}=6x^4+4x^3+5x^2+mx+n;$

$R_{(x)}=2mx^3+2nx^2+px-q$

admiten como MCD a $2x^2+2x+1$, halle un divisor de $R_{(x)}$.

A) x^2+2x-1 B) $x-3$ C) $2x^2+x+1$
D) $3x-1$ E) $2x+1$

27. Halle el MCD de los polinomios.

$P_{(x,y)}=x^4+xy^3+x^3y+y^4$

$Q_{(x,y)}=3x^3+5x^2y+xy^2-y^3$

$R_{(x,y)}=x^4+3x^3y+3x^2y^2+xy^3$

A) $x+y$ B) $x-y$ C) x^2-y^2
D) $(x+y)^2$ E) $(x-y)^2$

28. Si el cociente del MCM y MCD de dos polinomios en variable x es $(x^2+1)^2-4x^2$; además, el producto de ellos es $(x^6+1)^2-4x^6$, entonces el MCD es

A) $(x-1)(x^3+1)$
B) $(x+1)(x^2+x+1)$
C) $(x^2-1)(x^2+x+1)$
D) $(x+1)(x^3-1)$
E) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

29. Simplifique la expresión E.

$$E=\frac{16a^4+28a^2+16a+36}{8a^2+12a+18}+\frac{4a^3-8a^2-26a-18}{4a^2+6a+9}+2a$$

A) 0 B) 1 C) $2a+\frac{7}{2}$
D) $2a^2$ E) $\frac{1}{2}$

30. A partir de las igualdades

$$\frac{2xy}{x-y}=\frac{y(x-y)+n}{x-y}=\frac{x-y}{2},$$

determine el equivalente de $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$.

A) n^2-1 B) $\frac{2n-1}{2n+1}$ C) $2\left(\frac{1+n}{1-n}\right)$
D) 6 E) -2

31. Simplifique la siguiente fracción.

$$F=\frac{2(n+1)\{8(n+2)^3-[(2n+4)^3-1]+1\}+4n+8}{[(2n+3)^3+1]^2-[(2n+3)^3-1]^2}$$

A) $2n$ B) $2n+3$ C) $3n$
D) $(2n+3)^{-2}$ E) 1

32. Si la fracción admite simplificación

$$\frac{mx^3-(m+7)x^2+(m+8)x-(m+1)}{mx^3-(m+9)x^2+(m+16)x-(m+7)},$$

¿cuál es el denominador que se obtiene al efectuar dicha simplificación?

A) $2x+1$ B) $2x-1$ C) $2x+3$
D) $2x-3$ E) $2x+5$

33. Halle la expresión más simple de la fracción.

$$f_{(x)}=\frac{x^n+2x^{n-1}+3x^{n-2}+\ldots+(n-2)x^3+(n-1)x^2+nx+n+1}{x^{n+2}-(n+2)x+n+1}$$

Considere $x\neq 1 \wedge n\in \mathbf{N}$

A) $(x+1)^{-2}$
B) $(x-1)^{-2}$
C) $(x-n)^{-2}$
D) $(x+n)^{-2}$
E) $(x+n+1)^{-2}$

34. ¿Qué se obtiene al reducir la expresión?

$$f_{(x)}=\left(\frac{x+1}{x+1-\dfrac{1}{x-1+\dfrac{1}{x+1}}}-\frac{x-1}{x-1+\dfrac{1}{x+1+\dfrac{1}{x-1}}}\right)\div\frac{2}{x^2-\dfrac{1}{x^2}}$$

A) 1 B) x^2+x+1 C) x^2-x+1
D) x^4+x^2+1 E) x^4-x^2+1

35. Sabiendo que la fracción

$$f_{(x;y)}=\frac{(ax+by)^2}{p^2x^2+2m^2xy+m^2y^2}\ ;\ xy\neq 0$$

toma un valor constante k no nulo, halle el equivalente de $\dfrac{a^2+b^2+p^2+m^2}{a^2+b^2-p^2-m^2}$ en términos de k.

A) $\dfrac{k+1}{k-1}$ B) $\dfrac{k^2+1}{k^2-1}$ C) $k+1$
D) $k-1$ E) k^2-1

36. Si la fracción algebraica

$$f_{(x)}=\frac{4x^2-2x+3}{2x^2-x-1}$$

se transforma en otra equivalente a

$$A+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{2x+1},$$

con A; B; C constantes reales, calcule el valor de $\left(\dfrac{A}{3}+B+C\right)$.

A) -1 B) 1 C) 3
D) $\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{5}{3}$

37. Simplifique la expresión

$$f_{(x)}=\frac{ax(ax+1)(ax+2)(ax+3)+1}{(1+ax)(1+2ax)(1+3ax)+a^4x^4}.$$

A) $\dfrac{ax+1}{ax+2}$ B) $\dfrac{a+x}{a+2x}$ C) $\dfrac{x+a}{x+2a}$
D) 1 E) $\dfrac{a}{x}$

38. Reduzca la expresión

$$f_{(x)}=\frac{(x+4)^2-4}{(2x+2)^2-x^2}+\frac{4-25x^2}{x^2-(4x+2)^2}.$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

39. Efectúe

$$\frac{x+a+2}{2a}+\frac{x-a+2}{a(a-2)}+\frac{x+a-2}{2(2-a)}.$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

40. Reduzca la expresión

$$f_{(a)}=\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}-\frac{8}{1-a^8}.$$

A) $\dfrac{1}{a-1}$ B) $\dfrac{1}{a+1}$ C) 1
D) $\dfrac{1}{a^2-1}$ E) $\dfrac{1}{a^2+1}$

41. Efectúe

$$\frac{\left(\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x}+1\right)\left(\dfrac{x}{x^3-8}\right)}{\dfrac{1}{x^2-2x}}.$$

A) $1+x$ B) $1-x$ C) 1
D) $1+x^2$ E) $1-x^2$

42. Reduzca la expresión

$$\frac{x^4-\frac{z^2}{y}}{x-\frac{1}{yz}}+\frac{y^4-\frac{x^2}{z}}{y-\frac{1}{xz}}+\frac{z^4-\frac{y^2}{x}}{z-\frac{1}{xy}}.$$

A) $x^3+y^3+z^3$ B) $(x+y+z)^3$ C) xyz

D) $\dfrac{x^4+y^4+z^4}{x+y+z}$ E) 0

43. Si se verifica que

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=\frac{a+b+c}{n},$$

halle el equivalente de M.

$$M=\frac{ab+a+n}{b+1}+\frac{bc+b+n}{c+1}+\frac{ac+c+n}{a+1}$$

A) n B) $2n$ C) $3n$

D) $\dfrac{n}{3}$ E) $6n$

44. Simplifique cada una de las fracciones.

I. $f_{(x;y)}=\dfrac{\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^3-1}{\dfrac{x-y}{x+y}-1}$; $x+y\neq 0 \wedge y\neq 0$

II. $f_{(x)}=\dfrac{x^2-1-\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{x^2-1}-\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{-1}}$; $x\notin\{0;1;-1\} \wedge x^2-x\neq 1$

III. $f_{(x)}=\dfrac{\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x-a}{x+a}}{\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}+\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}}$; $x\neq a;-a$

IV. $f_{(x;y)}=\dfrac{\dfrac{x}{x^2-4y^2}+\dfrac{x-2y}{x}}{\dfrac{x^2-4y^2}{x}+\dfrac{x}{x-2y}}$; $x\neq 0;2y;-2y$

V. $f_{(x)}=\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x+\dfrac{1}{x+1}}{x^3-1}-\dfrac{1}{x^2+1}}$; $x\neq 1;-1$

VI. $f_{(x)}=\dfrac{x+1}{x+\dfrac{x}{x-1}}+\dfrac{2x}{x-\dfrac{x}{x+1}}$; $x\neq 0;1;-1$

45. Exprese las siguientes fracciones en la suma de fracciones parciales.

I. $f_{(x)}=\dfrac{x^2-x}{(x+1)(x^2+1)}$

II. $f_{(x)}=\dfrac{3(x^2+x)}{(x-2)(x+1)^2}$

III. $f_{(x)}=\dfrac{1}{x^3+4x}$

IV. $f_{(x)}=\dfrac{x^4+1}{x^3+8}$

V. $f_{(x)}=\dfrac{4x-2}{x^3-x^2-2x}$

VI. $f_{(x)}=\dfrac{6x^2+12}{x^3+4x^2+3x}$

VII. $f_{(x)}=\dfrac{5x^2-3}{x^3-x}$

VIII. $f_{(x)}=\dfrac{3}{4x^3+8x^2+3x}$

IX. $f_{(x)}=\dfrac{5x^3+2x^2+1}{4x^3-x}$

46. Sabiendo que A, B, C y D son los numeradores de las fracciones parciales en que puede ser descompuesta la siguiente fracción

$$\frac{4x^3-x^2-3x-2}{x^2(x+1)^2},$$

calcule el valor de $A+B+C+D$.

A) 2 B) −2 C) 1
D) −1 E) 0

47. Si se cumple que

$$a=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2};\quad b=\frac{y^2-z^2}{y^2+z^2};\quad c=\frac{z^2-x^2}{z^2+x^2},$$

además

$$\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^4+z^4}{(y^2+z^2)^2}+\frac{x^4+z^4}{(x^2+z^2)^2}=4,$$

calcule el valor de $a^2+b^2+c^2$.

A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 12

48. Luego de descomponer la expresión

$$f_{(x)}=\frac{5}{(x+1)^5-x^5-1}$$

en fracciones parciales, indique la suma de sus numeradores.

A) 3 B) 2 C) 1
D) 0 E) −1

49. Sea $D_{(x)}$ el MCM de los polinomios

$M_{(x)}=x^4-nx^3-7n^2x^2+n^3x+6n^4$;

$L_{(x)}=x^3+4nx^2+n^2x-6n^3$.

Si $A_{(x)}=\dfrac{M_{(x)}\cdot L_{(x)}}{D_{(x)}}$, halle el resto de dividir $A_{(x)}$ entre $(x-3n)$.

A) 0 B) $6n^2$ C) $-6n^2$
D) $10n^2$ E) $12n^2$

50. Si $(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2=(abc)^2$, simplifique la expresión M.

$$M=\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+1}{2c^2-1}+\frac{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+1}{2a^2-1}+\frac{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+1}{2b^2-1}$$

A) 0 B) 1 C) $a^2+b^2+c^2$
D) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$ E) abc

51. Señale lo que se obtiene al simplificar

$$M=\frac{n^3+1}{n^4-2n^3+3n^2-2n+1}-\frac{n^2-2n^3+2n-1}{n^3+1}.$$

A) n^3+2 B) $2n^2$ C) n^3+3
D) 2 E) $2n^3+1$

52. Dados los números

$$x=m+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\vdots}}}};$$

$$y=1+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{\vdots}}}},$$

halle el equivalente de R.

$$R=\frac{x^2+x+1}{x+1}-\frac{y^2-y+1}{y(y-1)},\ \text{cuando } m\neq n.$$

A) $m+n$ B) $m-n$ C) $m-n-2$
D) $m-n-1$ E) 0

53. Determine el valor de k que permite que la fracción

$$f_{(x;y)}=\frac{(a-2)x^4-(a+7)xy+(2a-1)y^4}{4x^4-(a+2)xy+(3a-14)y^4}$$

tome siempre un valor constante k.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{4}{5}$ E) 1

54. Si se sabe que el MCD de los polinomios

$A_{(x)}=2x^3-x^2+3x+m \wedge B_{(x)}=x^3+x^2+n$ es (x^2-x+2), calcule el valor de $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.

A) $\frac{4}{3}$ B) 1 C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{10}{3}$

55. Simplifique la expresión E.

$$E=\cfrac{P}{P+1-\cfrac{P}{P+1-\cfrac{P}{P+1-\cfrac{P}{\vdots}}}}$$

P veces

A) $\frac{P^{P+1}-P}{P^{P+1}-1}$ B) $\frac{P^P-P}{P+1}$ C) $\frac{P^{P+1}-1}{P-2}$

D) $\frac{P^P-3}{P+4}$ E) $\frac{P^P+3}{P-4}$

56. Descomponga la siguiente fracción

$$f_{(x)}=\frac{8-15x+4x^2}{-3x^2+4+x^3}$$

en una adición de fracciones parciales, e indique una de ellas.

A) $\frac{4}{x+1}$ B) $\frac{-3}{(x-2)^2}$ C) $\frac{4}{x-2}$

D) $\frac{2}{x-2}$ E) $\frac{3}{x+1}$

57. Simplifique la expresión M.

$$M=\frac{(1+ab)(1+ac)}{(b-a)(a-c)}+\frac{(1+ab)(1+bc)}{(b-a)(c-b)}+\frac{(1+ac)(1+bc)}{(c-a)(b-c)}.$$

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 1

58. Simplifique la expresión E.

$$E=a^2b^2-\cfrac{n^5-1}{n^3+\cfrac{n^2-1}{1+\cfrac{n^3-1}{n-\cfrac{n^4-1}{n-\cfrac{1}{n}}}}}$$

si se sabe que

$$\frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{2}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1.$$

A) n^5 B) $1-n^5$ C) n^{-5}

D) $1-n^{-5}$ E) $1-n$

59. Halle el valor de a para que la suma de los factores primos del MCM de los polinomios $A_{(x)}=x^2+(4+a)x+4a$ y $B_{(x)}=x^2+8x+16$. sea el doble del MCD(A; B) aumentado en 1.

A) 4 B) −2 C) 5

D) −1 E) 3

60. Determine el equivalente reducido de

$$\lambda=\frac{x+y+z}{yz}+\frac{x-y+z}{y^2-yz}+\frac{x+y-z}{z^2-zy}.$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 0 E) −1

CLAVES
Problemas propuestos

NIVEL I

1 A	5 E	9 B	13 C	17 B
2 D	6 C	10 D	14 A	18 D
3 B	7 A	11 C	15 A	19 A
4 D	8 B	12 B	16 C	20 C

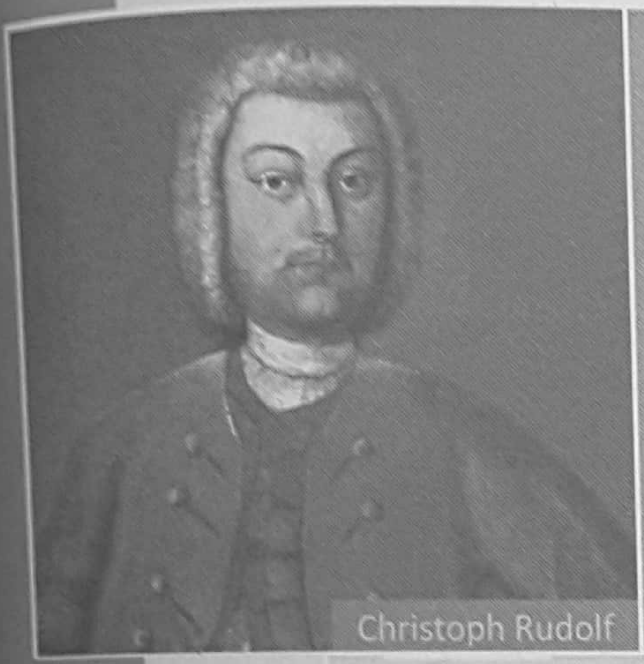
NIVEL II

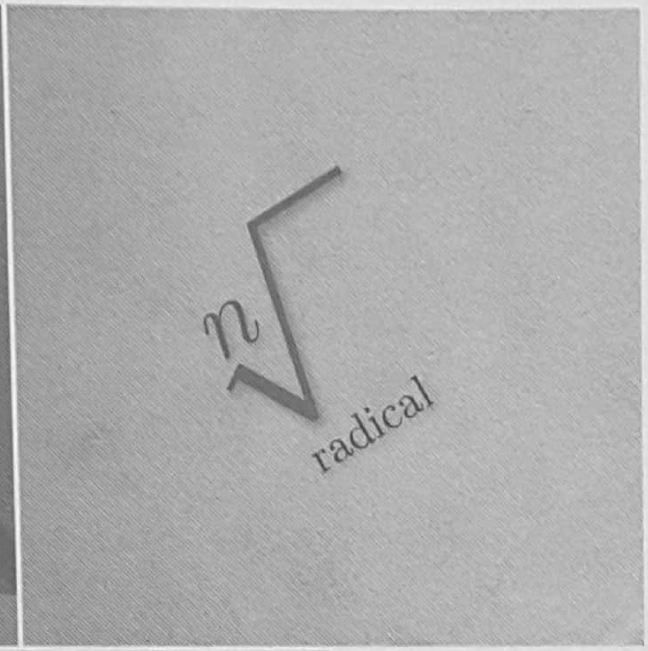
21 B	29 D	37 D	45 *	53 C
22 D	30 D	38 B	46 B	54 C
23 D	31 D	39 A	47 B	55 A
24 B	32 D	40 A	48 E	56 E
25 A	33 B	41 C	49 D	57 E
26 D	34 A	42 A	50 B	58 C
27 D	35 A	43 C	51 D	59 C
28 E	36 A	44 *	52 B	60 D

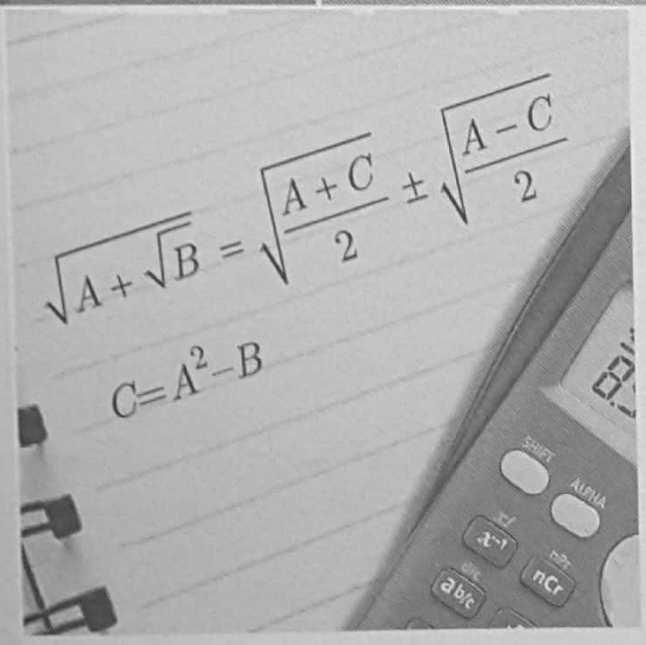
Nota. Las claves con * son demostraciones.

Capítulo

IX


Christoph Rudolf





Radicación

CAPÍTULO IX

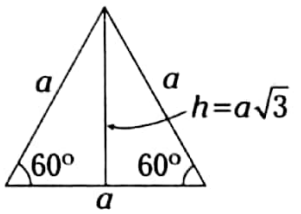
RADICACIÓN

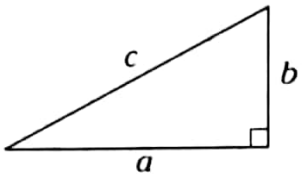
Objetivos

- Calcular la raíz cuadrada de polinomios.
- Efectuar operaciones con radicales.
- Transformar los radicales dobles a simples.
- Racionalizar y simplificar expresiones algebraicas con denominadores irracionales.

Introducción

El desarrollo de esta operación estuvo a la par con la evolución de la aritmética y la geometría, y su descubrimiento en Grecia se lo debemos a la Escuela pitagórica (escuela cultural-religiosa fundada por Pitágoras, cuyos adeptos, rigurosamente seleccionados, se seguían por severísimos principios).





$I = \{\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ \sqrt{5};\ ...\}$

Teorema de Pitágoras $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Los pitagóricos solamente conocían los números enteros y fraccionarios, pero al calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado igual a la unidad por medio de su teorema, descubrieron que dicha longitud de la diagonal no pertenecía a ninguno de los números conocidos por ellos.

Se cree que Hipaso de Metaponto, uno de los pitagóricos, fue quien reveló la existencia de estos números y por haber roto la regla de silencio de los pitagóricos, estos lo habrían arrojado al mar como castigo.

Dicha revelación trajo como consecuencia el estudio de lo que más tarde recibiría el nombre de números irracionales, expresados por medio de radicales, símbolo que caracteriza a una nueva operación a desarrollar llamada radicación.

Siglos más tarde, con el desarrollo de la simbología matemática (es decir, cuando los símbolos tomaron un rol protagónico en la matemática), los radicales tuvieron utilidad importante, como por ejemplo en la resolución de ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado; sus raíces se expresaban por medio de radicales o una combinación de ellos.

En aritmética tiene aplicación al averiguar si un número es primo o no; en geometría, al expresar el lado de un polígono en términos de radicales, etc.

▸ RADICACIÓN

DEFINICIÓN

Es aquella operación matemática a través de la cual, dados dos números llamados radicando e índice, se calcula un tercer elemento llamado raíz n-ésima del radicando, de modo que se cumpla la siguiente identidad:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow a = b^n}$$

Donde:

n: es el índice ($n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$)

a: es el radicando o cantidad subradical

b: es la raíz n-ésima de a

DEFINICIÓN DE RAÍZ ARITMÉTICA

Sea a un número real positivo y n un número natural $n \geq 2$. Se llama raíz n-ésima aritmética de a al número positivo b, tal que $b^n = a$; la cual se denota por $b = \sqrt[n]{a}$, es decir, $\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow a = b^n$.

Ejemplos

1. $\sqrt[5]{32} = 2 \leftrightarrow 32 = 2^5$

   $\rightarrow$ 2 es la raíz aritmética de 32 de orden 5.

2. $\sqrt[4]{81} = 3 \leftrightarrow 81 = 3^4$

   $\rightarrow$ 3 es la raíz aritmética de 81 de orden 4.

▸▸ Tenga en cuenta

En $\mathbb{R}$ existe $\sqrt[n]{a}$ y es igual a b, donde b es único.

I. Si n es par: $a \geq 0 \wedge b \geq 0$.

II. Si n es impar: $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$, además b tiene el mismo signo de a.

Ejemplos: $\sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[3]{-27} = -3$

Como vemos, -27 y -3 tienen el mismo signo.

TEOREMAS DE RADICACIÓN EN $\mathbb{R}$

Sean $\{a; b\} \subset \mathbb{R}_0^+ \wedge \{n; p\} \subset \mathbb{N} - \{1\}$, entonces se tiene

1. $\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$

   Ejemplo: $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2(1{,}41) = 2{,}82$

2. $\boxed{\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\ b \neq 0}$

   Ejemplo: $\sqrt{\dfrac{81}{25}} = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} = \dfrac{9}{5}$

3. $\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}}$

   Ejemplo: $\sqrt[4]{\sqrt[5]{19}} = \sqrt[4 \cdot 5]{19} = \sqrt[20]{19}$

4. $\boxed{\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot P]{a^P}}$

   Ejemplo: $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3 \cdot 5]{2^5} = \sqrt[15]{32}$

5. $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^P = \sqrt[n]{a^P}}$

   Ejemplo: $\sqrt[3]{8^5} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32$

6. $\boxed{a^P \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{nP} \cdot b}}$

   Ejemplo: $2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{48}$

RAÍZ ALGEBRAICA

Se llama raíz algebraica de $\sqrt[n]{a}$ a cada una de las n raíces diferentes de $\sqrt[n]{a}$, donde $a \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Ejemplos

1. De $\sqrt[4]{16}$, sus raíces algebraicas son 2; -2; $2i$; $-2i$, $i=\sqrt{-1}$.
2. De $\sqrt{25}$, sus raíces algebraicas son 5 y -5.

El estudio de las raíces algebraicas se desarrollan en el capítulo de números complejos, donde se demostrará que la raíz n-ésima de un número tiene n raíces.

RAÍZ CUADRADA DE UN POLINOMIO

Para hallar la raíz cuadrada de un polinomio $P_{(x)}$ de grado par, debemos hallar otros dos polinomios llamados raíz cuadrada $q_{(x)}$ y residuo $R_{(x)}$, de tal modo que $P_{(x)}=q^2_{(x)}+R_{(x)}$.

Esquema

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{P_{(x)}} & q_{(x)} \\ \hline R_{(x)} & \end{array}$$

Donde:

$P_{(x)}$ es el polinomio radicando de grado par

$q_{(x)}$ es el polinomio raíz

$R_{(x)}$ es el polinomio residuo

Identidad fundamental de la radicación

$$P_{(x)}\equiv q^2_{(x)}+R_{(x)}$$

Clases de raíz cuadrada

- Se llama raíz cuadrada exacta si y solo si su residuo es idénticamente nulo. Es decir:

$$P_{(x)}\equiv q^2_{(x)}$$

Ejemplo

$\sqrt{x^2+6x+9}\equiv x+3$, ya que

$x^2+6x+9\equiv(x+3)^2$

- Se llama raíz cuadrada inexacta si y solo si su residuo no es un polinomio idénticamente nulo. Es decir:

$$P_{(x)}\equiv q^2_{(x)}+R_{(x)}$$

Ejemplo

$\sqrt{x^2+5x+3}$ no es exacto.

$$\rightarrow\ x^2+5x+3\equiv\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$$

$$\therefore\ q_{(x)}=x+\frac{5}{2}\ \wedge\ R_{(x)}=-\frac{13}{4}$$

Propiedades

1. Si el grado de $P_{(x)}$ es $2m$, entonces el grado de $q_{(x)}$ es m.
2. El grado del residuo es menor que el grado de la raíz, salvo que el residuo sea nulo.

Procedimiento para extraer la raíz cuadrada de un polinomio

1. El polinomio radicando generalmente debe ser completo y ordenado en una variable en forma descendente, y si faltase algún término, se puede completar con ceros.
2. Se agrupan a los términos del polinomio de dos en dos a partir del último término.
3. Se extrae la raíz cuadrada al primer término del polinomio, que será el primero de la raíz; luego este se eleva al cuadrado y el resultado se resta del polinomio.

4. Se bajan los dos siguientes términos del polinomio, seguidamente se duplica la raíz encontrada. Luego se divide el primer término de los bajados entre este y el resultado será el segundo término de la raíz. A este valor obtenido se le adiciona la raíz duplicada y todo ello queda multiplicado por el segundo término de la raíz para luego restarlo del polinomio.
5. Se bajan los dos términos siguientes y se repite el paso anterior tantas veces hasta que el residuo sea de grado menor que la raíz o el residuo sea un polinomio idénticamente nulo.

Ejemplos

1. ¿Cuál es la raíz cuadrada de $4x^2+8x+4$?

Resolución

Usando el procedimiento

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{4x^2+8x+4} & 2x+2 \\ \hline (-)\left\{\begin{array}{l} 8x+4 \\ 8x+4 \end{array}\right. & (4x+2)2 \\ \hline \quad - \quad - & \end{array}$$

I. Se extrae la raíz cuadrada a $4x^2$, así: $\sqrt{4x^2}=2x$. Ahora este será el primer término de la raíz cuadrada.

II. De (I), se duplica $2x$ y se ubica debajo de la raíz cuadrada que vamos encontrando.

III. Se baja el segundo término del radicando.

IV. Se divide $(8x)\div(4x)=2$ y el resultado es el segundo término de la raíz cuadrada.

V. A $4x$ se le suma el resultado de (IV) y esto mismo multiplica al binomio $4x+2$.
Así $(4x+2)\cdot 2=8x+4$

VI. Luego se le resta a los términos sobrantes lo encontrado en (V).

Por lo tanto, la raíz cuadrada de $4x^2+8x+4$ es $2x+2$ y es exacta.

Es decir, se cumplirá que $4x^2+8x+4\equiv(2x+2)^2$. Como vemos, se trata de una raíz cuadrada exacta.

2. Extraiga la raíz cuadrada de $9x^2-12x+5$.

Resolución

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{9x^2-12x+5} & 3x-2 \\ \hline \left.\begin{array}{r} -12x+4 \end{array}\right\}(-) & (6x-2)(-2) \\ \hline 1 & \end{array}$$

I. Se extrae la raíz cuadrada a $9x^2$, así: $\sqrt{9x^2}=3x$

II. Se duplica $3x$ y se pone debajo de la raíz cuadrada que vamos encontrando.

III. Se divide $(-12x)\div(6x)=-2$. Este resultado será el segundo término de la raíz cuadrada.

IV. Luego, $3x-2$ será la raíz cuadrada y 1 el residuo, es decir, $9x^2-12x+5\equiv(3x-2)^2+1$. Se trata de una raíz cuadrada inexacta.

3. Calcule m y n si el polinomio

$P_{(x)}=4x^4+mx^3+nx^2+24x+16$

tiene raíz cuadrada exacta.

Resolución

El polinomio $P_{(x)}$ es de cuarto grado, y su raíz cuadrada es un polinomio de segundo grado.

Luego

$$4x^4+mx^3+nx^2+24x+16\equiv\left(2x^2+px+4\right)^2$$

Efectuando

$$4x^4+mx^3+nx^2+24x+16\equiv 4x^4+4px^3+(p^2+16)x^2+8px+16$$

Por identidad de polinomios

$$m=4p;\ n=p^2+16;\ 8p=24$$

$$\therefore\ p=3;\ n=25\ \wedge\ m=12$$

4. Halle la raíz cuadrada de

$P_{(x)}=12x^3+4x^4+13x^2+5.$

Resolución

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{4x^4}+12x^3+13x^2+0x+5 & 2x^2+3x+1 \\ \cline{2-2}
-12x^3-9x^2 & (4x^2+3x)3x \\ \cline{2-2}
4x^2+0x+5 & (4x^2+6x+1)1 \\ \cline{2-2}
-4x^2-6x-1 & \\ \cline{1-1}
-6x+4 &
\end{array}$$

$\rightarrow\ q_{(x)}=2x^2+3x+1$

$\therefore\ R_{(x)}=-6x+4$

5. Halle la raíz cuadrada de

$P_{(x;y)}=x^4-2x^3y-3x^2y^2+4xy^3+4y^4.$

Resolución

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{x^4-2x^3y-3x^2y^2+4xy^3+4y^4} & x^2-xy-2y^2 \\ \cline{2-2}
-x^4 & (2x^2-xy)(-xy)=-2x^3y+x^2y^2 \\ \cline{2-2}
-2x^3y-3x^2y^2 & (2x^2-2xy-2y^2)(-2y^2)=-4x^2y^2+4xy^3+4y^4 \\ \cline{2-2}
2x^3y-x^2y^2 & \\ \cline{1-1}
-4x^2y^2+4xy^3+4y^4 & \\
4x^2y^2-4xy^3-4y^4 & \\ \cline{1-1}
0\quad 0\quad 0 &
\end{array}$$

De aquí, la raíz cuadrada del polinomio es

$$q_{(x;y)}=x^2-xy-2y^2$$

y su residuo es $R_{(x;y)}\equiv 0$

RADICALES SIMPLES

Son aquellos donde las expresiones están afectadas por un solo símbolo radical y en el radicando no existe adición ni sustracción de irracionales.

Ejemplo

$$\sqrt[3]{5x+3};\quad \sqrt{x-1}$$

RADICALES DOBLES

Son aquellos que se caracterizan porque dentro de un radical se encuentran otros radicales relacionados con las operaciones de adición o sustracción $\left(\sqrt[n]{A \pm \sqrt[m]{B}}\right)$.

Ejemplos

$$\sqrt{5+\sqrt{2}};\quad \sqrt[3]{3-2\sqrt{3}}$$

Transformación de un radical doble en simple

I. Para un radical de la forma

$$\boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}}$$

Sean A y B dos elementos racionales positivos para su transformación en radicales simples.

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

De donde

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}\ ;$$

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}\ ;$$

tal que $\{x; y\} \subset \mathbf{Q}^+ \wedge x > y$

Sumando miembro a miembro las expresiones

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} + \sqrt{A-\sqrt{B}} = 2\sqrt{x}$$

Elevando al cuadrado

$$\left(A+\sqrt{B}\right)+\left(A-\sqrt{B}\right)+2\sqrt{A^2-B} = 4x$$

De aquí

$$x = \frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}$$

Análogamente, restando las expresiones obtendremos

$$y = \frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$$

Si hacemos que

$$C = \sqrt{A^2-B}\ ,\ \text{como } x; y \in \mathbf{Q}^+ \ \rightarrow\ C \in \mathbf{Q},$$

tendremos

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

Ejemplos

1. Exprese $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ en radicales simples.

Resolución

Sea $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ la transformación en radicales simples, entonces

$$11+6\sqrt{2} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \qquad (\alpha)$$

$$11-6\sqrt{2} = \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \qquad (\beta)$$

De $(\alpha)+(\beta)$

$$22 = 2(x+y)$$

$$\rightarrow\ x+y = 11 \qquad (\text{I})$$

De $(\alpha)-(\beta)$

$$12\sqrt{2} = 4\sqrt{xy}$$

$$\rightarrow\ x \cdot y = 18 \qquad (\text{II})$$

De (I) y (II) se obtiene: $x=9 \ \wedge\ y=2$

Luego tenemos

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{9}+\sqrt{2} = 3+\sqrt{2}$$

Otro método

Usando directamente la fórmula

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{11+\sqrt{72}}$$

$$A=11 \wedge B=72$$

$$\rightarrow \quad C=\sqrt{11^2-72}=7$$

Luego

$$\sqrt{11+\sqrt{72}} = \sqrt{\frac{11+7}{2}}+\sqrt{\frac{11-7}{2}} = 3+\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \sqrt{11+\sqrt{72}} = 3+\sqrt{2}$$

2. Con $1 < x < \sqrt{2}$, transforme a radicales simples

$$\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{2-x^2}}; \quad x \in \mathbb{Q}.$$

Resolución

Si $A=\frac{1}{x}$; $B=2-x^2$, entonces

$$C=\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-(2-x^2)} = \sqrt{\frac{x^4-2x^2+1}{x^2}} = \frac{x^2-1}{x}$$

Luego

$$\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{2-x^2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}}{2}}+\sqrt{\frac{\frac{1}{x}-\left(\frac{x^2-1}{x}\right)}{2}}$$

$$\therefore \quad \sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{2-x^2}} = \sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{2-x^2}{2x}}$$

Regla práctica

Una manera práctica de lograr esta transformación es conseguir un trinomio cuadrado perfecto en el radicando. Así

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}} = \sqrt{A\pm\sqrt{4b}} = \sqrt{\underbrace{A}_{x+y}\pm\underbrace{2\sqrt{b}}_{xy}}$$

Bajo esta circunstancia, si $b=xy \wedge A=x+y$

$$\rightarrow \quad A\pm 2\sqrt{b} = \left(\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right)^2$$

Y esto conducirá a que

$$\sqrt{A\pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{x}\pm\sqrt{y}; \quad x>y$$

Luego, si $x>y$ se tiene:

$$\sqrt{x+y\pm 2\sqrt{xy}} = \sqrt{x}\pm\sqrt{y}$$

Ejemplos

1. Transforme a radicales simples

$$\sqrt{10+\sqrt{84}}.$$

Resolución

Busquemos el factor 2 en $\sqrt{84}$

$$\sqrt{84} = \sqrt{4\cdot 21} = 2\sqrt{21}$$

$$\sqrt{\underset{7+3}{10}+2\sqrt{\underset{7\cdot 3}{21}}} = \sqrt{7}+\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \sqrt{10+\sqrt{84}} = \sqrt{7}+\sqrt{3}$$

2. Transforme a radicales simples

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}}.$$

Resolución

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}} = \sqrt{17-2\cdot 6\sqrt{2}}$$

Como ahora aparece un 6, hagamos que ingrese en el radical

$$6\sqrt{2} = \sqrt{36\cdot 2} = \sqrt{72}$$

Luego:

$$\sqrt{\underset{9+8}{\underset{\wedge}{17}}-2\sqrt{\underset{9\cdot 8}{\underset{\wedge}{72}}}}=\sqrt{9}-\sqrt{8}=3-2\sqrt{2}$$

3. Transforme a radicales simples la expresión

$$S=\sqrt{\frac{x}{2}-\sqrt{2x-4}}\ ;\quad 2<x<4;\quad x\in\mathbb{Q}.$$

Resolución

Como no es posible obtener el factor 2 del radical interno, vamos a hacer que ingrese desde lo externo. Para esto, multiplicaremos y dividiremos por $\sqrt{2}$. Convenientemente escribimos

$$S=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x}{2}-\sqrt{2x-4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2x}{2}-2\sqrt{2x-4}}$$

$$\rightarrow\quad S=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x-2\sqrt{2(x-2)}}$$

$$\rightarrow\quad S=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2+x-2-2\sqrt{2}\sqrt{x-2}}\right)$$

$$\rightarrow\quad S=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-\sqrt{x-2}\right)$$

$$\therefore\quad S=\sqrt{\frac{2}{2}}-\sqrt{\frac{x-2}{2}}=1-\sqrt{\frac{x}{2}-1}$$

4. Transforme a radicales simples

$$\sqrt{3x+1+\sqrt{8x^2+12x-8}}.$$

Resolución

Llevando a la forma

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}},$$

vemos que $\sqrt{8x^2+12x-8}=2\sqrt{2x^2+3x-2}$, luego el radical se puede escribir de la forma

$$\sqrt{3x+1+2\sqrt{2x^2+3x-2}}\ ,\text{ es decir}$$

$$\sqrt{(2x-1)+(x+2)+2\sqrt{(2x-1)(x+2)}}$$

Nótese que

$$2x^2+3x-2=(2x-1)(x+2)$$

$$\begin{array}{ll} 2x & -1 \\ x & 2 \end{array}$$

Luego, el equivalente en radicales simples es

$$\sqrt{3x+1+\sqrt{8x^2+12x-8}}\equiv\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+2}$$

II. Para un radical de la forma

$$\sqrt{A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

$$A;\ B;\ C;\ D;\ x;\ y;\ z\in\mathbb{Q}^+$$

Elevando al cuadrado

$$A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$$

Identificando expresiones racionales e irracionales, se tiene $x+y+z=A$

$$2\sqrt{xy}=\sqrt{B}\ \rightarrow\ 4xy=B \qquad (1)$$

$$2\sqrt{xz}=\sqrt{C}\ \rightarrow\ 4xz=C \qquad (2)$$

$$2\sqrt{yz}=\sqrt{D}\ \rightarrow\ 4yz=D \qquad (3)$$

Al resolver el sistema tendremos los valores de x, y, z.

Ejemplos

1. Halle la raíz cuadrada de

$$16+\sqrt{80}+\sqrt{112}+\sqrt{140}\ .$$

Resolución

$$\sqrt{16+\sqrt{80}+\sqrt{112}+\sqrt{140}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

$$16+\sqrt{80}+\sqrt{112}+\sqrt{140}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{xz}$$

Comparando se tiene

$x+y+z=16$ (I)

$2\sqrt{xy}=\sqrt{80} \rightarrow xy=20=5\cdot 4$ (II)

$2\sqrt{yz}=\sqrt{112} \rightarrow yz=28=4\cdot 7$ (III)

$2\sqrt{xz}=\sqrt{140} \rightarrow xz=35=5\cdot 7$ (IV)

De (II), (III) y (IV)

$x=5;\ y=4;\ z=7$

Además verifica (I)

$\rightarrow \sqrt{16+\sqrt{80}+\sqrt{112}+\sqrt{140}}=\sqrt{5}+\sqrt{4}+\sqrt{7}$

Forma práctica

Se transforma el radicando en un trinomio cuadrado perfecto, es decir

$$\sqrt{\underbrace{A}_{x+y+z}+2\underbrace{\sqrt{\theta}}_{xy}+2\underbrace{\sqrt{\alpha}}_{xz}+2\underbrace{\sqrt{\beta}}_{yz}}=\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2}$$

$$=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

Donde

$\{A;\theta;\alpha;\beta;x;y;z\}\subset \mathbb{R}^+$

2. Transforme a radicales simples la expresión M.

$M=\sqrt{24+\sqrt{240}+\sqrt{336}+\sqrt{140}}$.

Resolución

Transformamos el radicando

$$M=\sqrt{\underbrace{24}_{5+12+7}+2\sqrt{5\cdot 12}+2\sqrt{7\cdot 12}+2\sqrt{7\cdot 5}}=\sqrt{5}+\sqrt{12}+\sqrt{7}$$

$\therefore\ M=\sqrt{5}+2\sqrt{3}+\sqrt{7}$

3. Exprese en forma de radicales sencillos la expresión

$$S=\sqrt{14+\sqrt{40}+\sqrt{56}+\sqrt{140}}.$$

Resolución

$$S=\sqrt{14+\sqrt{40}+\sqrt{56}+\sqrt{140}}=\sqrt{\underbrace{14+2\sqrt{5\cdot 2}+2\sqrt{2\cdot 7}+2\sqrt{5\cdot 7}}_{2+5+7}}$$

$$S=\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^2}$$

$$\therefore\quad S=\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$$

III. Para un radical de la forma

$$\boxed{\sqrt{A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D}}}$$

Se considera el radicando $A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D}$ un trinomio cuadrado perfecto de la forma $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2$.

Luego:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$$

Elevando al cuadrado

$$A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D}=x+y+z+2\sqrt{xy}-2\sqrt{xz}-2\sqrt{yz}$$

De donde se tiene $x+y+z=A$

$$2\sqrt{xy}=\sqrt{B}\ \rightarrow\ 4xy=B$$

$$-2\sqrt{xz}=-\sqrt{C}\ \rightarrow\ 4xz=C$$

$$-2\sqrt{yz}=-\sqrt{D}\ \rightarrow\ 4yz=D$$

Al resolver se obtienen los valores de x; y; z.

Nota

Con el objetivo de ganar tiempo frente a este tipo de radicales, busquemos una regla práctica, la misma que estará sujeta al principio deductivo de la forma genérica. Es decir, la expresión

$$A+2\sqrt{xy}-2\sqrt{yz}-2\sqrt{zx}$$

debe provenir de un trinomio al cuadrado de la forma

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2$$

De modo que

$$\sqrt{A+2\sqrt{xy}-2\sqrt{yz}-2\sqrt{zx}}$$

$$\wedge$$

$$x+y+z$$

$$\sqrt{\left(x+\sqrt{y}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$$

Donde

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\in\mathbb{R}^+$$

Ejemplo

Exprese en forma de radicales simples la expresión

$$\sqrt{14+2\sqrt{10}-\sqrt{56}-\sqrt{140}}\ .$$

Resolución

El radical doble es equivalente a

$$\sqrt{14+2\sqrt{10}-2\sqrt{14}-2\sqrt{35}}$$

$$=\sqrt{14+2\sqrt{5\cdot 2}-2\sqrt{7\cdot 2}-2\sqrt{7\cdot 5}}$$

$$\widehat{2+5+7}$$

$$=\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}$$

IV. Para un radical de la forma

$$\boxed{\sqrt[3]{A\pm\sqrt{B}}}$$

Para su transformación a radicales simples tenemos en consideración que el radicando $A\pm\sqrt{B}$ sea un cubo perfecto de la forma $\left(x\pm\sqrt{y}\right)^3$.

De donde podemos establecer que

$$\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}=x+\sqrt{y} \qquad (\alpha)$$

$$\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}=x-\sqrt{y} \qquad (\beta)$$

Además, $\{x;y\}\subset\mathbb{Q}$.

De (α) y (β) hallaremos x e y.

I. Hallando x

Sumando (α) y (β) miembro a miembro

$$\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}+\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}=x+\sqrt{y}+x-\sqrt{y}$$

$$\rightarrow\ \sqrt[3]{A+\sqrt{B}}+\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}=2x$$

Luego, elevando al cubo

$$\left(\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}+\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}\right)^3=(2x)^3$$

Desarrollando

$$\left(\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}\right)\underbrace{\left(\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}+\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}\right)}_{2x}=8x^3$$

Luego

$$A+\sqrt{B}+A-\sqrt{B}+3\sqrt[3]{\left(A+\sqrt{B}\right)\left(A-\sqrt{B}\right)}(2x)=8x^3$$

$$\rightarrow\ 2A+6\sqrt[3]{A^2-B}\cdot x=8x^3$$

$$\therefore\ \boxed{4x^3-3\sqrt[3]{A^2-B}\,x-A=0} \qquad (\theta)$$

Como los valores de A y B son conocidos de esta ecuación, podremos determinar el valor de x, el cual será racional.

II. Hallando y

Multiplicando (α) y (β) miembro a miembro se obtiene

$$\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}\cdot\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}=\left(x+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{y}\right)$$

$$\sqrt[3]{\left(A+\sqrt{B}\right)\left(A-\sqrt{B}\right)}=x^2-y$$

$$\sqrt[3]{A^2-B}=x^2-y$$

Entonces

$$\boxed{y=x^2-\sqrt[3]{A^2-B}} \qquad (\gamma)$$

Como conocemos x, además de A y B, entonces, fácilmente podremos obtener y, el cual será racional solamente si A^2-B es cubo perfecto.

Enseguida veamos algunos ejemplos de aplicación.

Ejemplos

1. Transforme $\sqrt[3]{-7+\sqrt{50}}$ a radicales simples.

Resolución

$$\sqrt[3]{-7+\sqrt{50}}=\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}=x+\sqrt{y}$$

Reconociendo A y B, tenemos

$$A=-7 \quad \wedge \quad B=50$$

Hallando x en (θ)

$$4x^3-3\sqrt[3]{(-7)^2-50}\,x-(-7)=0$$

$$4x^3+3x+7=0$$

Factorizando

$$(x+1)\left(4x^2-4x+7\right)=0$$

Como x es racional, entonces $x=-1$.

Hallando y en (γ)

$$y=x^2-\sqrt[3]{(-7)^2-50}$$

$$y=x^2+1$$

Como $x=-1 \rightarrow y=(-1)^2+1 \rightarrow y=2$

$$\therefore \sqrt[3]{-7+\sqrt{50}}=-1+\sqrt{2}$$

2. Transforme $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$ a radicales simples.

Resolución

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=\sqrt[3]{26+\sqrt{15^2\cdot 3}}=\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}=x+\sqrt{y}$$

Reconociendo A y B, tenemos

$$A=26 \quad \wedge \quad B=15^2\cdot 3=675$$

Hallando x en (θ)

$$4x^3-3\sqrt[3]{(26)^2-675}\,x-26=0$$

$$4x^3-3x-26=0$$

Factorizando

$$(x-2)\left(4x^2+8x+13\right)=0$$

Como x es racional, entonces

$$x=2$$

Hallando y en (γ)

$$y=x^2-\sqrt[3]{(26)^2-675}$$

$$y=x^2-1$$

Como $x=2 \rightarrow y=(2)^2-1 \rightarrow y=3$

$$\therefore \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$$

3. Transforme $\sqrt[3]{60\sqrt{3}-42\sqrt{6}}$ a radicales simples.

Resolución

> **Nota**
> Cuando el binomio consta de dos radicales cuadráticos, procederemos como sigue a continuación.

$$\sqrt[3]{60\sqrt{3}-42\sqrt{6}} = \sqrt[3]{3\sqrt{3}(20-14\sqrt{2})}$$

$$= \underbrace{\sqrt[3]{3}\sqrt[6]{3}}\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{3}\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{60\sqrt{3}-42\sqrt{6}} = \sqrt{3}\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

Ahora transformaremos

$$\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = x-\sqrt{y}$$

Reconociendo A y B, tenemos

$$A=20 \quad \wedge \quad B=392$$

Hallando x en (θ)

$$4x^3-3\left(\sqrt[3]{20^2-392}\right)x-20=0$$

$$4x^3-6x-20=0$$

$$2x^3-3x-10=0$$

Factorizando $(x-2)(2x^2+4x+5)=0$

Como $x \in \mathbb{Q}$, entonces $x=2$.
Por lo tanto, $x=2$ es el único racional que resuelve la ecuación.

Hallando y en (γ)

$$y = x^2-\sqrt[3]{20^2-392}$$

$$y=x^2-2$$

Como $x=2 \rightarrow y=(2)^2-2 \rightarrow y=2$

Entonces

$$\sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = 2-\sqrt{2}$$

De donde

$$\sqrt[3]{60\sqrt{3}-42\sqrt{6}} = \sqrt{3}(2-\sqrt{2})$$

$$\therefore \quad \sqrt[3]{60\sqrt{3}-42\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}-\sqrt{6}$$

4. Exprese $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}$ en radicales simples.

Resolución

Sea $a+b\sqrt{2}$ el radical simple, es decir

$$\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} = a+b\sqrt{2}$$

Elevando al cubo miembro a miembro

$$45+29\sqrt{2} = a^3+3a^2b\sqrt{2}+3ab^2\cdot 2+b^3 2\sqrt{2}$$

$$= a^3+6ab^2+(3a^2b+2b^3)\sqrt{2}$$

De donde

$$45=a^3+6ab^2$$

$$29=3a^2b+2b^3$$

Además, $a; b \in \mathbb{Q}^+$.

Resolviendo este sistema, se tiene que

$$a=3; \quad b=1$$

$$\therefore \quad \sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} = 3+\sqrt{2}$$

RACIONALIZACIÓN

DEFINICIÓN

Siendo $I_{(x)}$ generalmente el denominador de una expresión irracional, se denomina racionalización a aquel proceso que permite transformar la fracción equivalentemente en otra con denominador racional.

Por lo general, se busca eliminar la irracionalidad en los denominadores de las expresiones, salvo se diga lo contrario.

Para este efecto, usaremos una expresión irracional, a la cual llamaremos factor racionalizante.

FACTOR RACIONALIZANTE (FR)

Es aquella expresión irracional (algebraica) capaz de transformar una expresión irracional en otra con denominador racional a través del siguiente esquema:

$$\underbrace{\frac{K}{I_{(x)}}}\cdot\underbrace{\frac{\text{FR}}{\text{FR}}}=\underbrace{\frac{K\cdot\text{FR}}{\text{Racional}}}$$

Por lo general, es conveniente racionalizar el denominador para conocer mejor el valor de la cantidad irracional.

Casos que se presentan

Caso I

Forma

$$\boxed{\frac{N}{\sqrt[n]{a^m}};\quad n>m\wedge m;n\in\mathbb{N};\quad a\in\mathbb{R}^+}$$

Para este denominador, su factor racionalizante es $\sqrt[n]{a^{n-m}}$

pues: $\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}=\sqrt[n]{a^n}=a$

Entonces se tendrá

$$\boxed{\frac{N}{\sqrt[n]{a^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{N\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}}$$

Ejemplos

1. Racionalice el denominador de $\dfrac{15}{\sqrt[5]{12}}$ e indíquelo.

   Resolución

   El factor que racionaliza al denominador es $\sqrt[5]{12^4}$, entonces

   $$\frac{15\cdot\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12}\cdot\sqrt[5]{12^4}}=\frac{15\cdot\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12^5}}=\frac{\cancel{15}\sqrt[5]{12^4}}{\cancel{12}}=\frac{5\sqrt[5]{12^4}}{4}$$

   Por lo tanto, el denominador racionalizado es 4.

2. Racionalice el denominador de la expresión $\dfrac{10}{\sqrt{5\sqrt[5]{3^3}}}$.

   Resolución

   Descomponiendo en el radicando

   $$\frac{10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt[10]{3^3}}$$

   cuyo factor racionalizante es $\left(\sqrt{5}\cdot\sqrt[10]{3^7}\right)$.

   Luego

   $$\frac{10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt[10]{3^3}}=\underbrace{\frac{10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt[10]{3^3}}}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt[10]{3^7}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt[10]{3^7}}}$$

   $$=\frac{\cancel{10}\sqrt{5}\sqrt[10]{3^7}}{\cancel{5}\cdot 3}=\frac{2\sqrt{5}\sqrt[10]{3^7}}{3}$$

3. Indique el denominador racionalizado de la expresión

$$\frac{24}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{3\sqrt{2}}}.$$

Resolución

Transformando el denominador

$$\frac{24}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{2}}$$

cuyo factor racionalizante es $\sqrt[3]{5^2}\cdot\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[8]{2^7}$.

Luego

$$\frac{24}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{5^2}\cdot\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[8]{2^7}}{\sqrt[3]{5^2}\cdot\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[8]{2^7}}$$

se obtiene

$$\frac{\boxed{24}\sqrt[3]{5^2}\cdot\sqrt[4]{3^3}\sqrt[8]{2^7}}{5\cdot\boxed{\cancel{3\cdot 2}}}=\frac{4\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[8]{128}}{5}$$

Por lo tanto, el denominador racionalizado es 5.

Caso II

Forma

$$\boxed{\frac{N}{\sqrt{f_{(x)}}\pm\sqrt{g_{(x)}}};\ f_{(x)};\ g_{(x)}\in\mathbb{R}^+}$$

Veamos en el cuadro

Expresión irracional	Factor racionalizante	Racional
$\sqrt{f_{(x)}}+\sqrt{g_{(x)}}$	$\sqrt{f_{(x)}}-\sqrt{g_{(x)}}$	$f_{(x)}-g_{(x)}$
$\sqrt{f_{(x)}}-\sqrt{g_{(x)}}$	$\sqrt{f_{(x)}}+\sqrt{g_{(x)}}$	$f_{(x)}-g_{(x)}$

Ejemplos

1. Racionalice el denominador de

$$\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}.$$

Resolución

El factor que racionaliza el denominador es $\sqrt{7}+\sqrt{2}$.

$$\rightarrow\ \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})}=\frac{\cancel{5}(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{\cancel{7-2}}$$

$$=\sqrt{7}+\sqrt{2}$$

2. Racionalice el denominador de la expresión

$$\frac{24}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x-2}};\quad x>2/3.$$

Resolución

$$\frac{24}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x-2}}\cdot\frac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x-2}}$$

Se obtiene

$$\frac{24(\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x-2})}{(3x+2)-(3x-2)}=\frac{\cancel{24}(\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x-2})}{\cancel{4}}$$

$$=6(\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x-2})$$

Por lo tanto, el denominador racionalizado es 1.

3. Indique el denominador racionalizado de

$$\frac{15}{\sqrt{6}+3\sqrt{3}+2\sqrt{2}+6}.$$

Resolución

Agrupando el denominador como se indica

$$\sqrt{3}(\sqrt{2}+3)+2(\sqrt{2}+3)=(3+\sqrt{2})(2+\sqrt{3})$$

se tiene

$$\frac{15}{(3+\sqrt{2})(2+\sqrt{3})}\cdot\frac{(3-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}{(3-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{15(3-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}{(3^2-2)(2^2-3)}$$

$$=\frac{15(3-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}{7}$$

Por lo tanto, el denominador racionalizado es 7.

4. Racionalice el denominador de $\dfrac{7}{\sqrt[4]{3}+1}$.

Resolución

Racionalizamos en dos tiempos

I. Por el factor racionalizante $\sqrt[4]{3}-1$

$$\frac{7(\sqrt[4]{3}-1)}{(\sqrt[4]{3}+1)(\sqrt[4]{3}-1)}=\frac{7(\sqrt[4]{3}-1)}{\sqrt{3}-1}$$

II. Por el factor racionalizante $\sqrt{3}+1$

$$\frac{7(\sqrt[4]{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{\underbrace{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}_{3-1}}=\frac{7(\sqrt[4]{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2}$$

5. Racionalice el denominador de la expresión $\dfrac{5}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Resolución

Agrupamos convenientemente

$$\frac{5}{\sqrt{5}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\cdot\frac{\sqrt{5}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{5}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{5(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})}{5-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$

$$\frac{5(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\cancel{5}-\cancel{5}+2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})}{12}$$

Caso III

Forma

$$\boxed{\frac{N}{\sqrt[3]{f_{(x)}^2}\pm\sqrt[3]{f_{(x)}g_{(x)}}+\sqrt[3]{g_{(x)}^2}}}\qquad\text{(I)}$$

$$\boxed{\frac{M}{\sqrt[3]{f_{(x)}}\pm\sqrt[3]{g_{(x)}}}}\qquad\text{(II)}$$

Veamos en el siguiente cuadro:

Expresión irracional	Factor racionalizante	Racional
$\sqrt[3]{f^2}\pm\sqrt[3]{f\cdot g}+\sqrt[3]{g^2}$	$\sqrt[3]{f}\mp\sqrt[3]{g}$	$f\mp g$
$\sqrt[3]{f}\pm\sqrt[3]{g}$	$\sqrt[3]{f^2}\mp\sqrt[3]{f\cdot g}+\sqrt[3]{g^2}$	$f\pm g$

Ejemplos

1. Racionalice $\dfrac{14}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$.

Resolución

Como el denominador es $\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1$, entonces el factor racionalizante es $\sqrt[3]{3}-1$.

Luego tenemos

$$\frac{14}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}-1}=\frac{14(\sqrt[3]{3}-1)}{3-1}=7(\sqrt[3]{3}-1)$$

2. Racionalice $\dfrac{13}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$.

Resolución

Como el denominador es $\sqrt[3]{2}^2-\sqrt[3]{3\cdot 2}+\sqrt[3]{3}^2$,

el factor que lo racionaliza es $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$.

Así

$$\underbrace{\frac{13}{\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{3\cdot 2}+\sqrt[3]{3^2}}}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}}$$

$$=\frac{13\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)}{3+2}=\frac{13\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)}{5},$$

cuyo denominador es 5.

Caso IV

Forma

$$\frac{N}{\sqrt[n]{f_{(x)}}\pm\sqrt[n]{g_{(x)}}};\ n\in\mathbb{N}\ \wedge\ n\geq 2$$

Así

$$\sqrt[n]{f_{(x)}}\mp\sqrt[n]{g_{(x)}}$$

tendrá como factor racionalizante a

$$\sqrt[n]{f_{(x)}}^{n-1}+\sqrt[n]{f_{(x)}}^{n-2}\sqrt[n]{g_{(x)}}+\ldots+\sqrt[n]{g_{(x)}}^{n-1}$$

Para cualquier $n\in\mathbb{N}\ \wedge\ n\geq 2$, se tendrá

$$\frac{N}{\sqrt[n]{f_{(x)}}-\sqrt[n]{g_{(x)}}}\cdot\frac{\sqrt[n]{f_{(x)}}^{n-1}+\sqrt[n]{f_{(x)}}^{n-2}\sqrt[n]{g_{(x)}}+\ldots+\sqrt[n]{g_{(x)}}^{n-1}}{\sqrt[n]{f_{(x)}}^{n-1}+\sqrt[n]{f_{(x)}}^{n-2}\sqrt[n]{g_{(x)}}+\ldots+\sqrt[n]{g_{(x)}}^{n-1}}$$

$$=\frac{N\left(\sqrt[n]{f_{(x)}}^{n-1}+\sqrt[n]{f_{(x)}}^{n-2}\sqrt[n]{g_{(x)}}+\ldots+\sqrt[n]{g_{(x)}}^{n-1}\right)}{f_{(x)}-g_{(x)}}$$

Resumiendo

$$\frac{N}{\sqrt[n]{f_{(x)}}\pm\sqrt[n]{g_{(x)}}}=\frac{N\cdot\text{FR}}{f_{(x)}-g_{(x)}};\ n \text{ es par}$$

$$\frac{N}{\sqrt[n]{f_{(x)}}\pm\sqrt[n]{g_{(x)}}}=\frac{N\cdot\text{FR}}{f_{(x)}\pm g_{(x)}};\ n \text{ es impar}$$

Ejemplos

1. Indique el denominador racionalizado de $\dfrac{45}{\sqrt[30]{13}-\sqrt[30]{3}}$.

Resolución

El factor racionalizante es

$$\sqrt[30]{13}^{29}+\sqrt[30]{13}^{28}\sqrt[30]{3}+\ldots+\sqrt[30]{3}^{29}$$

$$\underbrace{\frac{45}{\sqrt[30]{13}-\sqrt[30]{3}}}\cdot\underbrace{\frac{\text{FR}}{\text{FR}}}=\frac{45\cdot\text{FR}}{13-3}=\frac{9\cdot\text{FR}}{2}$$

Por lo tanto, su denominador es 2.

2. Indique el denominador racionalizado de $\dfrac{4}{\sqrt[22]{17}+\sqrt[22]{15}}$.

Resolución

Observamos que el índice es par. Al multiplicar por el factor racionalizante se tiene

$$\frac{4}{\sqrt[22]{17}+\sqrt[22]{15}}\cdot\frac{\text{FR}}{\text{FR}}=\frac{4\cdot\text{FR}}{17-15}=\frac{4\cdot\text{FR}}{2}=2\cdot\text{FR}$$

Por lo tanto, el denominador racionalizado es 1.

3. Indique el denominador racionalizado de M.

$$M=\frac{\sqrt[3]{3}}{3-\sqrt[6]{2}}.$$

Resolución

Transformamos *M*.

$$M = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{3}^6 - \sqrt[6]{2}}$$

Multiplicando por el FR (índice par)

$$\frac{\sqrt[3]{3} \cdot \text{FR}}{(\sqrt[6]{729} - \sqrt[6]{2})\,\text{FR}} = \frac{\sqrt[3]{3}\,\text{FR}}{729 - 2}$$

Por lo tanto, el denominador racionalizado es 727.

4. Indique el denominador racionalizado de

$$\frac{36}{\sqrt[7]{25} + \sqrt[7]{4}}.$$

Resolución

Multiplicando por el FR (índice impar)

$$\underbrace{\frac{36}{\sqrt[7]{25} + \sqrt[7]{4}}} \cdot \underbrace{\frac{\text{FR}}{\text{FR}}} = \frac{36 \cdot \text{FR}}{25 + 4}$$

Por lo tanto, el denominador racionalizado es 29.

5. Indique

   a. Factor racionalizante (FR)

   b. Denominador racionalizado de

$$\frac{5}{\sqrt[5]{625} + \sqrt[5]{125} + \sqrt[5]{25} + \sqrt[5]{5} + 1}.$$

Resolución

El denominador $\sqrt[5]{5}^4 + \sqrt[5]{5}^3 + \sqrt[5]{5}^2 + \sqrt[5]{5} + 1$ es un cociente notable.

a. El factor que racionaliza es $\sqrt[5]{5} - 1$.

b. $$\underbrace{\frac{5}{\sqrt[5]{5}^4 + \sqrt[5]{5}^3 + \sqrt[5]{5}^2 + \sqrt[5]{5} + 1}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt[5]{5} - 1}{\sqrt[5]{5} - 1}}$$

como

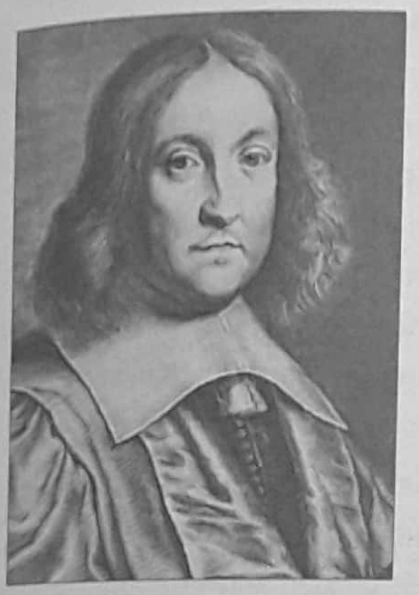
$$\frac{\sqrt[5]{5}^5 - 1}{\sqrt[5]{5} - 1} = \sqrt[5]{5}^4 + \sqrt[5]{5}^3 + \sqrt[5]{5}^2 + \sqrt[5]{5} + 1.$$

$$= \frac{5(\sqrt[5]{5} - 1)}{5 - 1} = \frac{5(\sqrt[5]{5} - 1)}{4}$$

Por lo tanto, el denominador racionalizado es 4.

Biografía

Pierre de Fermat



Nació en Beaumont-de-Lomagne, Francia, el 20 de agosto de 1601 y murió en Castres el 12 de enero de 1665. Fue un jurista y matemático francés. Junto con Pascal, desarrolló el principio de la teoría de la probabilidad. También se interesó por la teoría de los números y realizó varios descubrimientos en este campo. Por estas aportaciones, se le consideró el padre de la teoría de números moderna.

Gracias a su progenitor, Dominique Fermat, un próspero comerciante de pieles, y a su madre, que pertenecía a una familia de la nobleza local, Fermat obtuvo una educación privilegiada. En sus estudios, sobresalió en griego, latín y otros idiomas europeos; además, fue un apasionado de la literatura y ocasionalmente hacía de poeta. Es probable que haya sido criado en su pueblo natal y educado en un cercano monasterio franciscano hasta que ingresó a la Universidad de Toulouse. Se desconoce la razón por la que interrumpió sus estudios universitarios, pues durante unos años vivió en Burdeos. Allá tuvo contacto con los matemáticos Jean Beaugrand y Jean D´Espagnet, quienes conocían bien el simbolismo de Vieta, lo que, además del álgebra, le sería muy útil a Fermat más adelante. En aquella época produjo su primera obra matemática: la restitución del libro perdido de las Cónicas de Apolonio: *Plane Loci* y los primeros trabajos sobre máximos y mínimos.

Una vez culminada su estancia en Burdeos, Fermat regresó a la universidad, pero a la de Orléans. De ahí se graduó en 1631 y obtuvo su título en leyes, desempeñándose como consejero del Parlamento de Tolouse en 1638. En ese mismo año, contrae matrimonio con una prima lejana, Louise de Long, con la que tuvo cinco hijos. El mayor de ellos, Climent-Samuel, sería el único que le siguiera los pasos al interesarse en las matemáticas, y gracias a él también tenemos la edición y publicación de las obras completas de su padre en 1679.

Los hallazgos e investigaciones de Fermat no fueron publicados en vida, pero estos eran de tal calidad que la pobre difusión que tuvieron dentro de la comunidad científica europea fue suficiente como para ser recordado en la historia. Fermat tenía la costumbre de anotar o hacer cálculos en los márgenes de los libros, o escribía algunos de sus descubrimientos en cartas

que enviaba a sus amigos. Se dice que una vez no pudo culminar la explicación de uno de sus descubrimientos, por lo que se excusó de esta manera: "Lo lamento, pero este margen es insuficiente para dar los detalles de la demostración". Esta afirmación sería conocida luego como el último teorema de Fermat.

En Toulouse, Fermat mantiene contacto con otro magistrado y aficionado a las matemáticas, Pierre de Carcavi. Cuando Carcavi viaja a París en 1636, conversa con Marin Mersenne y le muestra el trabajo de Fermat, de esta forma promueve una comunicación por correspondencia entre los matemáticos. Luego de que Fermat compartiera con Mersenne sus trabajos sobre la caída libre de los cuerpos pesados y sobre espirales, incluye también un par de problemas sobre máximos y mínimos para que este los difundiera entre la comunidad matemática. Como Mersenne no logra dar con la solución de los problemas, le pide a Fermat que divulgue el resultado. Por ello, los escritos de Fermat sobre el tema circulan y lo consagran como un matemático de primer orden. Fueron varios los que le pidieron a Fermat que publicara sus escritos, pero él se negó a hacerlo, quizá porque él mismo se consideraba tan solo un aficionado en el tema, o porque para publicar sus trabajos tendría que disponer de tiempo para explicarlos y hacerlos más didácticos.

Otro de los matemáticos con los que se carteó fue Blaise Pascal. En 1654 desarrollaron juntos los principios de la teoría de la probabilidad. Pascal le plantea a Fermat un problema sobre la repartición justa de las apuestas si una serie de partidas se interrumpen antes de llegar al final acordado: "¿Cómo hay que repartir una apuesta de 64 monedas para el primero de dos jugadores que gane 3 partidas si el juego se interrumpe antes de que nadie haya ganado?" se supone que ambos jugadores tienen, en cada partida, las mismas oportunidades de ganar). Ambos, mediante cartas, llegan a un mismo resultado, pero por caminos diferentes: Pascal intuye el resultado mediante una recurrencia, pero se ve obligado a utilizar el cálculo combinatorio y el uso de su triángulo aritmético (Triángulo de Pascal) para demostrarlo, mientras que Fermat usa directamente el cálculo combinatorio.

Hacia 1660, la salud de Fermat empieza a decaer. Debido a ello, pospone un encuentro que tenía pendiente con Pascal, quien también se encontraba enfermo (incluso, muere dos años después). En enero de 1665, Fermat muere en la ciudad de Castres, donde unos días antes había asistido a una sesión del tribunal establecido por el Edicto de Nantes.

Fuente:

http://es.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat

http://centros5.pntic.mec.es/ies.salvador.dalil/primeroa/fermat/biografia.htm

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/mateospetsuak/Fermat.asp

Problemas RESUELTOS

Problema 1

¿Cuál es el resto de extraer la raíz cuadrada al polinomio

$P_{(x)}=9x^2-18x+5;\quad x>1$?

Resolución

Calculamos la raíz cuadrada

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{9x^2-18x+5} & 3x-3 \\ \hline \underline{+18x-9} & (6x-3)(-3) \\ -4 & \end{array}$$

La raíz cuadrada es $3x-3$ y su resto es -4.

Hemos procedido así:

I. $\sqrt{9x^2}=3x$, primer término de la raíz cuadrada.

II. Duplicamos $3x \rightarrow 6x$.

III. $-18x \div 6x=-3$, segundo término de la raíz cuadrada.

IV. A $6x$ se le suma -3 y al binomio $(6x-3)$ se le multiplica (-3).

V. A $-18x+5$ se le resta $(6x-3)(-3)$, obteniéndose $(-18x+5)-(6x-3)(-3)=-4$, que es el resto.

Otro método

Cuando el polinomio es cuadrático, se puede realizar completando cuadrados.

$$9x^2-18x+5 \equiv \underbrace{(3x)^2-2(3x)(3)+3^2}_{(3x-3)^2-4}-3^2+5$$

Recuerde

$P_{(x)}=R^2_{(x)}+r_{(x)}$

Donde:

$R_{(x)}$ es la raíz cuadrada y $r_{(x)}$ es el resto.

Por lo tanto, $3x-3$ es su raíz cuadrada ya que $x>1$, y -4 es su residuo.

Problema 2

Señale el resto al extraer la raíz cuadrada del polinomio

$P_{(x)}=16x^4-16x^3+44x^2-21x+27.$

Resolución

Calculamos la raíz cuadrada

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{16x^4-\cancel{16x^3}+44x^2-21x+27} & 4x^2-2x+5 \\ \hline \underline{\cancel{16x^3}-4x^2} & (4x^2)\cdot 2 \equiv 8x^2 \\ \cancel{40x^2}-21x+27 & (8x^2-2x)(-2x) \\ \underline{-\cancel{40x^2}+20x-25} & \equiv -16x^3+4x^2 \\ -x+2 & (4x^2-2x)2 \equiv 8x^2-4x \\ & (8x^2-4x+5)5 \end{array}$$

Por lo tanto, su resto es $-x+2$.

Hemos procedido así:

I. $\sqrt{16x^4}=4x^2$, primer término de la raíz cuadrada.

II. Se duplica $4x^2 \rightarrow 8x^2$.

III. $-\dfrac{16x^3}{8x^2}=-2x$, segundo término de la raíz cuadrada.

IV. De $-16x^3+44x^2$ se resta $-16x^3+4x^2$, obteniéndose $40x^2$.

V. Se duplica $(4x^2-2x)$.

VI. $40x^2 \div 8x^2 \equiv 5$, tercer término de la raíz cuadrada.

VII. De $40x^2-21x+27$ se resta $(8x^2-4x+5)\cdot 5$, obteniéndose $-x+2$, que es el resto.

Problema 3

Si la raíz cuadrada del polinomio

$P_{(x)}=x^6+2x^4+4x^3+x^2+4x+4$ es $R_{(x)}$,

¿cuál es el valor de $R_{(-1)}$?

Resolución

Se recomienda ordenar y completar en forma descendente. Si faltase algún término, se coloca cero.

Calculamos la raíz cuadrada

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{x^6+0x^5+\cancel{2x^4}+4x^3+x^2+4x+4} & x^3+0x^2+x+1 \\ \hline
-\cancel{2x^4}-2x^3 & (2x^3+0x^2)(0x^2) \\ \hline
\cancel{2x^3}+x^2+4x+4 & \equiv 0x^5+0x^4 \\ \hline
-\cancel{2x^3}-2x-1 & 2(x^3+x)\equiv 2x^3+2x \\ \hline
x^2+2x+3 & (2x^3+2x+1)\cdot 1
\end{array}$$

Luego, la raíz cuadrada es $R_{(x)}=x^3+x+1$.

$\therefore\ R_{(-1)}=(-1)^3+(-1)+1=-1$

I. $\sqrt{x^6}=x^3$, primer término de la raíz cuadrada.

II. Duplicamos $x^3 \rightarrow 2x^3$.

III. $\dfrac{0x^5}{2x^3}=0x^2$, segundo término de la raíz cuadrada.

IV. Duplicamos $x^3+0x^2 \rightarrow 2x^3$

V. $\dfrac{2x^4}{2x^3}\equiv x$, tercer término de la raíz cuadrada.

VI. De $2x^4+4x^3$ se resta $2(x^3+x)$, obteniéndose $2x^3$.

VII. $\dfrac{2x^3}{2x^3}=1$, cuarto término de la raíz cuadrada.

VIII. De $2x^3+x^2+4x+4$ se resta $(2x^3+2x+1)\cdot 1$, obteniéndose x^2+2x+3, que es el resto.

Problema 4

Transforme a radicales simples la expresión

$\sqrt{7+\sqrt{61+4\sqrt{15}}}$.

Resolución

Recordando

$$\sqrt{x+y\pm 2\sqrt{xy}}\equiv\sqrt{x}\pm\sqrt{y};\quad x>y$$

$$\sqrt{61+4\sqrt{15}}\equiv\sqrt{61+2\sqrt{15\cdot 4}}\equiv\sqrt{\underset{\underset{60+1}{\wedge}}{61}+2\underset{\underset{60\cdot 1}{\wedge}}{\sqrt{60}}}$$

$$\equiv\sqrt{60}+\sqrt{1}\equiv\sqrt{60}+1$$

Luego se tiene

$$\sqrt{7+1+\sqrt{60}}\equiv\sqrt{\underset{\underset{5+3}{\wedge}}{8}+2\underset{\underset{5\cdot 3}{\wedge}}{\sqrt{15}}}\equiv\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

Por lo tanto, su equivalente en radicales simples es $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

Problema 5

Calcule el equivalente reducido de M.

$$M=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{17-2\sqrt{72}}-\sqrt{19+2\sqrt{18}}$$

Resolución

Recordemos una vez más que

$$\sqrt{x+y\pm 2\sqrt{xy}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y};\quad x>y>0$$

Luego

$$\sqrt{\underset{\underset{2+1}{\wedge}}{3}+2\underset{\underset{2\cdot 1}{\wedge}}{\sqrt{2}}}\equiv\sqrt{2}+\sqrt{1}\equiv\sqrt{2}+1$$

$$\sqrt{\underset{\underset{9+8}{\wedge}}{17}-2\underset{\underset{9\cdot 8}{\wedge}}{\sqrt{72}}}\equiv\sqrt{9}-\sqrt{8}\equiv 3-2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\underset{\underset{18+1}{\wedge}}{19}+2\underset{\underset{18\cdot 1}{\wedge}}{\sqrt{18}}}=\sqrt{18}+\sqrt{1}=3\sqrt{2}+1$$

$\rightarrow\ M=\sqrt{2}+1-(3-2\sqrt{2})-(3\sqrt{2}+1)$

$\rightarrow\ M=\cancel{\sqrt{2}}+1-3+\cancel{2\sqrt{2}}-\cancel{3\sqrt{2}}-1\equiv -3$

Por lo tanto, $M=-3$.

Problema 6

Simplifique la expresión S.

$S=\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}-\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$.

Resolución

Como

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{17+2\sqrt{36\cdot 2}}=\sqrt{\underbrace{17}_{9+8}+2\underbrace{\sqrt{72}}_{9\cdot 8}}$$

$$=\sqrt{9}+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}$$

Luego $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}\equiv\sqrt{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$

$\rightarrow\ \sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$

$\rightarrow\ \sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$

Finalmente

$\rightarrow\ S=\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}-\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$

$\rightarrow\ S=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=2$

Problema 7

Simplifique la expresión E.

$E=\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}};\quad a>2$.

Resolución

Sabemos que:

- $\sqrt{\underbrace{a}_{(a-1)+1}+2\sqrt{\underbrace{a-1}_{(a-1)\cdot 1}}}=\sqrt{a-1}+\sqrt{1}=\sqrt{a-1}+1$
- $\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}=\sqrt{a-1}-1$, ya que $a>2$

Entonces

$$E=(\sqrt{a-1}+1)+(\sqrt{a-1}-1)$$

$\therefore\ E=2\sqrt{a-1}$

Problema 8

Exprese como un radical doble la expresión M.

$M=2\sqrt{x+2+\sqrt{8x}}-\sqrt{4x+3+\sqrt{48x}}$.

Resolución

Para simplificar será necesario primero pasar a radicales simples

- $2\sqrt{x+2+\sqrt{8x}}=2\underbrace{\sqrt{x+2+2\sqrt{2\cdot x}}}_{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$
- $\sqrt{4x+3+\sqrt{48x}}=\underbrace{\sqrt{4x+3+2\sqrt{4x\cdot 3}}}_{\sqrt{4x}+\sqrt{3}=2\sqrt{x}+\sqrt{3}}$

Luego, la expresión queda

$$M=2(\sqrt{x}+\sqrt{2})-(2\sqrt{x}+\sqrt{3})=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

Como nos piden su radical doble

$$2\sqrt{2}-\sqrt{3}=\sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}=\sqrt{8+3-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}$$

$\therefore\ M=\sqrt{11-4\sqrt{6}}$

Problema 9

¿Cuál es el equivalente de

$\sqrt{18+2\sqrt{56}-2\sqrt{24}-2\sqrt{21}}$?

Resolución

Recuerde

$$\sqrt{a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}}$$

Entonces

$$\sqrt{\underbrace{18}_{8+7+3}+2\underbrace{\sqrt{56}}_{8\cdot 7}-2\underbrace{\sqrt{24}}_{8\cdot 3}-2\underbrace{\sqrt{21}}_{7\cdot 3}}$$

Luego, será equivalente a $\sqrt{8}+\sqrt{7}-\sqrt{3}$.

Problema 10

¿Cuál es el equivalente de $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$?

Resolución

Sea $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=x+y\sqrt{3}$; $x,y\in\mathbb{Q}$

Elevamos al cubo

$$26+15\sqrt{3}=x^3+3x^2y\sqrt{3}+3xy^2\cdot 3+\sqrt{3}^3y^3$$
$$=x^3+9xy^2+(3x^2y+3y^3)\sqrt{3}$$

De donde se tiene el sistema

$$\begin{cases} x^3+9xy^2=26; \\ 3x^2y+3y^3=15; \quad x, y \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

que es equivalente a

$$\begin{cases} x\left(x^2+9y^2\right)=26 \\ y\left(x^2+y^2\right)=5 \end{cases}$$

El sistema se resuelve para $x=2, y=1$.

$\therefore \ \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

Problema 11

Simplifique la expresión S.

$$S=\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{12}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$$

e indique el denominador racionalizado del resultado.

Resolución

Racionalizamos cada bloque

- $$\underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}$$
$$=2(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

- $$\underbrace{\frac{12}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}}\cdot\underbrace{\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}}=\frac{12(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{3^2\cdot 2-2^2\cdot 3}$$
$$=\frac{\cancel{12}(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{\cancel{18-12}}=2(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$$

Luego, lo pedido es:

$$S=2(\sqrt{3}+\sqrt{2})-2(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$$

$\rightarrow \ S=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-6\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

$\rightarrow \ S=-2\sqrt{3}-4\sqrt{2}$

Por lo tanto, su denominador es 1.

Problema 12

Simplifique $M=\dfrac{(5-\sqrt{24})(\sqrt{75}+\sqrt{50})}{\sqrt{75}-\sqrt{50}}$.

Resolución

- $5-\sqrt{24}=\underset{3+2}{\underset{\wedge}{5}}-\underset{3\cdot 2}{\underset{\wedge}{2\sqrt{6}}}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

- $\sqrt{75}\pm\sqrt{50}=5\sqrt{3}\pm 5\sqrt{2}=5(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})$

Luego, lo pedido es:

$$M=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{\cancel{2}}\cdot\cancel{5}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\cancel{5}\,\cancel{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

$\therefore \ M=\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2=3-2=1$

Problema 13

Indique el denominador racionalizado y simplificado de $\dfrac{A}{\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}+2}$ si A es impar y no es múltiplo de 3.

Resolución

Racionalizamos el denominador convenientemente

$$\underbrace{\frac{A}{(\sqrt{2}+2)+\sqrt[4]{2}}}\cdot\underbrace{\frac{(\sqrt{2}+2)-\sqrt[4]{2}}{(\sqrt{2}+2)-\sqrt[4]{2}}}$$

$$(\sqrt{2}+2)^2-(\sqrt[4]{2})^2\equiv 6+3\sqrt{2}$$

Se tiene

$$\frac{A(\sqrt{2}+2-\sqrt[4]{2})}{6+3\sqrt{2}}=\frac{A(\sqrt{2}+2-\sqrt[4]{2})}{3\underbrace{(2+\sqrt{2})}}\cdot\underbrace{\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$$

$$2^2-2=2$$

Por lo tanto, su denominador es $3\cdot 2=6$

Problema 14

Halle m y n en el polinomio

$P_{(x)}=81x^4+216x^3+216x^2+mx+n$, para que su raíz cuadrada sea $\left(\dfrac{m-n-10}{8}\right)x^2$ aumentado en cuatro veces su residuo.

Resolución

Aplicando el método para extraer raíz cuadrada

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{81x^4+216x^3+216x^2+mx+n} & 9x^2+12x+4 \\
\underline{-81x^4} & \\
\quad 216x^3+216x^2 & \underline{2(9x^2)=18x^2} \\
\quad \underline{-216x^3-144x^2} & (18x^2+12x)(12x) \\
\qquad 72x^2+mx+n & \underline{=216x^3+144x^2} \\
\qquad \underline{-72x^2-96x-16} & (18x^2+24x+4)(4) \\
\qquad \underbrace{(m-96)x+n-16}_{\text{resto}} & \underline{=72x^2+96x+16}
\end{array}
$$

Luego tenemos por el dato

$$9x^2+12x+4\equiv\left(\frac{m-n-10}{8}\right)x^2+4[(m-96)x+n-16]$$

$$\rightarrow \frac{m-n-10}{8}=9 \rightarrow m-n=82$$

También

$$4(m-96)=12 \wedge 4(n-16)=4$$

Entonces

$$m=99 \wedge n=17$$

Problema 15

Si la raíz cuadrada del polinomio

$P_{(x)}=ax^6+bx^5+8x^4+4x^3+16x^2+16x+4$ es exacta, calcule el valor de $\dfrac{a-b}{a}$.

Resolución

Por conveniencia, el polinomio se ordena en forma creciente con respecto a x, es decir

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{4+16x+16x^2+4x^3+8x^4+bx^5+ax^6} & 2+4x+x^3 \\
\underline{-4} & \underline{2(2)=4} \\
\quad 16x+16x^2 & \underline{(4+4x)(4x)} \\
\quad \underline{-16x-16x^2} & \underline{=16x+16x^2} \\
\qquad 4x^3+8x^4+bx^5+ax^6 & \underline{2(2+4x)=4+8x} \\
\qquad \underline{-4x^3-8 \qquad -x^6} & \underline{(4+8x+x^3)(x^3)} \\
\qquad \underbrace{bx^5+(a-1)x^6}_{\text{resto}} & \underline{=4x^3+8x^4+x^6}
\end{array}
$$

Como el resto es idénticamente nulo, entonces

$$b=0 \wedge a=1$$

$$\therefore \frac{a-b}{a}=1$$

> **Nota**
> El polinomio $P_{(x)}$ es ordenado en forma creciente puesto que tiene raíz cuadrada exacta.

Problema 16

Halle el mínimo valor de $a+b$, con $\{a;b\}\subset\mathbb{Z}^+$, si $P_{(x)}=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ tiene raíz cuadrada exacta.

Resolución

Considerando un polinomio raíz de segundo grado

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1\equiv(x^2+mx+1)^2$$

Desarrollando en el segundo miembro

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1\equiv x^4+2mx^3+(m^2+2)x^2+2mx+1$$

Igualando coeficientes

$$a=2m;\quad b=m^2+2$$

Sumando

$$a+b=m^2+2m+2=(m+1)^2+1$$

Por lo tanto, el mínimo de $a+b$ es 1.

Problema 17

Si el polinomio

$P_{(x)}=4x^{30}-4x^{18}+12x^{15}+x^6+mx^3+9$

tiene raíz cuadrada exacta, halle el valor de m.

Resolución

Considerando un polinomio raíz de grado 15, convenientemente se tendrá

$$4x^{30}-4x^{18}+12x^{15}+x^6+mx^3+9\equiv(2x^{15}-x^3+3)^2.$$

Efectuando

$$4x^{30}-4x^{18}+12x^{15}+x^6+mx^3+9$$
$$\equiv 4x^{30}-4x^{18}+12x^{15}+x^6-6x^3+9$$

Igualando coeficiente, tendremos $m=-6$.

Problema 18

Transforme a radical doble la expresión

$\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3};\quad x>3.$

Resolución

Recordemos que

$$\sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}=\sqrt{a+b\pm2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b};\ a>b>0$$

Entonces

$$\sqrt{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3})^2}=\sqrt{x-2+x-3+2\sqrt{(x-2)(x-3)}}$$
$$2=\sqrt{2x-5+2\sqrt{x^2-5x+6}}$$

Problema 19

Reduzca $S=\dfrac{1}{\sqrt{5+\sqrt{24}}}+\dfrac{3}{\sqrt{9+\sqrt{72}}}-\dfrac{4}{\sqrt{8+\sqrt{48}}}$.

Resolución

Transformando los denominadores a radicales simples y racionalizando

$$\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{3\cdot2}}}=\frac{1(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{9+2\sqrt{6\cdot3}}}=\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}=\sqrt{6}-\sqrt{3}$$

$$\frac{4}{\sqrt{8+2\sqrt{6\cdot2}}}=\frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

Reemplazando tenemos

$$S=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})=0$$

Problema 20

Calcule el valor de E.

$$E=\sqrt{3+\sqrt{7}}\left(\sqrt{13+\sqrt{7}}-\sqrt{5+\sqrt{7}}\right)$$

Resolución

Efectuando

$$E=\underbrace{\sqrt{(13+\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}}-\underbrace{\sqrt{(5+\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}}$$
$$\rightarrow\ E=\sqrt{46+16\sqrt{7}}-\sqrt{22+8\sqrt{7}}$$

Transformando

$$E=\sqrt{46+2\sqrt{32\cdot14}}-\sqrt{22+2\sqrt{14\cdot8}}$$
$$\rightarrow\ E=\sqrt{32}+\sqrt{14}-(\sqrt{14}+\sqrt{8})=2\sqrt{8}-\sqrt{8}=\sqrt{8}$$
$$\therefore\ E=2\sqrt{2}$$

Problema 21

Reduzca la expresión M.

$$M=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{8}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$$

Resolución

Transformando el numerador y denominador

$$M=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(2\sqrt{2}+\sqrt{3-\sqrt{5}})}$$

$$\rightarrow\ M=\frac{2(\sqrt{5}+3)}{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\frac{2(\sqrt{5}+3)}{4+\sqrt{5}-1}=\frac{2(\sqrt{5}+3)}{3+\sqrt{5}}$$

$$\therefore\ M=2$$

Problema 22

La expresión $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ puede descomponerse a radicales simples. Halle dicha descomposición si se cumple $4A+B=4x^2+8x-16$.

Resolución

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{m}+\sqrt{n}$$

Elevando al cuadrado

$$A+\sqrt{B}=m+n+2\sqrt{mn}$$

$$A=m+n;\ B=4mn$$

Reemplazamos en la condición

$$4A+B=4(m+n)+4mn=4x^2+8x-16$$

$$\rightarrow\ m+n+mn=x^2+2x-4$$

$$\rightarrow\ \underbrace{m+n}+\underbrace{mn}=\underbrace{2x}+\underbrace{(x+2)(x-2)}$$

$$\rightarrow\ m=x+2\ \wedge\ n=x-2$$

$$\therefore\ \sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$$

Problema 23

Si el radical doble

$$\sqrt{2ax^2y+5bxz^4+\sqrt{(7ab-2c)x^3z^4}}$$

se descompone en radicales simples,

calcule el valor de $\dfrac{c}{ab}$.

Resolución

Recuerde que: $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y};\quad x>y,$

donde $x=\dfrac{A+C}{2}\ \wedge\ y=\dfrac{A-C}{2}$

además, $C=A^2-B$ es un cuadrado perfecto.

Aplicándolo al problema,

$$C=\left(2ax^2y+5bxz^4\right)^2-(7ab-2c)x^3yz^4$$

debe ser un cuadrado perfecto.

$$\rightarrow\ C=4a^2x^4y^2+(13ab+2c)x^3yz^4+25x^2z^8b^2$$

$$\rightarrow\ C=\left(2ax^2y\right)^2+\underbrace{(13ab+2c)x^3yz^4}_{\text{doble producto}}+\left(5xz^4b\right)^2$$

Luego se cumplirá

$$2\left(2ax^2y\right)\left(5bxz^4\right)=(13ab+2c)x^3yz^4$$

$$\rightarrow\ 20ab=13ab+2c$$

$$\rightarrow\ 7ab=2c$$

$$\therefore\ \frac{c}{ab}=\frac{7}{2}=3{,}5$$

Problema 24

Halle el valor de a en la ecuación

$$\frac{\sqrt{17-2\sqrt{72}}}{\sqrt{3-\sqrt{8}}}+7=\sqrt{a+2\sqrt{72}}\ .$$

Resolución

Nótese que $\left(3-\sqrt{8}\right)^2=17-2\sqrt{72}$.

$$\rightarrow\ \frac{\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^2}{\sqrt{3-\sqrt{8}}}+7=\underbrace{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}_{\sqrt{2}-1}+7=\sqrt{2}+6$$

$$6+\sqrt{2}=\sqrt{a+2\sqrt{72}}$$

Elevamos al cuadrado

$$38+12\sqrt{2}=a+2\sqrt{72}$$

$$38+2\sqrt{72}=a+2\sqrt{72}$$

$$\therefore\ a=38$$

Problema 25

Halle la raíz cuadrada de M.

$$M=\sqrt{3y}+y^2+2y\sqrt{2x}+\sqrt{4x^2+3y-4x\sqrt{3y}}$$

si $2x>\sqrt{3y}>0$.

Resolución

Nótese que:

$$\sqrt{4x^2-4x\sqrt{3y}\left(\sqrt{3y}\right)^2}=\sqrt{\left(2x-\sqrt{3y}\right)^2}=2x-\sqrt{3y}$$

$$\rightarrow\ M=\sqrt{3y}+y^2+2y\sqrt{2x}+2x-\sqrt{3y}$$

$$\rightarrow\ M=\sqrt{y^2+2y\sqrt{2x}+\left(\sqrt{2x}\right)^2}=\sqrt{\left(y+\sqrt{2x}\right)^2}=y+\sqrt{2x}$$

Por lo tanto, la raíz cuadrada M es $y+\sqrt{2x}$.

Problema 26

Calcule el valor de A y B en la ecuación

$$\sqrt[4]{8x^2+24x+9+4(2x+3)\sqrt{x^2+3x}}\equiv\sqrt{x+A}+B\sqrt{x}.$$

Resolución

Nótese que el primer miembro de la ecuación puede escribirse así:

$$\sqrt{\sqrt{(2x+3)^2+4x(x+3)+2\sqrt{4x(x+3)(2x+3)^2}}}$$

$$=\sqrt{2x+3+2\sqrt{x(x+3)}}=\sqrt{x}+\sqrt{x+3}$$

Entonces la ecuación se escribe así

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x+A}+B\sqrt{x}$$

$$\therefore\ A=3\ \wedge\ B=1$$

Problema 27

Halle el valor de S.

$$S=\sqrt{x+1+\sqrt{2x+1}}+\sqrt{x+1-\sqrt{2x+1}}$$

para $-\dfrac{1}{2}<x<0$.

Resolución

S puede escribirse así:

$$S=\frac{\sqrt{2x+2+2\sqrt{2x+1}}+\sqrt{2x+2-2\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow\ S=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2x+1}\right)^2}}{\sqrt{2}}$$

Pero

$$-1<2x<0$$

$$0<2x+1<1$$

$$0<\sqrt{2x+1}<1$$

$$0>-\sqrt{2x+1}>-1$$

$$1>1-\sqrt{2x+1}>0$$

Luego se tiene

$$S=\frac{\sqrt{2x+1}+1+1-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Problema 28

Calcule a y b en la siguiente ecuación.

$$\frac{\sqrt{3+\sqrt{10}}+\sqrt{-3+\sqrt{10}}}{\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{10}}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

Resolución

Transformamos el numerador

$$N=\sqrt{3+\sqrt{10}}+\sqrt{-3+\sqrt{10}}$$

Elevamos al cuadrado

$$N^2=2\sqrt{10}+2\sqrt{(1)}=2\left(\sqrt{10}+1\right)$$

$$\rightarrow\ N=\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{10}+1}$$

Luego

$$\frac{N}{D}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{\sqrt{10}+1}\right)\left(\sqrt{\sqrt{10}-3}\right)}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{10}+3}\left(\sqrt{\sqrt{10}-3}\right)}$$

$$\frac{N}{D}=\sqrt{7-2\sqrt{10}}$$

entonces

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

$$\therefore\ a=5\ \wedge\ b=2$$

Problema 29

Transforme en radicales simples la expresión M

$$M=\sqrt{3x+\sqrt{6x(1+2a)-1-4a(a+1)}}.$$

Resolución

Transformamos convenientemente

$$M=\sqrt{3x+\sqrt{6x(1+2a)-(2a+1)^2}}$$

Factorizamos

$$M=\sqrt{3x+\sqrt{(2a+1)[6x-(2a+1)]}}$$

Operamos convenientemente (multiplicando y dividiendo por $\sqrt{2}$)

$$M=\frac{\sqrt{6x+2\sqrt{(2a+1)[6x-(2a+1)]}}}{\sqrt{2}}$$

Como $6x=(2a+1)+(6x-(2a+1))$

$$\rightarrow\ M=\sqrt{\frac{2a+1}{2}}+\sqrt{\frac{6x-(2a+1)}{2}}$$

Problema 30

Si el polinomio $P_{(x)}=16x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+1$ admite raíz cuadrada exacta, halle $P_{(-1)}+P_{(1)}$, sabiendo que sus coeficientes son enteros positivos, además $C^2-4C-5=A-B$.

Resolución

Puede escribirse en la forma: $P_{(x)}\equiv(4x^2+mx+1)^2$

Desarrollamos

$$16x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+1\equiv16x^4+8mx^3+$$
$$+(m^2+8)x^2+2mx+1$$

se tendrá $A=8m;\ B=m^2+8;\ C=2m$

Del dato: $4m^2-8m-5=8m-m^2-8$

$\rightarrow\ 5m^2-16m+3=0$

Factorizamos

$$5m^2-16m+3=0$$

$$\begin{array}{ll} 5m & -1 \\ m & -3 \end{array}$$

$\rightarrow\ (5m-1)(m-3)=0;\ m\in\mathbb{Z}^+$

$\rightarrow\ m=3$

Luego tenemos

$$P_{(x)}=16x^4+24x^3+17x^2+6x+1$$

$\therefore\ P_{(-1)}+P_{(1)}=68$

Problema 31

Halle la raíz cuadrada de

$$M=(a^2+ab+bc+ac)(b^2+ab+bc+ac)$$
$$(c^2+ab+bc+ac)$$

si $\{a;b;c\}\subset\mathbb{R}^+$.

Resolución

Factorizando por agrupación se tiene

$$M=[a(a+b)+c(a+b)][b(b+a)+c(b+a)]$$
$$[c(c+a)+b(a+c)]$$

$$M=(a+b)(a+c)(a+b)(b+c)(c+a)(c+b)$$

$$M=(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2$$

$$\sqrt{M}=\sqrt{(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2}$$

$\therefore\ \sqrt{M}=(a+b)(a+c)(b+c)$

Problema 32

Halle los valores de $m;\ n;\ p$ si se sabe que la raíz cuadrada de $mx^6+nx^5+px^4-22x^3+25x^2-8x+16$ es exacta.

Resolución

Aplicamos el método de la raíz cuadrada, pero en forma conveniente.

Como la raíz cuadrada es exacta, entonces debe cumplirse

$r_{(x)}=(p-13)x^4+(n+12)x^{15}+(m-4)x^6\equiv 0$, de aquí $m=4$, $n=-12 \wedge p=13$.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{16-8x+25x^2-22x^3+px^4+nx^5+mx^6} & 4-x+3x^2-2x^3 \\
\underline{-16} & \underline{2(4)=8} \\
\quad -8x+25x^2 & \underline{(8-x)(-x)} \\
\quad \underline{8x-\ \ x^2} & \underline{2(4-x)=8-2x} \\
\qquad 24x^2-22x^3+px^4 & \underline{(8-2x+3x^2)3x^2} \\
\qquad \underline{-24x^2+6x^3-9x^4} & \underline{2(4-x+3x^2)} \\
\qquad\quad -16x^3+(p-9)x^4+nx^5+mx^6 & (8-2x+6x^2-2x^3)(-2x^3) \\
\qquad\quad \underline{16x^3-\qquad 4x^4+12x^5-4x^6} & \\
\qquad (p-13)x^4+(n+12)x^5+(m-4)x^6 &
\end{array}
$$

Problema 33

Dado el polinomio

$P_{(x)}=(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+...+(x+n)^2$,

¿cuál es el polinomio que debe adicionarse para que la expresión sea un cuadrado perfecto?

Resolución

Reduciendo $P_{(x)}$ tenemos

$$P_{(x)}=nx^2+2x(1+2+...+n)+\left(1^2+2^2+...+n^2\right) \rightarrow P_{(x)}=nx^2+n(n+1)x+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Para que sea cuadrado perfecto le sumamos A.

$$\rightarrow P_{(x)}=nx^2+n(n+1)x+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+A$$

su discriminante debe ser cero: $\Delta=0$

Luego de operar queda $4n\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+A\right]=n^2(n+1)^2$

Efectuando

$$A=\frac{(1-n)(n)(1+n)}{12}$$

Problema 34

Racionalice e indique el denominador racionalizado de $\dfrac{8}{\left(1+\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{8}\right)^2-\sqrt[5]{8}}$.

Resolución

Hacemos $\sqrt[5]{2}=x \;\rightarrow\; x^5=2$

Luego se tiene

$$\frac{8}{\left(1+x+x^2+x^3\right)^2-x^3}.$$

Pero

$$x^3+x^2+x+1=\frac{x^4-1}{x-1}$$

Entonces

$$\frac{8}{\left(\dfrac{x^4-1}{x-1}\right)^2-x^3}=\frac{8(x-1)^2}{(x^4-1)^2-x^3(x-1)^2}$$

Efectuando se tiene

$$\frac{8(x-1)^2}{x^8-\cancel{2x^4}+1-x^5+\cancel{2x^4}-x^3}=\frac{8(x-1)^2}{(x^5-1)(x^3-1)}$$

Reemplazando

$$\frac{8\left(\sqrt[5]{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt[5]{2^5}-1\right)\left(\sqrt[5]{2^3}-1\right)}=\frac{8\left(\sqrt[5]{2}-1\right)^2}{\sqrt[5]{2^3}-1}$$

$$\underbrace{\frac{8\left(\sqrt[5]{2}-1\right)^2}{\sqrt[5]{8}-\sqrt[5]{1}}}\cdot\underbrace{\frac{\mathrm{FR}}{\mathrm{FR}}}=\frac{8\left(\sqrt[5]{2}-1\right)^2\mathrm{FR}}{8-1}$$

Por lo tanto, su denominador es 7.

Problema 35

Halle el radical doble equivalente a M.

$$M=\sqrt{\sqrt[3]{x}+4+2\sqrt{2}\,\sqrt[6]{8x}}-\sqrt{\sqrt[3]{x}+3+2\sqrt{3}\,\sqrt[6]{x}}$$

Resolución

Observamos que

$$\left(\sqrt[3]{x}+2\sqrt{2}\,\sqrt[6]{8x}+4\right)\equiv\sqrt[6]{x}^2+4\sqrt[6]{x}+4=\left(\sqrt[6]{x}+2\right)^2$$

$$\sqrt[3]{x}+3+2\sqrt{3}\,\sqrt[6]{x}=\sqrt[6]{x}^2+2\sqrt{3}\,\sqrt[6]{x}+\sqrt{3}^2\equiv\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt{3}\right)^2$$

Luego tenemos

$$M=\sqrt{\left(\sqrt[6]{x}+2\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\rightarrow\; M=\cancel{\sqrt[6]{x}}+2-\cancel{\sqrt[6]{x}}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$$

cuyo radical doble es $\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$

$$\rightarrow\; M=\sqrt{4+3-2\cdot 2\sqrt{3}}=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

Problema 36

Si a, b, c son positivos y además $c>b>a$, indique el denominador racionalizado de S.

$$S=\frac{3abc}{\sqrt{a+b+c+\sqrt{4ac-3b^2+6bc-2ab}}}.$$

Resolución

Nótese que:

$$4ac-3b^2+6bc-2ab=$$

$$=2a(2c-b)+3b(2c-b)=(2c-b)(2a+3b)$$

Entonces

$$S=\frac{3abc}{\sqrt{\underbrace{a+b+c}+\sqrt{(2c-b)(2a+3b)}}}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$$

$$\rightarrow\; S=\frac{3\sqrt{2}abc}{\underbrace{\sqrt{2a+2b+2c}}_{x+y}+2\underbrace{\sqrt{(2c-b)(2a+3b)}}_{x\cdot y}}$$

Racionalizando

$$\rightarrow\; S=\underbrace{\frac{3\sqrt{2}abc}{\sqrt{2c-b}+\sqrt{2a+3b}}}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{2c-b}-\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2c-b}-\sqrt{2a+3b}}}$$

$$\rightarrow\; S=\frac{3\sqrt{2}abc\left(\sqrt{2c}-b-\sqrt{2a+3b}\right)}{2c-b-2a-3b}$$

$$\rightarrow\ S=\frac{3\sqrt{2}abc\left(\sqrt{2c-b}-\sqrt{2a+3b}\right)}{2c-2a-4b}$$

$$\rightarrow\ S=\frac{3\sqrt{2}abc\left(\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2c-b}\right)}{2(a+2b-c)}$$

Por lo tanto, el denominador racionalizado es $2(a+2b-c)$.

Problema 37

Si m y n se diferencian en 1, racionalice M.

$$M=\frac{1}{\sqrt[2(n+1)]{2^{C_n^m}}+\sqrt[3(n+1)]{3^{C_n^m}}}$$

e indique el denominador; además $C_n^m=C_n^{n+1}$.

Resolución

Como

$$C_n^m=C_n^{n+1}\ \rightarrow\ m=n+1$$

Luego

$$M=\frac{1}{\sqrt[2(n+1)]{2^{n+1}}+\sqrt[3(n+1)]{3^{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{3}}$$

es equivalente a

$$M=\frac{1}{\sqrt[6]{2^3}+\sqrt[6]{3^2}}=\frac{1}{\sqrt[6]{9}+\sqrt[6]{8}}\cdot\frac{\text{FR}}{\text{FR}}=\frac{\text{FR}}{9-8}=\frac{\text{FR}}{1}$$

Por lo tanto, el denominador es 1.

Problema 38

Racionalice y proporcione su denominador en

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^3-2\sqrt{2}-3\sqrt{3}-5\sqrt{5}}.$$

Resolución

Calculamos el denominador

$$D=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^3-\sqrt{2}^3-\sqrt{3}^3-\sqrt{5}^3$$

Desarrollando D.

$$=\sqrt{2}^3+\sqrt{3}^3+\sqrt{5}^3+3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)-\sqrt{2}^3-\sqrt{3}^3-\sqrt{5}^3$$

$$=\frac{1}{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}$$

$$D=\frac{1\cdot\text{FR}}{3(3-2)(5-3)(5-2)}=\frac{\text{FR}}{18}$$

Por lo tanto, el denominador es 18.

Problema 39

Si se verifica que

$$2a=\sqrt{\frac{a}{8}}+\sqrt{\frac{8}{a}};\quad 2b=\sqrt{\frac{b}{8}}+\sqrt{\frac{8}{b}},$$

donde $1<b<a<2$.

Halle el equivalente de E.

$$E=\sqrt{\frac{a}{b}}\left(\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}\right)\left(\frac{\sqrt{b+1}-\sqrt{b-1}}{\sqrt{b+1}+\sqrt{b-1}}\right).$$

Resolución

Del primer dato

$$2a\pm2=\sqrt{\frac{a}{8}}+\sqrt{\frac{8}{a}}\pm2$$

$$2(a\pm1)=\left(\sqrt[4]{\frac{8}{a}}\pm\sqrt[4]{\frac{a}{8}}\right)^2$$

de donde

$$\sqrt{2}\sqrt{a+1}=\sqrt[4]{\frac{8}{a}}+\sqrt[4]{\frac{a}{8}}\qquad(\alpha)$$

$$\sqrt{2}\sqrt{a-1}=\sqrt[4]{\frac{8}{a}}-\sqrt[4]{\frac{a}{8}}\qquad(\beta)$$

De $(\alpha)+(\beta)$

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}\right)=2\sqrt[4]{\frac{8}{a}}\qquad(\text{I})$$

De $(\alpha)-(\beta)$

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}\right)=2\sqrt[4]{\frac{a}{8}} \qquad \text{(II)}$$

De (I) ÷ (II)

$$\frac{\cancel{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}\right)}{\cancel{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}\right)}=\frac{\cancel{2}\sqrt[4]{\frac{8}{a}}}{\cancel{2}\sqrt[4]{\frac{a}{8}}}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}=\sqrt[4]{\frac{8^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{8}{a}}$$

$$\rightarrow \sqrt{a}\cdot\left(\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}\right)=\sqrt{8} \qquad (*)$$

Similarmente $2b=\sqrt{\frac{b}{8}}+\sqrt{\frac{8}{b}}$

Se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{b+1}-\sqrt{b-1}}{\sqrt{b+1}+\sqrt{b-1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{8}} \qquad (**)$$

Reemplazando (*) y (**) en E

$$E=\sqrt{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}=1$$

Problema 40

Si $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$, calcule $a+b+c$ sabiendo que $a, b, c \in \mathbb{Q}$ y además $b<0$.

Resolución

Racionalizando en el radicando

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}^2+\sqrt[3]{2}+1}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}^2+\sqrt[3]{2}+1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1}}$$

Multiplicando y dividiendo por $\sqrt[3]{3}$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}^2+3\sqrt[3]{2}+3}}$$

Escribiendo 3 como $\sqrt[3]{2}^3+1$

$$=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{2}+1\right)^3}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{\underbrace{\sqrt[3]{2}+1}}\cdot\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{\underbrace{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right)}{2+1}=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

Luego: $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}+\sqrt[3]{-\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

$$\rightarrow a=\frac{4}{9};\quad b=-\frac{2}{9};\quad c=\frac{1}{9}$$

$$\therefore\ a+b+c=\frac{1}{3}$$

Test 9

1. Indique cuál es el resto al extraer la raíz cuadrada del polinomio $P_{(x)}=16x^2-24x+1$.

A) 3 B) −8 C) 8
D) 7 E) −3

2. Dado el polinomio
$S_{(x)}=4x^4+16x^3-5x+2$.
Si $R_{(x)}$ es la raíz cuadrada y $r_{(x)}$ su residuo, calcule $R_{(0)}+r_{(1)}$.

A) 8 B) 9 C) 7
D) 10 E) 15

3. Si el polinomio
$M_{(x)}=x^4+4x^3+8x^2-ax+b$
tiene raíz cuadrada exacta, calcule el valor de ab.

A) −16 B) 16 C) 32
D) −32 E) −12

4. Si la raíz cuadrada del polinomio
$P_{(x)}=x^4-6x^3+5x^2+ax+b$
deja como resto $3x+1$,
indique lo correcto.

A) $a=2b$ B) $a=b$ C) $a<b$
D) $a=3b$ E) $a=b+5$

5. Efectúe $\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{7-\sqrt{40}}-\sqrt{5}$.

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$
D) $2+\sqrt{5}$ E) $3+\sqrt{2}$

6. Calcule n si se cumple lo siguiente
$\sqrt{6+2n\sqrt{10+2\sqrt{8-2\sqrt{7}}}}=\sqrt{7}+1$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

7. Indique uno de los radicales simples que se obtiene luego de transformar el siguiente radical doble $\sqrt{5+\sqrt{21}}$.

A) $\sqrt{\frac{7}{2}}$ B) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{\frac{5}{2}}$

8. Si el radical doble $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ es equivalente a
$\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{\frac{b}{2}}$; $a>b>0$,
calcule el valor de $a-b$.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

9. La expresión equivalente de $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$ es

A) $\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$ B) $\frac{\sqrt[3]{27}}{2}$ C) $\frac{\sqrt[3]{18}}{3}$
D) $\frac{\sqrt[3]{16}}{3}$ E) $\frac{2\sqrt[3]{6}}{3}$

10. Luego de racionalizar y simplificar la expresión irracional $\frac{5}{\sqrt{75}-\sqrt{45}}$,
calcule el denominador del resultado.

A) 1 B) 6 C) 5
D) 3 E) 15

11. Simplifique la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}.$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) 0
D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

12. Luego de racionalizar la expresión

$\dfrac{4}{a+b-2\sqrt{ab}}$, indique su denominador.

A) $a-b$ B) $a+b$ C) a^2-b^2
D) ab E) a^2+b^2

CLAVES

1 B	3 D	5 B	7 A	9 C	11 C
2 B	4 D	6 B	8 B	10 B	12 E

Problemas PROPUESTOS

Nivel I

1. ¿Cuál es el resto que se obtiene luego de extraer la raíz cuadrada del polinomio $P_{(x)}=25x^2-40x+17$?

A) -1 B) 1 C) 8
D) -8 E) 16

2. Sea $R_{(x)}$ la raíz cuadrada del polinomio $T_{(x)}=4x^4+12x^2-5x+2$ y $r_{(x)}$, su residuo. Calcule el valor de $R_{(1)}+r_{(0)}$.

A) -2 B) 2 C) -3
D) 4 E) -4

3. Si el polinomio $P_{(x)}=x^4+8x^3+ax^2+bx+1$, $b>0$, tiene raíz cuadrada exacta; calcule el valor de $a-b$.

A) 6 B) -2 C) 8
D) 10 E) -1

4. Luego de extraer la raíz cuadrada del polinomio
$P_{(x)}=16x^4-24x^3+ax^2+bx+6;\ b>10$
se obtiene como resto $r_{(x)}=3x+2$.
Indique lo correcto.

A) $a=-7$ B) $b=14$ C) $a+b=9$
D) $a-b=22$ E) $A \wedge D$

5. Si se sabe que $\sqrt{a+2\sqrt{4b+8}}$ es equivalente a $\sqrt{a-2}+\sqrt{2b}$; con $a>b \wedge a;b \in \mathbb{N}$, descomponga en radicales simples el radical doble $\sqrt{a+b+2\sqrt{a+6b}}$.

A) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ B) $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ C) $\sqrt{7}+\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ E) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

6. Simplifique la expresión
$S=\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}+...+\sqrt{49-2\sqrt{600}}$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

7. Indique el valor de uno de los radicales simples luego de transformar la expresión
$\sqrt{1+2+3+...+10+10\sqrt{10}}$.

A) $\sqrt{50}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $5\sqrt{10}$
D) $2\sqrt{10}$ E) $5\sqrt{5}$

8. Se sabe que el radical doble $\sqrt{a+2\sqrt{b}}$, con $a>0 \wedge \sqrt{b} \in \mathbb{I}$, se puede escribir como $\sqrt{c}+\sqrt{d}$, tal que $c>d>0$.
Además $c=\dfrac{a+\Delta}{2}$; $d=\dfrac{a-\Delta}{2}$.
Determine la relación correcta.

A) $\Delta^2=a^2+b^2$
B) $\Delta^2=a^2-b^2$
C) $\Delta^2=a^2+4b$
D) $\Delta^2=a^2-4b$
E) $\Delta=a-b$

9. La siguiente expresión
$\sqrt{16-2\sqrt{20}-2\sqrt{28}+2\sqrt{35}}$ es equivalente a

A) $\sqrt{5}-\sqrt{7}+2$
B) $\sqrt{7}-\sqrt{5}+2$
C) $\sqrt{7}+\sqrt{5}-2$
D) $\sqrt{7}-\sqrt{5}-2$
E) $\sqrt{5}-\sqrt{7}-2$

10. Efectúe $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$.

A) 0 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}+1$
D) $\sqrt{3}-1$ E) $2\sqrt{3}$

11. Halle el equivalente de $\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{12}}{3+\sqrt{3}}}$.

A) $\sqrt{3}-1$ B) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}+1$ E) $\sqrt{3}-2$

12. ¿Cuál es el valor equivalente de la expresión $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}-2\sqrt{2}$?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{2}+2$

13. Respecto a la expresión

$$T=\frac{\sqrt{7+\sqrt{24}}+2}{\sqrt{5+\sqrt{24}}}$$

indique lo correcto.

A) $T<2$ B) $T=3$ C) $T^2=9$
D) $T^4=9$ E) $T^2<3$

14. Racionalice y simplifique la expresión

$$\frac{2}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{4}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$$

e indique el denominador racional.

A) 3 B) 6 C) 8
D) 4 E) 2

15. Efectúe y simplifique la expresión

$$f_{(a)}=\left[\frac{1}{a^2-1}\left\{\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}-\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right\}\right];\ a\in\mathbf{Z}^+$$

e indique el denominador entero.

A) $2a$ B) $4a$ C) a
D) a^2 E) $2a^2$

16. Sean x e y dos números tales que

$$x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}};\quad y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

¿Cuál es el valor de $10x^2-18xy+10y^2$?

A) 800 B) 472 C) 750
D) 250 E) 732

17. Indique el denominador luego de racionalizar y simplifique la expresión $\dfrac{12}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{35}}$.

A) 1 B) 7 C) 4
D) 2 E) 14

18. ¿Cuál es el equivalente de la expresión

$$\frac{2(\sqrt{15}-\sqrt{7})}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}?$$

A) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}-1$
B) $\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{3}-1$
C) $1+\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$
D) $\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}-1$
E) $\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-1$

19. Racionalice la expresión $\dfrac{8}{\sqrt{15}+\sqrt{5}-\sqrt{3}-1}$ e indique el denominador racional.

A) 1 B) 3 C) 5
D) 2 E) 4

20. Simplifique la expresión

$$f_{(x)}=\frac{1}{\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}};\ x>0.$$

A) 2 B) 1/4 C) 1/2
D) 1 E) 1/3

Nivel II

21. Luego de efectuar
$\sqrt[2]{7+5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[7]{1-\sqrt{2}}$ se obtiene

A) -1 B) 1 C) 2
D) -3 E) -7

22. Indique uno de los radicales simples de la expresión
$\sqrt{1+2\sqrt{1+\ldots+2\sqrt{1+2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}}$.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{6}$ E) $-\sqrt{3}$

23. Si el polinomio $P_{(x)}=1+\alpha x+9x^2+\beta x^3+16x^4$ posee raíz cuadrada exacta, calcule el valor de $\alpha\beta$.

A) 0 B) -8 C) 8
D) -16 E) 16

24. El valor reducido de la expresión
$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{6}\right)^4$ es

A) 125 B) 100 C) 96
D) 80 E) 576

25. Halle uno de los radicales simples de la expresión
$\sqrt{x^2+1-2\sqrt{x^3-2x^2+3x-2}}$; $x>1$.

A) $\sqrt{x^2-x+1}$ B) $\sqrt{x^2+x-2}$
C) $\sqrt{x^2-x+2}$
D) $\sqrt{x-1}$ E) C $\vee$ D

26. El radical doble $\sqrt{24+8\sqrt{5}+12\sqrt{3}+4\sqrt{15}}$ equivale a $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{w}$.
Calcule el valor de $xyzw$.

A) 200 B) 225 C) 215
D) 23 E) 25

27. Calcule el valor de $(m+n)$, si se sabe que el cuadrado del resto es igual a la raíz cuadrada del polinomio
$P_{(x)}=81x^4+216x^3+216x^2+mx+n$.

A) 117 B) 115 C) 100
D) 99 E) 81

28. Si el radical doble $\sqrt{ax+by+\sqrt{xy(ab+c)}}$ se desdobla en radicales simples, calcule el valor de $\left(\dfrac{ab}{c}\right)$.

A) 3 B) 2 C) 1
D) 1/2 E) 1/3

29. Halle el equivalente de la expresión
$f_{(x)}=\sqrt{1+x+\sqrt{2x+1}}+\sqrt{1+x-\sqrt{2x+1}}$.
Considere $-0{,}5<x<0$.

A) $x+\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}-x$ C) $2x$
D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

30. Halle la raíz cúbica de la expresión M.
$M=9\sqrt{3}+11\sqrt{2}$

A) $\sqrt{2}+3$ B) $2+\sqrt{3}$ C) $1+\sqrt{6}$
D) $1+\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ E) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

31. El equivalente de la expresión irracional
$M=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ es

A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}+1$ C) $\sqrt{2}-1$
D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

32. Proporcione el denominador racional de la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}.$$

A) 1 B) 2 C) 5
D) 14 E) 15

33. Indique el denominador racional de la expresión

$$\frac{-6}{-2+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}.$$

A) 1 B) 2 C) −6
D) 7 E) 14

34. Calcule el valor del término racional del cociente que se obtiene al efectuar

$$\frac{16\sqrt[3]{4}-8\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt{2}}.$$

A) 16 B) 12 C) 24
D) 2 E) 1

35. Halle el denominador racional de la expresión

$$\frac{N}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{32}}.$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 6 E) 0

36. Descomponga en radicales sencillos la expresión

$$f_{(x;y)}=\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y}+\sqrt{\left(\frac{4}{x^2+xy}\right)+\left(\frac{4}{xy+y^2}\right)}}$$

e indique uno de los radicales simples.

A) $\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ B) $\sqrt{\frac{x+y}{2}}$ C) $\sqrt{\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}}$

D) $\sqrt{\frac{2}{x+y}}$ E) $\sqrt{\frac{1}{xy}}$

37. Halle el denominador racional de la expresión

$$M=\frac{\sqrt{16\cdot\cos(2\pi)}}{\sqrt{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[6]{6}\,(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1)}}.$$

A) 5 B) 2 C) 3
D) 8 E) 9

38. Halle el equivalente de la expresión irracional

$$\sqrt{\frac{6+\sqrt{12}}{3-\sqrt{3}}}.$$

A) $\sqrt{3}-1$ B) $2-\sqrt{3}$ C) $1+\sqrt{3}$
D) $2+\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

39. Indique el denominador racional de la expresión

$$M=\frac{9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{2^{1}}}}}}}{\sqrt[9]{9^8}-\sqrt[9]{9^7}+\ldots+1}.$$

A) 8 B) 9
C) 10
D) incalculable E) no se racionaliza

40. Halle el valor reducido de

$$M=\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{8}}}.$$

A) $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

41. Luego de racionalizar la expresión

$$f=\frac{323}{21-2\sqrt[3]{121}+\sqrt[3]{11}}$$

se obtiene otra expresión equivalente. Indique su denominador.

A) 50 B) 20 C) 40
D) 30 E) 10

42. Efectúe y simplifique

$$4\left[\frac{1}{1+\sqrt[4]{4}}+\frac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt[4]{4}}\right]\left[\frac{1}{1-\sqrt[4]{4}}+\frac{1}{1-\sqrt[4]{4}+\sqrt{3}}\right].$$

A) $13+5\sqrt{3}$ B) $5+13\sqrt{3}$ C) $5-13\sqrt{3}$
D) $13-5\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}-13$

43. Calcule el valor de a que verifica la ecuación

$$\frac{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}+7=\sqrt{a+2\sqrt{128}}$$

A) 60 B) 64 C) 66
D) 62 E) 68

44. Indique el denominador luego de racionalizar la expresión

$$M=\frac{5}{\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{12}}.$$

A) 2 B) 3 C) 1
D) 4 E) 5

45. Reduzca la expresión

$$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}+1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}.$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

46. Indique un radical simple de la expresión

$$f_{(x)}=\sqrt{\frac{2x+\sqrt{8x}}{4}+\sqrt[4]{2x^3}}.$$

A) $\sqrt[3]{x}$ B) $\sqrt{\frac{x}{2}}$ C) $\sqrt{x}$
D) $2\sqrt{x}$ E) $\sqrt{\frac{2}{x}}$

47. Si $x^2=x+1$; $x>0$, simplifique la expresión

$$P_{(x)}=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{\frac{x-1}{2}}.$$

A) $\frac{x^2}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{x^3}{\sqrt{2}}$ C) $\frac{x}{\sqrt{2}}$
D) 1 E) $\frac{-x^2}{\sqrt{2}}$

48. Determine el valor de
$m^2+m^2n^2+n^2-2m^2n+2mn^2-2mn$,
si se sabe que

$$m=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{29}+\sqrt{13}}{\sqrt{11}-\sqrt{29}+\sqrt{13}} \wedge n=\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{11}+\sqrt{13}}.$$

A) 2 B) 1 C) -1
D) -2 E) 3

49. Indique el denominador luego de racionalizar la expresión

$$f_{(x)}=\frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}.$$

A) $x+2$ B) $x+1$ C) $x-1$
D) $2x+1$ E) $2x-1$

50. Halle el equivalente de S.

$$S=\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}+\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+\frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}+\ldots(n \text{ sumandos})$$

A) $\sqrt{n}+1$ B) $\sqrt{n+1}-1$ C) $\sqrt{n}-1$
D) $\sqrt{n+1}+1$ E) $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$

51. Determine el denominador de la expresión que se obtiene al racionalizar

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a+b}}.$$

A) $3ab(a+b)$ B) $a+b$ C) a^2+b^2
D) ab E) $3ab$

52. Reduzca $M = \dfrac{7\sqrt{113+72\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-1} - 22\sqrt{2}$.

A) 3 B) 25 C) 12
D) 6 E) 15

53. Si $0 < a < 1$, halle el equivalente reducido de

$$f_{(a)} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}} + \sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}}\ .$$

A) a B) $1/a^2$ C) $1/a$
D) a^2 E) $2a$

54. Transforme a radicales simples la expresión

$$f_{(x)} = \sqrt{3x + \sqrt{6x(1+2a) - 4a(a+1) - 1}}$$

e indique un radical simple.

A) $\sqrt{\dfrac{1-2a}{2}}$ B) $\sqrt{\dfrac{1+2a}{2}}$

C) $\sqrt{\dfrac{2+a}{2}}$

D) $\sqrt{\dfrac{2-a}{2}}$ E) $\sqrt{\dfrac{6x+2a+1}{2}}$

55. Calcule el valor de

$$M = \frac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}} + (4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}} - (6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}\ .$$

A) $\dfrac{13}{5}$ B) $\dfrac{9}{13}$ C) $\dfrac{13}{7}$

D) $\dfrac{7}{13}$ E) $\dfrac{13}{9}$

56. Racionalice la expresión

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{a^2b} + \sqrt[4]{ab^2} + \sqrt[4]{b^3}}$$

e indique el denominador racional.

A) a^2+b^2 B) a^2-b^2 C) a^4+b^4
D) $a-b$ E) $a+b$

57. Si se cumple que $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$, calcule $a+b+c$.

A) $1/3+3\sqrt{2}$ B) 2 C) 1
D) 3 E) 1/3

58. Racionalice las siguientes expresiones

$$V = \frac{8}{(1+\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{8})^2 - \sqrt[5]{8}}$$

$$N = \frac{4}{(1-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1})(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}$$

$$I = \frac{100}{\sqrt[99]{9^{98}} - \sqrt[99]{9^{97}} + \sqrt[99]{9^{96}} - \ldots + 1}$$

y calcule el producto de los denominadores racionales positivos.

A) 7 B) 100 C) 1
D) 35 E) 14

59. Luego de racionalizar la expresión

$$M = \frac{1}{(\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[6]{243}+1) + \sqrt{3}(\sqrt[6]{3}+1)}\ ,$$

indique el denominador obtenido.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 12

60. Simplifique la expresión

$$\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1} - \frac{1}{a}\right),$$

si $0 < a < 1$.

A) -2 B) 2 C) -1
D) 1 E) 0

CLAVES
Problemas propuestos

NIVEL I

1 B	5 C	9 C	13 D	17 B
2 A	6 C	10 B	14 A	18 E
3 D	7 A	11 A	15 B	19 A
4 A	8 D	12 D	16 B	20 C

NIVEL II

21 A	29 E	37 A	45 B	53 C
22 A	30 E	38 C	46 B	54 B
23 E	31 E	39 C	47 C	55 D
24 E	32 B	40 E	48 D	56 D
25 E	33 D	41 D	49 C	57 E
26 B	34 A	42 E	50 B	58 A
27 A	35 C	43 C	51 A	59 C
28 E	36 A	44 A	52 B	60 C

Capítulo

X

Isaac Newton

Gottfried Wilhelm Leibniz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \times b^k$$

Binomio de Newton

CAPÍTULO X

BINOMIO DE NEWTON

Objetivos

- Aplicar las definiciones de factorial y combinatorio.
- Expandir o desarrollar polinómicamente $(x+a)^n$ para $n \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{Q}$.
- Calcular cualquier término de la expansión de $(x+a)^n$.

Introducción

El teorema del binomio fue descubierto por Abu Bakr ibn Muhammad ibn al-Husayn al-Karaji alrededor del año 1000. Newton utilizó los conceptos de exponentes generalizados mediante los cuales una expresión polinómica se transformaba en una serie infinita aplicando los métodos de interpolación y extrapolación de Wallis. Debido a esto pudo demostrar que un gran número de series existentes eran casos particulares, fuera por diferenciación o por integración. A partir de este descubrimiento, Newton intuyó que se podía operar con series infinitas de la misma manera que con expresiones polinómicas finitas.

El desarrollo del binomio de Newton que abordaremos desempeña un papel importante en los capítulos siguientes de álgebra y, en especial, en el análisis matemático que se estudia en los primeros ciclos en todas las carreras de ingeniería y ciencias. Por ello, mostraremos algunas de sus aplicaciones, por ejemplo, en la desigualdad de Bernoulli.

$$(1+x)^n \geq 1 + nx;\ \forall\, x \geq -1;\ n \in \mathbb{N}$$

Asimismo para demostrar: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$; donde $e=2{,}718281...$

También se observa la gran aplicación en la teoría de ecuaciones, desigualdades, funciones y fundamentalmente en la teoría de sucesiones y series, que son temas centrales en el análisis matemático real y complejo; por ello, citamos un ejemplo de una serie:

$1+x+x^2+x^3+... = (1-x)^{-1};\ \forall\, x \in \langle -1;\ 1\rangle$, el cual se comprueba así.

Sea $S=1+x+x^2+x^3+x^4+...$

$\rightarrow\ S=1+x(1+x+x^2+x^3+...)\ \rightarrow\ S=1+x\cdot S\ \rightarrow\ S-x\cdot S=1$

$\rightarrow\ (1-x)\cdot S=1,\ \forall\, x \in \langle -1;\ 1\rangle$

$\rightarrow\ S=1+x+x^2+x^3+...=\dfrac{1}{1-x}$

luego: $1+x+x^2+x^3+...=(1-x)-1$

DEFINICIONES PREVIAS

FACTORIAL DE UN NÚMERO NATURAL

Sea $n \in \mathbb{N}_0$ su factorial, denotado por $n!$ o $\underline{|n}$, se define como

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{si } n=0 \vee n=1 \\ 1\times 2\times 3 \ldots n, & \text{si } n\in\mathbb{N} \wedge n\geq 2 \end{cases}$$

Ejemplos

1. $5! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5 = 120$
2. $4!-3! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot 3 = 24-6 = 18$
3. Resuelva la siguiente ecuación
   $(2x-7)! = 1$

Resolución

De la definición

Si $(2x-7)! = 1 \rightarrow 2x-7=0 \vee 2x-7=1$,

de donde $x = \dfrac{7}{2} \vee x=4$

Por lo tanto, existen dos soluciones: $\dfrac{7}{2}$; 4

Propiedades del factorial

1. $n! = n(n-1)!, \ \forall n\in\mathbb{N}$
2. $a! = b! \rightarrow a=b, \ a;b\in\mathbb{N}$
3. $(n+1)! - n\cdot n! = n!$
4. $n! - (n-1)! = (n-1)\cdot(n-1)!$

Ejemplos

1. Simplifique S

$$S = \sqrt[3]{\frac{25!}{25!+26!+27!}}$$

Resolución

Sea $S = \sqrt[3]{\dfrac{25!}{25!+26\cdot 25!+27\cdot 26\cdot 25!}}$

$$\rightarrow S = \sqrt[3]{\frac{25!}{25!\,(1+26+27\cdot 26)}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27+27\cdot 26}}$$

$$\rightarrow S = \sqrt[3]{\frac{1}{27(1+26)}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27\cdot 27}}$$

$$\rightarrow S = \frac{1}{\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3\cdot 3} = \frac{1}{9}$$

2. ¿Cuál es el valor de x que verifica la ecuación?

$$\frac{x!+(x-1)!}{(x-1)!} = 2010$$

Resolución

Recordando que $x! = x(x-1)!$

$$\frac{x(x-1)!+(x-1)!}{(x-1)!} = 2010$$

$$\frac{\cancel{(x-1)!}\,(x+1)}{\cancel{(x-1)!}} = 2010$$

$\therefore \ x = 2009$

3. Resuelva la siguiente ecuación.
   $x! + x\cdot x! + (x+1)\cdot(x+1)! = 720$

Resolución

Como $x! + x\cdot x! = x!(1+x) = (x+1)!$

En la ecuación

$$\underbrace{x! + x\cdot x!} + (x+1)\cdot(x+1)! = 720$$

$$\rightarrow \underbrace{(x+1)! + (x+1)(x+1)!}$$

$$\rightarrow (x+1)!(1+x+1) = (x+2)! = 720$$

Pero $720 = 6!$

$\rightarrow (x+2)! = 6! \rightarrow x+2=6$

$\therefore \ x=4$

NÚMERO COMBINATORIO

El número combinatorio denotado por C_k^n representa el número total de combinaciones que se pueden realizar con n elementos tomados de k en k.

En una combinación, un grupo se diferencia de otro cuando por lo menos difieren en un elemento.

Se calculará del modo siguiente:

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!};\ n, k \in \mathbb{N} \ \wedge\ n \geq k$$

Ejemplos

1. $C_6^{10} = \dfrac{10!}{6!(10-6)!} = \dfrac{10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\ \cancel{4!}} = 210$

2. Simplifique M

$$M = \frac{C_{x-1}^x}{C_{x-2}^x}.$$

Resolución

Aplicando la definición de número combinatorio

$$M = \frac{\dfrac{x!}{(x-1)!(x-(x-1))!}}{\dfrac{x!}{(x-2)!(x-(x-2))!}}$$

$$M = \frac{\dfrac{x\cancel{(x-1)!}}{\cancel{(x-1)!} \cdot 1}}{\dfrac{x(x-1)\cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}\,2!}}$$

$$\rightarrow\ M = \frac{\cancel{x}}{\dfrac{\cancel{x}(x-1)}{2}} = \frac{2}{x-1}$$

3. Determine el valor de n que verifica la ecuación $3C_3^{2n} = 44C_2^n$.

Resolución

Aplicamos la definición del número combinatorio

$$3 \cdot \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 44\frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\frac{\cancel{3} \cdot (\cancel{2}n)(2n-1)(2n-2)\cancel{(2n-3)!}}{\cancel{6} \cdot \cancel{(2n-3)!}} = \frac{\cancel{44} \cdot n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{2} \cdot \cancel{(n-2)!}}$$

$$\cancel{n} \cdot (2n-1)\cancel{2} \cdot \cancel{(n-1)} = \cancel{22}\cancel{n}\cancel{(n-1)}$$

$$(2n-1) = 11 \ \rightarrow\ n = 6$$

Propiedades del número combinatorio

$$C_n^n = 1;\ C_0^n = 1;\ C_1^n = n;\ C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ejemplos

1. $C_0^7 = 1$
2. $C_1^{2x} = 2x$
3. $C_2^{3x-1} = \dfrac{(3x-1)(3x-2)}{2}$

Combinatorios complementarios

$$C_k^n = C_{n-k}^n \ \forall\, n; k \in \mathbb{N} \ \wedge\ n \geq k$$

Consecuencia

$$\text{Si } C_k^n = C_P^n \ \rightarrow \begin{cases} \text{I. } k = P \\ \vee \\ \text{II. } k + P = n \end{cases}$$

Ejemplos

1. $C_{35}^{37} = C_2^{37} = \dfrac{37 \cdot 36}{2}$

2. Resuelva la ecuación $C_{x^2}^8 = C_{2x}^8$.

Resolución

De acuerdo a la propiedad

I. $x^2 = 2x \ \rightarrow\ x = 0 \ \vee\ x = 2$

Ambas son soluciones, ya que se tiene

$$C_0^8 = C_8^8 \quad \vee \quad C_4^8 = C_4^8$$

II. $x^2+2x=8 \rightarrow x^2+2x-8=0$

$$\begin{array}{ll} x & 4 \\ x & -2 \end{array}$$

$$(x+4)(x-2)=0 \rightarrow x=-4 \ \vee \ x=2$$

Aquí la solución es solamente 2, puesto que $C_{2(-4)}^8$ no está definida.

Por lo tanto, existen dos soluciones: 0; 2.

3. Halle la suma de los mayores valores de m y n si se verifica la igualdad

$$C_{m-9}^{m+1} = C_n^{29}.$$

Resolución

Se presentan diversos casos:

a. $m-9=0 \ \wedge \ n=0 \rightarrow m=9 \ \wedge \ n=0$

b. $m+1=29 \ \wedge \begin{cases} m-9=n \\ \vee \\ m-9+n=29 \end{cases}$

$$m=28 \ \wedge \begin{cases} 28-9=n \\ \vee \\ 28-9+n=29 \end{cases}$$

$$m=28 \ \wedge \begin{cases} n=19 \\ \vee \\ n=10 \end{cases}$$

Luego, los mayores valores son $m=28$, $n=19$.

$\therefore \ m+n=47$

Suma de números combinatorios

$$\boxed{C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}; \quad n>k}$$

Ejemplos

1. $C_4^7 + C_5^7 = C_5^{7+1} = C_5^8$

2. Reduzca lo siguiente:

$$C_7^{45} + 2C_{37}^{45} + C_{36}^{45}$$

Resolución

Por combinatorios complementarios

$$C_{37}^{45} = C_8^{45}; \ C_{36}^{45} = C_9^{45}; \ 2C_8^{45} = C_8^{45} + C_8^{45}$$

En lo pedido

$$C_7^{45} + 2C_8^{45} + C_9^{45}$$

$$\underbrace{C_7^{45} + C_8^{45}} + \underbrace{C_8^{45} + C_9^{45}}$$

$$C_8^{46} \quad + \quad C_9^{46} = C_9^{47}$$

3. Simplifique

$$\frac{C_1^4 + C_2^4 + C_3^5 + C_4^6 + C_5^7}{C_4^7 + C_3^7}.$$

Resolución

Simplificando en forma separada el numerador y el denominador

$$N = \underbrace{C_1^4 + C_2^4} + C_3^5 + C_4^6 + C_5^7$$

$$\underbrace{C_2^5 \quad + C_3^5}$$

$$\underbrace{C_3^6 \ + \ C_4^6}$$

$$C_4^7 \quad + C_5^7 \quad = C_5^8$$

$$D = C_4^7 + C_3^7 = C_4^8$$

Reemplazando en lo pedido

$$\frac{C_5^8}{C_4^8}=\frac{\frac{8!}{5!3!}}{\frac{8!}{4!4!}}=\frac{4!4!}{5!3!}=\frac{4\cdot 3!4!}{5\cdot 4!3!}=\frac{4}{5}$$

4. ¿Para qué valor de n se cumple

$$C_1^n+C_2^n+C_3^{n+1}+C_4^{n+2}=C_{122}^{126}?$$

Resolución

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{C_1^n+C_2^n}_{C_2^{n+1}+C_3^{n+1}}+C_3^{n+1}}_{C_3^{n+2}+C_4^{n+2}}+C_4^{n+2}}_{C_4^{n+3}}$$

Luego

$$C_4^{n+3}=C_{122}^{126}=C_4^{126}$$

La igualdad será posible solo si

$$n+3=126$$

$$\therefore\ n=123$$

Degradación de índices

Degradar los índices implica disminuir los índices; se presentan tres casos: degradación de ambos índices, degradación del índice superior y degradación del índice inferior.

Degradación de ambos índices

$$\boxed{C_k^n=\frac{n}{k}C_{k-1}^{n-1}}$$

Degradación del índice superior

$$\boxed{C_k^n=\frac{n}{n-k}C_k^{n-1}}$$

Degradación del índice inferior

$$\boxed{C_k^n=\frac{n-k+1}{k}C_{k-1}^n}$$

Ejemplos

1. Simplifique $\dfrac{C_7^{45}}{C_{38}^{44}}$.

Resolución

En el numerador degradamos ambos índices y en el denominador reemplazamos por su combinatorio complementario.

$$\frac{\frac{45}{7}\cancel{C_6^{44}}}{\cancel{C_6^{44}}}=\frac{45}{7}$$

2. Simplifique la expresión

$$\frac{\frac{21}{8}\cdot\frac{20}{7}\cdot\frac{19}{6}C_5^{18}}{C_5^{18}+C_{12}^{18}+C_{12}^{19}+C_8^{20}}.$$

Resolución

Para el numerador recordemos

$$\frac{n}{k}C_{k-1}^{n-1}=C_k^n$$

$$N=\underbrace{\frac{21}{8}\cdot\underbrace{\frac{20}{7}\cdot\underbrace{\frac{19}{6}C_5^{18}}_{C_6^{19}}}_{C_7^{20}}}_{N=C_8^{21}}$$

En el denominador

$$D=C_5^{18}+C_6^{18}+C_{12}^{19}+C_8^{20}$$

Por combinatorios complementarios

$$D=\underbrace{C_5^{18}+C_6^{18}}_{C_6^{19}+C_7^{19}}+C_7^{19}+C_8^{20}$$

$$\underbrace{C_7^{20}+C_8^{20}}$$

$$D=C_8^{21}$$

Lo pedido

$$\frac{N}{D}=\frac{\cancel{C_8^{21}}}{\cancel{C_8^{21}}}=1$$

3. Calcule el valor de n que verifica la ecuación

$$C_5^n+\frac{n-5}{n+1}C_6^{n+1}+C_7^{n+1}+\frac{9}{n+3}C_9^{n+3}=C_4^{12}$$

Resolución

Utilizando las propiedades de degradación

- $\frac{n-5}{n+1}C_6^{n+1}=\frac{n-5}{n+1}C_{n-5}^{n+1}=\frac{\cancel{n-5}}{\cancel{n+1}}\cdot\frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n-5}}C_{n-6}^{n}=C_6^n$
- $\frac{9}{n+3}C_9^{n+3}=\frac{\cancel{9}}{\cancel{n+3}}\cdot\frac{\cancel{n+3}}{\cancel{9}}C_8^{n+2}=C_8^{n+2}$

Luego en la ecuación se tiene:

$$\underbrace{C_5^n+C_6^n}_{C_6^{n+1}+C_7^{n+1}}+C_7^{n+1}+C_8^{n+2}=C_4^{12}$$

$$\underbrace{C_7^{n+2}+C_8^{n+2}}$$

$$C_8^{n+3}=C_4^{12}=C_8^{12}$$

De donde $n+3=12$.

$\therefore\ n=9$

4. Simplifique la expresión S.

$$S=\frac{C_1^{10}}{C_0^{10}}+\frac{2C_2^{10}}{C_1^{10}}+\frac{3C_3^{10}}{C_2^{10}}+\ldots+\frac{10C_{10}^{10}}{C_9^{10}}.$$

Resolución

En los numeradores, degradamos solo el índice inferior.

$$C_k^n=\frac{n-k+1}{k}C_{k-1}^n$$

$$S=\frac{\frac{10-1+1}{1}\cancel{C_0^{10}}}{\cancel{C_0^{10}}}+\frac{\cancel{2}\cdot\frac{10-2+1}{\cancel{2}}\cancel{C_1^{10}}}{\cancel{C_1^{10}}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\frac{\cancel{10}(10-10+1)\cancel{C_9^{10}}}{\cancel{10}}}{\cancel{C_9^{10}}}$$

$$\rightarrow\ S=10+9+8+\ldots+1=\frac{10\cdot 11}{2}=55$$

▸ Desarrollo del binomio de Newton cuando n es un número natural

Analicemos el desarrollo del binomio $(x+a)^n$ para $n\in\mathbb{N}$, mediante los siguientes ejemplos:

$(x+a)^2=x^2+2xa+a^2$

$(x+a)^3=x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$

$(x+a)^4=x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4$

$\vdots$

La idea es averiguar cómo es el desarrollo de $(x+a)^n$; $n\in\mathbb{N}$.

MÉTODO INDUCTIVO

Partiremos de los productos notables

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$$

$$\vdots$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)...(x+h)=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+S_3x^{n-3}+...+S_n$$

Donde

$$S_1=a+b+c+...+h$$

$$S_2=ab+ac+ad+...+ah+bc+...$$

$$S_3=abc+abd+...+abh+bcd+...$$

$$\vdots$$

$$S_n=a\cdot b\cdot c...h$$

En caso de que $a=b=c=d=...=h$

- $S_1=\underbrace{a+a+...+a}_{n \text{ veces}}=na=C_1^n a$
- $S_2=\underbrace{a^2+a^2+...+a^2}_{\frac{n(n-1)}{2} \text{ veces}}=\frac{n(n-1)}{2}a^2=C_2^n a^2$
- $S_3=\underbrace{a^3+a^3+...+a^3}_{\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right) \text{ veces}}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3=C_3^n a^3$
- $S_n=\underbrace{a\cdot a\cdot a...a}_{n \text{ veces}}=a^n=C_n^n a^n$

Luego, enunciamos el siguiente teorema.

Teorema del binomio de Newton

$$(x+a)^n \equiv C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}a + C_2^n x^{n-2}a^2 + ... + C_n^n a^n \; ; \; n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo

Halle el desarrollo de $(x+a)^6$.

Resolución

$$(x+a)^6 \equiv C_0^6 x^6 + C_1^6 x^5 a + C_2^6 x^4 a^2 + C_3^6 x^3 a^3 + C_4^6 x^2 a^4 + C_5^6 x a^5 + C_6^6 a^6$$

Desarrollando los números combinatorios

$$(x+a)^6 \equiv x^6+6x^5a+15x^4a^2+20x^3a^3+15x^2a^4+6xa^5+a^6$$

Propiedades

I. El desarrollo de $(x+a)^n$ es un polinomio homogéneo y completo de $(n+1)$ términos con respecto a las variables x; a de grado n.

II. Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son combinatorios complementarios; por tal razón, tendrán el mismo valor.

III. Los exponentes de x disminuyen de uno en uno, mientras los de a, aumentan de uno en uno.

IV. Para hallar cualquier término del desarrollo del binomio de Newton:

Procedemos así

$$(x+a)^n = \underbrace{C_0^n x^n}_{t_1} + \underbrace{C_1^n x^{n-1} a}_{t_2} + \underbrace{C_2^n x^{n-2} a^2}_{t_3} + \underbrace{C_3^n x^{n-3} a^3}_{t_4} + \ldots + \underbrace{C_n^n a^n}_{t_{n+1}}$$

Vemos que cada término es

$$t_1 = C_0^n x^n$$

$$t_2 = C_1^n x^{n-1} a^1$$

$$t_3 = C_2^n x^{n-2} a^2$$

$$\vdots$$

$$t_k = C_{k-1}^n x^{n-(k-1)} a^{k-1}$$

$$\boxed{t_{k+1} = C_k^n x^{n-k} a^k} \quad \text{(término general)}$$

$k=0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ n$

Se llama el término de lugar $(k+1)$, contado de izquierda a derecha.

Ejemplos

1. En el desarrollo de $(2x-5)^7$ se halla un polinomio. ¿Cuál es la suma de coeficientes?

Resolución

Sea $P_{(x)}=(2x-5)^7$. Recordemos que en todo polinomio, la suma de sus coeficientes se determina evaluando el polinomio en $x=1$, luego

$$P_{(1)}=(2\cdot 1-5)^7=(-3)^7=-3^7$$

Por lo tanto, la suma de coeficientes del polinomio buscado es -3^7.

2. ¿Cuál es el coeficiente del término de lugar 5 en el desarrollo de $(2x+1)^{12}$?

Resolución

Recuerde en $(a+b)^n \rightarrow t_{k+1} = C_k^n a^{n-k} b^k$

Para nuestro problema: $(2x+1)^{12}$

$$t_5 = t_{4+1} = C_4^{12}(2x)^{12-4}\cdot(1)^4 = C_4^{12}\cdot 2^8\cdot x^8$$

Por lo tanto, su coeficiente es $256\,C_4^{12}$.

3. ¿Cuál es el exponente de x en el término de lugar 7 del desarrollo de $\left(3x^3-\dfrac{2}{x}\right)^{19}$?

Resolución

Buscando el término de lugar 7

$$t_7 = t_{6+1} = C_6^{19}(3x^3)^{19-6}\cdot\left(\frac{-2}{x}\right)^6$$

$$= C_6^{19}(3x^3)^{13}\cdot\left(\frac{-2}{x}\right)^6$$

Se pide solo el exponente de x, que será igual a $3\cdot 13-6\cdot 1=33$

4. En el desarrollo de $\left(5x^4+\dfrac{3}{x^2}\right)^{30}$ existe un término que no depende de x. ¿Qué lugar ocupa?

Resolución

Buscamos el término de lugar $k+1$.

$$t_{k+1}=C_k^{30}\left(5x^4\right)^{30-k}\cdot\left(\frac{3}{x^2}\right)^k$$

Se dirá independiente de x cuando el exponente de x sea cero.

Exponente de x:

$$4(30-k)-2k=0 \quad\rightarrow\quad k=20$$

Por lo tanto, el término independiente ocupa el lugar 21.

5. Halle el término de lugar 10 en la expansión de $\left(27x^5+\dfrac{1}{3x}\right)^{12}$.

Resolución

Usando la fórmula general

$$t_{10}=t_{9+1}=C_9^{12}\left(27x^5\right)^{12-9}\cdot\left(\frac{1}{3x}\right)^9$$

$$\rightarrow\ t_{10}=C_9^{12}\left(27x^5\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3x}\right)^9$$

$$\rightarrow\ t_{10}=\frac{12!}{9!\cdot 3!}\cdot\left(\cancel{3^3}\right)^{\cancel{3}}\cdot\left(x^5\right)^3\cdot\frac{1}{\cancel{3^9}\cdot x^9}$$

$$\rightarrow\ t_{10}=\frac{\overset{2}{\cancel{12}}\cdot 11\cdot 10\cdot\cancel{9!}}{\cancel{9!}\cdot\cancel{6!}}\cdot x^{15-9}=220x^6$$

6. Halle el número de términos del desarrollo de $\left(\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{\sqrt{x}}\right)^{5n+2}$, si el término de lugar 25 tiene a x con exponente 44.

Resolución

En la fórmula del término general

$$t_{25}=t_{24+1}=C_{24}^{5n+2}\cdot\left(\frac{x^2}{y}\right)^{(5n+2)-24}\cdot\left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}\right)^{24}$$

$$\rightarrow\ t_{25}=C_{24}^{5n+2}x^{2(5n-22)-\frac{24}{2}}\cdot y^{-(5n-22)+2(24)}$$

Por dato

$$2(5n-22)-12=44$$

$$\rightarrow\ 2(5n-22)=56$$

$$\rightarrow\ 5n-22=28$$

$$\rightarrow\ 5n=50$$

$$\rightarrow\ 5n+2=52$$

Por lo tanto, en el desarrollo existen 53 términos.

▸▸ Nota

Si se cuenta de derecha a izquierda, solo se cambia el orden de las bases, así en $(x+a)^n$:

$\longrightarrow$	$\longleftarrow$
$\boxed{t_{k+1}=C_k^n x^{n-k}a^k}$	$\boxed{t_{k+1}=C_k^n a^{n-k}x^k}$
contado del inicio	contado del final

Veamos en $(x+a)^6$

$$(x+a)^6=C_0^6x^6+C_1^6x^5a+C_2^6x^4a^2+C_3^6x^3a^3$$
$$+C_4^6x^2a^4+C_5^6xa^5+C_6^6a^6$$

$$t_3=C_2^6x^4a^2 \qquad t_3=C_4^6x^2a^4=C_2^6x^2a^4$$

V. Dado el siguiente polinomio

$P_{(x;\,a)}=(x+a)^n$

$P_{(x;\,a)}=C_0^n x^n+C_1^n x^{n-1}a+C_2^n x^{n-2}a^2+\ldots+C_n^n a^n$

Veamos algunos casos particulares

Si $x=1$

$\rightarrow (1+a)^n=C_0^n+aC_1^n+a^2C_2^n+a^3C_3^n+\ldots+a^nC_n^n$

Si $x=a=1$

$\rightarrow 2^n=C_0^n+C_1^n+C_2^n+C_3^n+\ldots+C_n^n$

Ejemplos

1. Calcule la siguiente suma

$C_0^7+C_1^7+C_2^7+\ldots+C_7^7.$

Resolución

Recuerde

$C_0^n+C_1^n+\ldots+C_n^n=2^n$

Para nuestro problema: $n=7$

$\rightarrow\ C_0^7+C_1^7+\ldots+C_7^7=2^7$

2. Simplifique S.

$S=C_1^9+C_2^9+\ldots+C_8^9.$

Resolución

Para ser similar al caso anterior, faltarían los términos C_0^9, C_9^9.

Pero recuerde

$C_0^9=C_9^9=1$

Sumando C_0^9; C_9^9 a cada lado de la igualdad

$S+C_0^9+C_9^9=\underbrace{C_0^9+C_1^9+\ldots+C_8^9+C_9^9}$

$S+1+1=2^9$

$\rightarrow\ S=2^9-2$

$\therefore\ S=510$

3. Reduzca la expresión T.

$T=C_0^7+C_1^7+\frac{1}{4}C_2^8+\frac{3}{8}C_3^8+\ldots+\frac{7}{8}C_7^8.$

Resolución

A partir del tercer término degradamos los índices.

$T=C_0^7+C_1^7+\frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{8}}{\cancel{2}}C_1^7+\frac{\cancel{3}}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{8}}{\cancel{3}}C_2^7+\ldots+\frac{\cancel{7}}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{8}}{\cancel{7}}C_6^7$

$=C_0^7+\underbrace{C_1^7}_{7}+C_1^7+C_2^7+\ldots+C_6^7$

$=\underbrace{C_0^7+C_1^7+C_2^7+\ldots+C_6^7+\overbrace{C_7^7}^{1}}_{2^7}+6$

$\therefore\ T=2^7+6=134$

4. Determine el equivalente reducido de

$S=C_0^n+2C_1^n+3C_2^n+\ldots+(n+1)C_n^n.$

Resolución

$S=C_0^n+C_1^n+C_1^n+C_2^n+2C_2^n+C_3^n+3C_3^n+\ldots+C_n^n+nC_n^n$

$S=\left[C_0^n+C_1^n+C_2^n+\ldots+C_n^n\right]+\left[C_1^n+2C_2^n+3C_3^n+\ldots+nC_n^n\right]$

$S=\left[C_0^n+C_1^n+C_2^n+\ldots+C_n^n\right]+\left[\frac{n}{1}C_0^{n-1}+2\frac{n}{2}C_1^{n-1}+\ldots+n\frac{n}{n}C_{n-1}^{n-1}\right]$

$S=2^n+n\underbrace{\left\{C_0^{n-1}+C_1^{n-1}+C_2^{n-1}+\ldots+C_{n-1}^{n-1}\right\}}_{2^{n-1}}$

$\therefore\ S=2^n+2^{n-1}\cdot n$

5. Determine el equivalente reducido de

$$K = C_0^n + \frac{C_1^n}{2} + \frac{C_2^n}{3} + \frac{C_3^n}{4} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}.$$

Resolución

Multiplicando por $n+1$ miembro a miembro

$$(n+1)K = \frac{n+1}{1}C_0^n + \frac{n+1}{2}C_1^n + \frac{n+1}{3}C_2^n + \ldots + \frac{n+1}{n+1}C_n^n$$

De la fórmula de degradación

$$\frac{n+1}{K}C_{K-1}^n = C_K^{n+1}$$

$$\rightarrow \ (n+1)K = C_1^{n+1} + C_2^{n+1} + C_3^{n+1} + \ldots + C_{n+1}^{n+1}$$

Sumando 1

$$(n+1)K + 1 = 1 + C_1^{n+1} + C_2^{n+1} + C_3^{n+1} + \ldots + C_{n+1}^{n+1}$$

Pero $1 = C_0^{n+1}$

$$\rightarrow \ (n+1)K = \underbrace{C_0^{n+1} + C_1^{n+1} + C_2^{n+1} + \ldots + C_{n+1}^{n+1}}_{2^{n+1}} - 1$$

$$\therefore \ K = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

VI. En el desarrollo de $(ax^{\alpha} + by^{\beta})^n$ se tiene que

a. El coeficiente de cualquier término es $C_k^n a^{n-k} b^k$.

Demostración

Aplicando la fórmula general

$$t_{k+1} = C_k^n (ax^{\alpha})^{n-k} \cdot (by^{\beta})^k$$

$$\rightarrow \ t_{k+1} = C_k^n a^{n-k} \cdot b^k x^{\alpha(n-k)} \cdot y^{\beta k}$$

de donde observamos que el coeficiente de cualquier término es $C_k^n a^{n-k} b^k$.

b. La suma de grados absolutos de todos los términos es

$$\frac{n(n+1)}{2}(\alpha + \beta).$$

Demostración

Como la parte literal de cada término es $x^{\alpha(n-k)} \cdot y^{\beta k}$, su grado absoluto es $\alpha(n-k) + \beta k$, donde $k = 0; 1; 2; \ldots; n$; luego la suma de estos grados es

$$= [\alpha(n) + 0\beta] + [\alpha(n-1) + \beta] + [\alpha(n-2) + 2\beta] + \ldots + [\alpha(1) + \beta(n-1)] + \beta n$$

$$= \alpha\underbrace{[n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1]}_{\frac{n(n+1)}{2}} + \beta\underbrace{[1 + 2 + 3 + \ldots + n]}_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(\alpha + \beta)$$

VII. La suma de coeficientes de los términos de lugar impar es igual a la suma de coeficientes de lugar par en el desarrollo de $(x+a)^n$.

Demostración

Del binomio de Newton

$$(x+a)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} a + C_2^n x^{n-2} + \ldots + C_n^n a^n$$

Si $x = 1$; $a = -1$

- Cuando n es par

$$0 = C_0^n - C_1^n + C_2^n - C_3^n + \ldots + C_n^n$$

$$\underbrace{C_0^n + C_2^n + \ldots + C_n^n}_{\text{suma de coef. de lugar impar}} = \underbrace{C_1^n + C_3^n + \ldots + C_{n-1}^n}_{\text{suma de coef. de lugar par}}$$

- Cuando n es impar

$$0 = C_0^n - C_1^n + C_2^n - C_3^n + \ldots + C_{n-1}^n - C_n^n$$

$$\underbrace{C_0^n + C_2^n + \ldots + C_{n-1}^n}_{\text{suma de coef. de lugar impar}} = \underbrace{C_1^n + C_3^n + \ldots + C_n^n}_{\text{suma de coef. de lugar par}}$$

VIII. Término de máximo valor numérico

En el desarrollo de $(x+a)^n$, donde $\{a;x\} \subset \mathbb{R}^+$

Tenemos que $(x+a)^n = x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$.

Siendo x^n factor de todos los términos del desarrollo de $\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$, será suficiente hallar el término máximo de $\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$.

Consideremos dos términos consecutivos del desarrollo de lugares r y $r+1$.

El término de lugar $r+1$ se obtiene multiplicando el término de lugar r por $\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{a}{x}$.

Es decir, $t_{r+1} = \left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}t_r$.

El factor $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}$ disminuye cuando r aumenta de valor; por lo tanto, el término de lugar $(r+1)$ no es siempre mayor que el de lugar r, sino cuando $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}$ sea mayor que uno, es decir, $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x} > 1$.

$$\rightarrow \frac{n+1}{r}-1 > \frac{x}{a} \rightarrow \frac{n+1}{r} > \frac{x}{a}+1$$

$$\rightarrow \frac{n+1}{\frac{x}{a}+1} > r$$

Si $\frac{n+1}{\frac{x}{a}+1}$ es un entero, llamémosle p.

Luego

- Si $\frac{n+1}{\frac{x}{a}+1}$ es un entero, lo llamaremos p, y se tendrá que los términos de lugares p y $p+1$ son iguales y a su vez son los términos de máximo valor en el desarrollo.
- Si $\frac{n+1}{\frac{x}{a}+1}$ no es entero, a su parte entera la llamaremos q y el término de lugar $q+1$ será el término de máximo valor en el desarrollo.

Ejemplos

1. Si $x=1/3$, halle el máximo término en el desarrollo de $(1+4x)^8$.

Resolución

Sean los términos de lugares r y $r+1$

$$t_r = C_{r-1}^8(4x)^{r-1} = C_{r-1}^8\left(4\cdot\frac{1}{3}\right)^{r-1}$$

$$t_{r+1} = C_r^8(4x)^r = C_r^8\left(4\cdot\frac{1}{3}\right)^r$$

Como

$$t_{r+1} > t_r \rightarrow \frac{t_{r+1}}{t_r} > 1$$

$$\rightarrow \frac{C_r^8\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^r}{C_{r-1}^8\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{r-1}} > 1$$

$$\rightarrow \frac{\frac{\cancel{8!}}{r!(8-r)!}}{\frac{\cancel{8!}}{(r-1)!(9-r)!}}\cdot\frac{\cancel{\left(\frac{4}{3}\right)}}{\cancel{\left(\frac{4}{3}\right)^r}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}} > 1$$

$$\rightarrow \frac{\cancel{(r-1)!}(9-r)\cancel{(8-r)!}}{r\cancel{(r-1)!}\cancel{(8-r)!}}\cdot\frac{4}{3} > 1 \rightarrow \frac{9-r}{r} > \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow 7r < 36 \rightarrow r < 5+\frac{1}{7}$$

$$r_{máx} = 5$$

Luego, el término de máximo valor es el término de lugar 6.

$$t_6 = C_5^8 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{4^5}{3^5}$$

$$\therefore \quad t_6 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5! \cdot 4^5}{5! \cdot 6 \cdot 3^5} = \frac{57\,344}{243}$$

2. Halle el término de máximo valor numérico en el desarrollo de $(3+2x)^9$ cuando $x=1$.

Resolución

Como $(3+2x)^9 = 3^9\left(1+\frac{2}{3}x\right)^9$, será suficiente considerar el desarrollo de $\left(1+\frac{2}{3}x\right)^9$.

En este caso

$$t_r = C_{r-1}^9\left(+\frac{2}{3}x\right)^{r-1} \qquad t_{r+1} = C_r^9\left(+\frac{2}{3}x\right)^r$$

De t_{r+1} degradando índice inferior

$$t_{r+1} = \frac{9-r+1}{r} \cdot \frac{2x}{3} \cdot t_r$$

Para $x=1$

$$t_{r+1} = \frac{10-r}{r} \cdot \frac{2}{3} \cdot t_r$$

Como

$$t_{r+1} > t_r \rightarrow \frac{10-r}{r} \cdot \frac{2}{3} > 1 \rightarrow r < 4$$

Luego, para todos los valores de r hasta 3 tenemos que $t_{r+1} > t_r$; pero si $r=4$, entonces $t_{r+1} = t_r$ y estos términos son los de máximos valores.

Por lo tanto, el término cuarto y quinto son numéricamente iguales y mayores que cualquier otro término y su valor es

$$t_4 = 3^9 \cdot C_3^9\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 489\,888.$$

IX. En el desarrollo de $(x+a)^n$ se halla una forma práctica de calcular el coeficiente de cualquier término en función al coeficiente anterior.

$$\text{Coeficiente de un término cualquiera} = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{Coeficiente}\\ \text{de un término}\\ \text{cualquiera}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\text{Exponente de } x\\ \text{en el término}\\ \text{anterior}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{Exponente de } a\\ \text{en el término}\\ \text{anterior}\end{array}\right) + 1}$$

Demostración

$$t_k = C_{k-1}^n x^{n-k+1} \cdot a^{k-1}$$

$$t_{k+1} = C_k^n x^{n-k} \cdot a^k$$

Vemos

$$\text{Coef. } t_{k+1} = C_k^n = \frac{n-k+1}{k} C_{k-1}^n$$

(degradación de índice inferior)

$$\rightarrow \text{Coef. } t_{k+1} = C_{k-1}^n \cdot \frac{(n-k+1)}{(k-1)+1}$$

De donde se tiene

$$\text{Coef. } t_{k+1} = \frac{(\text{Coef. } t_k)\left(\begin{array}{c}\text{exponente}\\ \text{de } x \text{ en } t_k\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{exponente}\\ \text{de } a \text{ en } t_k\end{array}\right) + 1}$$

Ejemplo

$$(a+x)^5 = x^5 + \left(\frac{1\cdot 5}{0+1}\right)x^4a + \left(\frac{5\cdot 4}{1+1}\right)x^3a^2 +$$

$$+\left(\frac{10\cdot 3}{2+1}\right)x^2a^3 + \left(\frac{10\cdot 2}{3+1}\right)xa^4 + \left(\frac{5\cdot 1}{4+1}\right)a^5$$

$$\therefore\ (x+a)^5 = x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5$$

X. En $(x+a)^n$, si n es par, existe un término central que ocupa el lugar $\left(\frac{n}{2}+1\right)$.

$$t_c = t_{\frac{n}{2}+1} = C_{\frac{n}{2}}^{n} x^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}}$$

Ejemplo

En $(x+a)^6$ hay 7 términos y existe un término central que ocupa el lugar $\left(\frac{6}{2}+1\right)$, es decir, el lugar cuarto.

$$\rightarrow\ t_c = t_4 = t_{3+1} = C_3^6 x^{6-3}a^3 = 20x^3a^3$$

▸ POTENCIA DE UN POLINOMIO

El objetivo no es tanto la expansión o desarrollo del polinomio sino ubicar un término cualquiera de la expansión.

Ejemplo

Halle el coeficiente de $x^3a^4b^3c^2$ en el desarrollo de $(x+a+b+c)^{12}$.

Resolución

El desarrollo es el producto de multiplicar $(x+a+b+c)$ por sí mismo 12 veces, y cada término del desarrollo es de 12 dimensiones, con lo cual se consigue un producto que se ha formado tomando una letra de cada uno de estos factores.

Así, para formar el término $x^3a^4b^3c^2$ tomamos x de 3 de cualquiera de los doce factores; a de 4 de cualquiera de los nueve restantes; b de 3 de cualquiera de los cinco restantes; y c de los dos restantes.

Pero el número de maneras de lograr esto puede hacerse, evidentemente, igual al número de maneras de ordenar 12 letras cuando 3 de ellas deben ser x, cuatro a, tres b y dos c; es decir, es igual a

$$\frac{12!}{3!\ 4!\ 3!\ 2!}$$

Esto es, por lo tanto, el número de veces que aparece el término $x^3a^4b^3c^2$ en el producto final y, consecuentemente, el coeficiente requerido es 277 200.

TÉRMINO GENERAL (FÓRMULA DE LEIBNITZ)

Partimos del problema:

Halle el coeficiente de cualquier término en el desarrollo de $(a+b+c+d+...)^n$, siendo n un número natural.

Resolución

El desarrollo es el producto de multiplicar $(a+b+c+d+...)$ por sí mismo n veces. Cada término del desarrollo se forma tomando una letra de uno de estos n factores y, por lo tanto, el número de maneras en que cualquier término de la forma $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta...$ aparecerá en el producto final es igual al número de maneras de ordenar n letras cuando α de ellos son a, β de ellos son b, γ de ellos son c, y así sucesivamente. Es decir, el coeficiente de $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta...$ es

$$\frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ \delta!...}$$

donde $\alpha+\beta+\gamma+\delta+...=n$

Luego, un término cualquiera es

$$\frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ \delta!_{...}}\ a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot c^{\gamma}\cdot d^{\delta}...$$

Corolario

En el desarrollo de $(a+bx+cx^2+dx^3+...)^n$, el término que contiene a $a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot c^{\gamma}\cdot d^{\delta}...$ es

$$\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!}(a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}...)x^{\beta+2\gamma+...}$$

donde $\alpha+\beta+\gamma+\delta+...=n$.

Ejemplo

1. Halle el coeficiente de x^5 en el desarrollo de $(a+bx+cx^2)^9$.

Resolución

El término general del desarrollo es

$$\sum\frac{9!}{\alpha!\beta!\gamma!}\cdot a^{\alpha}(bx)^{\beta}(cx^2)^{\gamma}\ \text{con}\ \alpha+\beta+\gamma=9$$

es decir

$$\sum\frac{9!}{\alpha!\beta!\gamma!}\cdot a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}x^{\beta+2\gamma};\quad \alpha+\beta+\gamma=9.$$

Además $\beta+2\gamma=5$.

Luego, los valores que toma α, β, γ los podemos encontrar de las condiciones

$\alpha+\beta+\gamma=9$;

$\beta+2\gamma=5$.

Siendo además α, β, γ enteros no negativos.

Entonces

si $\gamma=2 \rightarrow \beta=1 \wedge \alpha=6$

si $\gamma=1 \rightarrow \beta=3 \wedge \alpha=5$

si $\gamma=0 \rightarrow \beta=5 \wedge \alpha=4$

El coeficiente requerido será la suma de los valores correspondientes.

Por lo tanto, el coeficiente buscado es

$$\frac{9!}{6!\ 1!\ 2!}a^6bc^2+\frac{9!}{5!\ 3!\ 1!}a^5b^3c+\frac{9!}{4!\ 5!\ 0!}a^4b^5$$

$$=252a^6bc^2+504a^5b^3c+126a^4b^5$$

FÓRMULA DEL DESARROLLO (FÓRMULA DE LEIBNITZ)

En el desarrollo de $(a+b+c+...)^n$; $n\in\mathbf{N}$

$$(a+b+c+...)^n=\sum\frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!_{...}}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}...$$

donde $\alpha+\beta+\gamma+...=n$; $\{\alpha;\beta;\gamma;...\}\subset\mathbf{Z}_0^+$

Ejemplo

Halle el coeficiente de x^6 en el desarrollo de $(1+2x+3x^2)^5$.

Resolución

El desarrollo es $\sum\frac{5!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!_{...}}(1)^{\alpha}(2x)^{\beta}(3x^2)^{\gamma}$,

donde $\alpha+\beta+\gamma=5$.

Equivalente $\sum\frac{5!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!_{...}}2^{\beta}3^{\gamma}\cdot x^{\beta+2\gamma}$

En nuestro caso: $\alpha+\beta+\gamma=5$

$\beta+2\gamma=6$

Si $\gamma=1 \rightarrow \beta=4 \wedge \alpha=0$

$\gamma=2 \rightarrow \beta=2 \wedge \alpha=1$

$\gamma=3 \rightarrow \beta=0 \wedge \alpha=2$

Luego, el coeficiente de x^6 es

$$\frac{5!}{0!\ 4!\ 1!}2^4\cdot 3^1+\frac{5!}{1!\ 2!\ 2!}2^2\cdot 3^2+\frac{5!}{2!\ 0!\ 3!}2^0\cdot 3^3$$

$$240+1080+270=1590$$

NÚMERO DE TÉRMINOS

El desarrollo de $\underbrace{(a+b+c+...+p)}_{r\text{ términos}}{}^n$ tiene

$$\boxed{\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}\ \text{términos}}$$

En su desarrollo

I. Así $\underbrace{(a+b+c)}_{3\text{ términos}}{}^2$ tendrá

$$\frac{(2+3-1)!}{2!(3-1)!}=\frac{4!}{2!\,2!}=\frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!\,2!}=6\ \text{términos}$$

Efectivamente, ya que su desarrollo es

$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, de 6 términos.

II. En $(1+x+y+z)^3$ se tendrá

$$\frac{(3+4-1)!}{3!(4-1)!}=\frac{6!}{3!\,3!}=20\ \text{términos.}$$

▸ DESARROLLO DEL BINOMIO $(x+a)^n$ CUANDO n ES UN NÚMERO RACIONAL (NO NATURAL)

Se busca la expansión de $(x+a)^n$ cuando n es un entero negativo o fraccionario.

COEFICIENTE BINOMIAL

$$\boxed{\text{Notación}\ \binom{n}{k}}$$

Se define por

$$\boxed{\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!};\quad n\in\mathbb{R};\ k\in\mathbb{N}_0}$$

Ejemplos

1. $\binom{3}{4}=\frac{3(3-1)(3-2)(3-3)}{4!}=0$

2. $\binom{\sqrt{2}+2}{5}=\frac{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{5!}$

$$=\frac{(-2)(1)\sqrt{2}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=-\frac{\sqrt{2}}{60}$$

3. $\binom{-2}{1}=\frac{-2}{1!}=-2$

4. $\binom{-2}{3}=\frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}=-4$

5. $\binom{-2}{2}=\frac{(-2)(-3)}{2!}=3$

6. $\binom{-2}{4}=\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)}{4!}=5$

FORMA GENERAL DEL DESARROLLO

Buscamos el desarrollo de $(1+x)^n$; $n\in\mathbb{Q}$ no natural.

$$\boxed{\underbrace{(1+x)}_{k}{}^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\binom{n}{4}x^4+...}$$

PARA $0<k<1$

Ejemplos

1. Halle la expansión de $(1-x)^{-2}$.

Resolución

$$(1-x)^{-2}=\binom{-2}{0}-\binom{-2}{1}x+\binom{-2}{2}x^2-\binom{-2}{3}x^3+\binom{-2}{4}x^4\ldots$$

$$=1-(-2)x+3x^2-(-4)x^3+5x^4+\ldots$$

$$=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\ldots$$

Esta fórmula será válida si $x\in\langle -1;\,1\rangle$.

2. Halle el desarrollo de $(1-x)^{3/2}$.

Resolución

$$(1-x)^{3/2}=\binom{3/2}{0}-\binom{3/2}{1}x+\binom{3/2}{2}x^2-\binom{3/2}{3}x^3+\ldots$$

$$=1-\frac{\frac{3}{2}}{1!}x+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{2!}x^2-\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}{3!}x^3+\ldots$$

$$=1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+\ldots$$

Esta fórmula será válida si $x\in\langle -1;\,1\rangle$.

Nota

$$(a+x)^n=a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$$

3. Desarrolle $\left(2+\frac{3}{2}x\right)^{-5}$.

Resolución

Será equivalente a

$$2^{-5}\left(1+\frac{3}{4}x\right)^{-5}$$

$$=2^{-5}\left\{\binom{-5}{0}+\binom{-5}{1}\left(\frac{3}{4}x\right)+\binom{-5}{2}\left(\frac{3}{4}x\right)^2+\binom{-5}{3}\left(\frac{3}{4}x\right)^3+\ldots\right\}$$

$$=\frac{1}{32}\left\{1-5\cdot\frac{3}{4}x+\frac{(-5)\,\cancel{(-6)}^{\,3}}{\cancel{2!}}\cdot\frac{9}{16}x^2+\frac{(-5)\,\cancel{(-6)}\,(-7)}{\cancel{3!}}\cdot\frac{27}{64}x^3+\ldots\right\}$$

$$=\frac{1}{32}\left\{1-\frac{15}{4}x+\frac{135}{16}x^2-\frac{945}{64}x^3+\ldots\right\}$$

$$=\frac{1}{32}-\frac{15}{128}x+\frac{135}{512}x^2-\frac{945}{2048}x^3+\ldots$$

Esta fórmula será válida si $x\in\left\langle -\frac{4}{3};\,\frac{4}{3}\right\rangle$

4. Desarrolle

$$S=\left(3+\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Resolución

Como

$$S=\left(3+\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(3\left(1+\frac{x}{6}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}=3^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

S es equivalente al desarrollo de

$$3^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow\ S=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\binom{-\frac{1}{2}}{0}+\binom{-\frac{1}{2}}{1}\left(\frac{x}{6}\right)+\binom{-\frac{1}{2}}{2}\left(\frac{x}{6}\right)^2+\ldots\right\}$$

$$\rightarrow\ S=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{6}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}\cdot\frac{x^2}{36}+\ldots\right\}$$

$$\rightarrow\ S=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{1-\frac{x}{12}+\frac{x^2}{96}-\ldots\right\}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{x}{12\sqrt{3}}+\frac{x^2}{96\sqrt{3}}-\ldots$$

Esta fórmula será válida si $x\in\langle -6;\,6\rangle$.

TÉRMINO GENERAL

En el desarrollo de $(1+x)^n$ se tiene el término de lugar $(k+1)$,

$$\boxed{t_{k+1}=\binom{n}{k}x^k}$$

donde n es cualquier racional.

Ejemplos

1. Halle el término de lugar 8 en el desarrollo de $\left(1-2x^3\right)^{-2}$.

   Resolución

   Por fórmula general

$$t_8=t_{7+1}=\binom{-2}{7}\left(-2x^3\right)^7$$

$$\rightarrow\ t_8=\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)(-7)(-8)}{7!}\left(-2^7\right)x^{21}$$

$$\rightarrow\ t_8=\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot2^7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}x^{21}=1024x^{21}$$

$$\therefore\ t_8=1024x^{21}$$

2. Halle el término de lugar 5 en el desarrollo de $\left(5+3x^2\right)^{2/3}$.

   Resolución

   El desarrollo será equivalente al de

$$5^{2/3}\left(1+\frac{3}{5}x^2\right)^{2/3}.$$

   Por la fórmula general

$$t_5=t_{4+1}=5^{2/3}\binom{2/3}{4}\left(\frac{3}{5}x^2\right)^4$$

$$\rightarrow\ t_5=\sqrt[3]{25}\,\frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)\left(\frac{2}{3}-3\right)}{4!}\cdot\frac{3^4}{5^4}x^8$$

$$\rightarrow\ t_5=\sqrt[3]{25}\,\frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{3^4}{5^4}x^8$$

$$\rightarrow\ t_5=\sqrt[3]{25}\,\frac{-7\cdot x^8}{3\cdot625}=-\frac{7\sqrt[3]{25}}{1875}x^8$$

$$\therefore\ t_5=\frac{7\sqrt[3]{25}}{1875}x^8$$

Teorema

El desarrollo de $(1+x)^n$ es aproximadamente $1+nx$ cuando x tiende a cero.

Es decir, si el valor de x es muy pequeño, sus potencias, a partir de la segunda, pueden ser despreciadas.

Ejemplos

1. Reduzca la expresión si x es suficientemente pequeña.

$$M_{(x)}=\frac{\left(1+\frac{2}{3}x\right)^{-5}+\sqrt{4+2x}}{(4+x)^{3/2}}$$

   Resolución

   Como x es suficientemente pequeña, entonces aplicamos el teorema anterior.

   En el problema

$$M_{(x)}=\frac{\left(1+\frac{2}{3}x\right)^{-5}+2\left(1+\frac{x}{2}\right)^{1/2}}{8\left(1+\frac{x}{4}\right)^{3/2}}$$

$$\rightarrow\ M_{(x)}=\frac{\left(1+\frac{2}{3}x(-5)\right)+2\left(1+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)}{8\left(1+\frac{x}{4}\cdot\frac{3}{2}\right)}$$

$$\rightarrow\ M_{(x)}=\frac{1}{8}\left\{\frac{1-\frac{10}{3}x+2+\frac{x}{2}}{1+\frac{3}{8}x}\right\}=\frac{1}{8}\left\{\left(3-\frac{17}{6}x\right)\left(1+\frac{3}{8}x\right)^{-1}\right\}$$

$$\therefore\ M_{(x)}=\frac{1}{8}\left(3-\frac{17}{6}x\right)\left(1-\frac{3}{8}x\right)=\frac{1}{8}\left(3-\frac{95}{24}x\right)$$

2. Halle el valor de $\frac{1}{\sqrt{47}}$ con una aproximación de 5 cifras decimales.

Resolución

$$\frac{1}{\sqrt{47}} = (49-2)^{-1/2} = \frac{1}{7}\left(1-\frac{2}{7^2}\right)^{-1/2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{47}} = \frac{1}{7}\left\{1-\binom{-1/2}{1}\left(\frac{2}{7^2}\right)^1+\binom{-1/2}{2}\left(\frac{2}{7^2}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\binom{-1/2}{3}\left(\frac{2}{7^2}\right)^3+\ldots\right\}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{47}} = \frac{1}{7}\left\{1+\frac{1}{7^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{7^4}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{7^6}+\ldots\right\}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{47}} = \frac{1}{7}+\frac{1}{7^3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{7^5}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{7^7}+\ldots$$

Pero

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ldots$$

$$\frac{1}{7^3} = 0{,}002915\ldots$$

$$\frac{1}{7^5} = 0{,}000059\ldots$$

Luego se tendrá

$$\frac{1}{\sqrt{47}} \cong 0{,}142857+0{,}002915+0{,}000088 \cong 0{,}14586$$

NÚMERO DE TÉRMINOS

En la expansión de $(x+a)^n$, cuando n no es natural, el número de términos es ilimitado; en tal caso, no hablaremos de término central.

TÉRMINO NUMÉRICAMENTE MÁS GRANDE

En el desarrollo de $(1+x)^n$ para cualquier n racional, como solo nos interesa el valor numérico del término máximo, se presentarán los siguientes casos:

Sea una fracción positiva

El término de orden $r+1$ se obtiene multiplicando el término de lugar r por $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x$.

I. Si x es mayor que la unidad, aumentando el valor de r podemos hacer el factor anterior tan cercano a $-x$ como queramos. Los términos crecen consecutivamente, por lo tanto, no habrá término máximo.

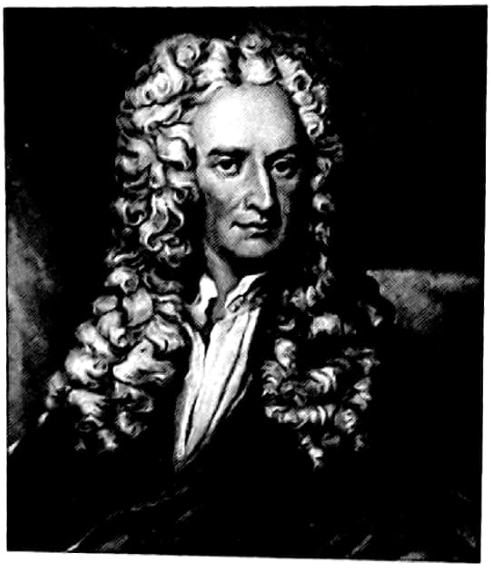
II. Si x es menor que la unidad, vemos que el factor continúa positivo y decrece hasta que $r > n+1$; y a partir de este punto se vuelve negativo, pero siempre permanece menor que 1 numéricamente, de donde se concluye que habrá un término máximo.

Nota

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}a^{n-k}x^k;\ n \in \mathbb{R};\ a \in \mathbb{R}^+;\ |x| < a$$

BIOGRAFÍA

Isaac Newton



Nació en Lincolnshire el 4 de enero de 1643 y murió el 31 de marzo de 1727 en Cambridge. Físico, astrónomo, matemático, inventor, filósofo, teólogo y alquimista, uno de los más grandes hombres de ciencias inglés. Su logro más destacado fue el descubrimiento de la ley de gravitación universal. Además, estableció las leyes de la mecánica clásica, construyó el primer telescopio de reflexión y contribuyó al estudio de la luz.

Sus padres fueron campesinos puritanos. Su padre murió meses antes de su nacimiento y su madre se volvió a casar cuando Isaac tenía tres años; el futuro científico fue dejado al cuidado de sus abuelos maternos hasta los doce años, cuando la madre enviuda por segunda vez y regresa al hogar de Lincolnshire. En 1655, Newton fue inscrito en la escuela primaria de Grantham, King's School –a diez kilómetros de casa–, donde recibió instrucción de latín –la lengua de la gente culta–, griego, geometría y aritmética básica, y estudió la Biblia.

Testimonios de esa época lo describen como sobrio, silencioso y meditativo, y que desarrolló habilidad para inventar artefactos y construir utensilios; por ejemplo, se dice que llenó la casa del farmacéutico de la ciudad, del cual era huésped, de relojes de sol; o que volaba cometas a las que ataba en la cola una linterna plegable de papel para asustar a los vecinos en la noche. Lo cierto es que no fue un muchacho como el común de su edad, en quienes su inteligencia y habilidad causaba antipatía.

Terminada la escuela, a los dieciséis años, regresó a la granja familiar con la responsabilidad de cuidar y ocuparse de la propiedad, pero nunca tuvo interés en hacer esas labores, pues prefería siempre leer o construir cosas. Tras nueve meses de estancia en la granja, era evidente que Newton no estaba hecho para trabajar ahí, así que su maestro convence a la madre de enviarlo a Grantham de nuevo, esta vez para que se prepare para ingresar a Cambrigde.

En 1661 logra su ingreso al Trinity College de Cambridge. Durante su carrera universitaria se pagó los estudios haciendo diversos trabajos para otros estudiantes. No fue un alumno destacado debido a su irregular asistencia a clases. Su interés principal estaba en la biblioteca, donde

descubrió libros sobre matemáticas, filosofía y se inició en la investigación experimental de la naturaleza. Al finalizar su etapa universitaria había escrito las primeras notas de lo que sería el cálculo de fluxiones; además el estudio de la óptica y la geometría ya ocupaban gran parte de sus prioridades.

Entre los años 1665 y 1666 se desató en Inglaterra una epidemia de peste bubónica que obliga a cerrar la universidad. Newton se retiró a la casa familiar y prosiguió con sus estudios y observaciones, solo visitaba la biblioteca universitaria de tanto en tanto. Se dice que de esta época data el descubrimiento de la teoría de la gravitación, cuando vio caer la manzana de uno de los árboles de su casa. Además construyó la primera versión de un telescopio de reflexión y desarrolló el cálculo matemático con el cual halla la fórmula para el desarrollo de la potencia de un binomio con un exponente cualquiera, entero o fraccionario. En la década siguiente elabora hasta tres enfoques distintos del nuevo análisis. En principio, basó su desarrollo a partir de la geometría analítica con un enfoque geométrico y analítico de las derivadas matemáticas aplicadas sobre curvas definidas a través de ecuaciones. Luego, tratando de diferenciar su teoría de la de Descartes, trabaja únicamente con las ecuaciones y sus variables sin necesidad de recurrir al sistema cartesiano. Según refiere él mismo en una carta, esos años fueron su época de más fecunda invención.

En 1667, finalmente, se reintegra al Trinity College como profesor, con mucha disposición de tiempo para sus investigaciones particulares sobre óptica y sobre la naturaleza. Puso en evidencia que la luz está formada por una banda de colores en los que se descompone si se la hace pasar por un prisma. En su teoría, afirma que la luz está compuesta por corpúsculos y que se propaga en línea recta, no en ondas como se pensaba hasta ese momento. Hacia 1672 presenta a la Royal Society la primera comunicación de su trabajo, lo que le valió una dura etapa de confrontaciones con otros científicos. Newton defendía su descubrimiento como "el más singular, cuando no el más importante, de los que se han hecho hasta ahora en lo relativo al comportamiento de la naturaleza". Debido a las críticas y a la polémica con Robert Hook, quien defendía el movimiento ondulatorio de la luz, decidió no publicar su estudio hasta después de la muerte de este.

Tras ausentarse de Cambridge en 1679 debido a la muerte de su madre, Newton recibe comunicaciones de Hook que lo instaban a que comente la propia teoría de Hook acerca del movimiento de los planetas, a lo que él accede, reinsertándolo en el estudio de la dinámica. Cinco años más tarde, Edmond Halley lo visita en la universidad y le pregunta cuál sería la órbita de un planeta si su gravedad disminuye con el cuadrado de la distancia, obteniendo como respuesta que la órbita sería una elipse. Tal rapidez en la respuesta lo asombra y le pide la demostración. Newton no la tenía en ese momento y le prometió que le haría llegar los cálculos.

Luego de rehacerlos y después de resolver el problema de demostrar que la fuerza de atracción entre dos esferas es igual a la que existiría si las masas de cada una de ellas estuviesen concentradas en los centros respectivos, abrió el camino para reunir todas sus investigaciones y dar paso al gran libro *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Los principios matemáticos de la filosofía natural), de 1687.

Esta obra es el producto de veinte años de estudio. Dentro de su desarrollo se encuentra la ley de gravitación: dos cuerpos se atraen con una fuerza proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Se enuncian también tres principios de la mecánica a) todo cuerpo permanece en reposo o continúa su movimiento en línea recta con velocidad constante si no está sometido a una fuerza exterior; b) el cambio de movimiento de un cuerpo es proporcional a la fuerza exterior, inversamente proporcional a la masa del cuerpo, y tiene lugar en la dirección de la fuerza; y c) a toda acción se opone una reacción, igual y de sentido contrario. Antes de él no había ningún sistema de causalidad física. Esta teoría permite deducir el estado que tendrá un sistema a partir del que tenía el instante anterior. Gracias a Newton, los científicos lograron extender el conocimiento a todos los rincones del sistema solar.

Luego de la muerte de Hook, publicó la obra *Opticks*, en 1704, alejándose del mundo científico y asumiendo un rol público como miembro del Parlamento primero, luego como director de la Casa de la Moneda y finalmente como presidente de la Royal Society. A pesar de su hipocondría, conservó buena salud hasta su muerte, producida por problemas renales. Fue enterrado en la Abadía de Westminster, lugar reservado para los más grandes hombres de Inglaterra.

Fuente:

http://es.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

http://www.astrocosmo.cl/biografi/b-i_newton.htm

http://www.biografiasyvidas.com/monografia/newton/

Problemas RESUELTOS

Problema 1

Simplifique M.

$$M = \frac{2!+3!}{2!} + \frac{4!+5!}{4!} + \ldots + \frac{40!+41!}{40!}.$$

$$\rightarrow M = \frac{2!+3!}{2!} + \frac{3!+4!}{3!} + \frac{4!+5!}{4!} + \ldots + \frac{40!+41!}{40!}$$

Resolución

Podemos observar que cada sumando tiene la forma de $\dfrac{x!+(x+1)!}{x!}$.

Simplificando

$$\frac{x!+(x+1)x!}{x!}$$

$$= \frac{x!(1+x+1)}{x!} = x+2$$

Utilizando este resultado en cada sumando se tiene

$$M=(2+2)+(3+2)+(4+2)+\ldots+(40+2)$$

$$M=4+5+6+\ \ldots\ +42$$

Recuerde que: $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

$$\rightarrow\ M=(1+2+3+\ldots+42)-(1+2+3)$$

$$\therefore\ M=\frac{42\cdot 43}{2}-6=903-6=897$$

Problema 2

Si se cumple que $\dfrac{n!(2n)}{(n-1)!}=162$, ¿cuál es el valor de n^2-1?

Resolución

Recuerde que $n!=n(n-1)!$

$$\rightarrow\ \frac{n\cancel{(n-1)!}2n}{\cancel{(n-1)!}}=162\ \rightarrow\ 2n^2=2\cdot 9^2,$$

de donde $n^2=9^2$

$\therefore\ n^2-1=80$

Problema 3

Luego de resolver la ecuación

$$\frac{(n+1)!-n(n-1)!}{n^2+n-1}=\frac{5n!}{29}$$

calcule el valor de $\sqrt{\dfrac{5n-3}{2n+1}}$.

Resolución

$$(n+1)!=(n+1)n!=(n+1)n(n-1)!$$

Luego

$$(n+1)!-n(n-1)!=(n+1)n!-n!$$
$$=n!(n+1-1)=n\cdot n!$$

En la ecuación se tiene

$$\frac{n\cdot \cancel{n!}}{n^2+n-1}=\frac{5\cancel{n!}}{29}$$

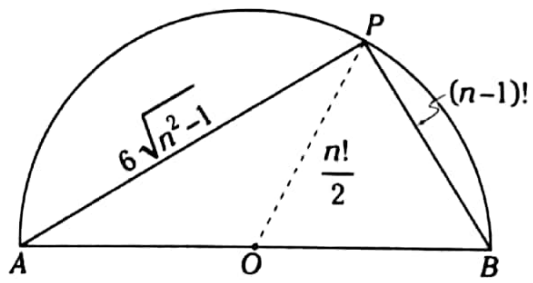
$$\rightarrow\ \frac{n}{n^2+n-1}=\frac{5}{29}$$

Por simple inspección $n=5$.

Por lo tanto, $\sqrt{\dfrac{5n-3}{2n+1}}=\sqrt{\dfrac{22}{11}}=\sqrt{2}$.

Problema 4

Del gráfico (semicircunferencia),



¿cuál es el valor de n si O es el centro de la circunferencia?

Resolución

Por propiedad de la geometría, APB es un triángulo rectángulo recto en P; entonces se cumplirá el teorema de Pitágoras.

$$\overline{AP}^2+\overline{PB}^2=\overline{AB}^2 \quad \wedge \quad \overline{AB}=2\overline{OP}=n!$$

Usando los datos

$$\left(6\sqrt{n^2-1}\right)^2+((n-1)!)^2=(n!)^2$$

$$6^2(n^2-1)=(n!)^2-((n-1)!)^2$$

$$6^2(n^2-1)=n^2((n-1)!)^2-((n-1)!)^2$$

$$6^2\cancel{(n^2-1)}=((n-1)!)^2\cancel{(n^2-1)}$$

$$6^2=((n-1)!)^2 \rightarrow (n-1)!=6=3!$$

$\therefore \quad n=4$

Problema 5

¿Cuál es el valor de n que verifica la siguiente ecuación?

$$\frac{(n+3)!(n+5)!}{(n+3)!+(n+4)!}=120$$

Resolución

Usando la propiedad $x!=x(x-1)!$

$$\frac{\cancel{(n+3)!}\,(n+5)!}{\cancel{(n+3)!}+(n+4)\cancel{(n+3)!}}=120$$

$$\frac{(n+5)!}{1+n+4}=\frac{\cancel{(n+5)}\,(n+4)!}{\cancel{(n+5)}}=120$$

$\rightarrow \quad (n+4)!=120=5! \quad \rightarrow \quad n+4=5$

$\therefore \quad n=1$

Problema 6

Dados C_4^{18}, C_3^{17} y C_{18}^{20}, calcule la diferencia entre el mayor y la suma de los otros dos.

Resolución

Calculando cada uno de los números combinatorios:

- $$C_4^{18}=\frac{18!}{4!(18-4)!}=\frac{18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot\cancel{14!}}{4!\cdot\cancel{14!}}$$

$$\rightarrow \quad C_4^{18}=\frac{\overset{6}{\cancel{18}}\cdot17\cdot\overset{2}{\cancel{16}}\cdot15}{\underset{\cancel{3}}{\cancel{24}}}=6\cdot17\cdot2\cdot15=3060.$$

- $$C_3^{17}=\frac{17!}{3!\,14!}=\frac{17\cdot\overset{8}{\cancel{16}}\cdot\overset{5}{\cancel{15}}\cdot14!}{\underset{\cancel{2}}{\cancel{6}}\cdot\cancel{14!}}=680$$

- $$C_{18}^{20}=C_2^{20}=\frac{20\cdot19}{2}=190$$

Lo pedido: $3060-(680+190)=2190$

Problema 7

Resuelva la ecuación

$$C_1^x+C_2^{x+1}+C_3^{x+2}=9.$$

Resolución

Aplicando la definición del combinatorio

$$\frac{x!}{1!(x-1)!}+\frac{(x+1)!}{2!(x+1-2)!}+\frac{(x+2)!}{3!(x+2-3)!}=9$$

$$\frac{x\cancel{(x-1)!}}{\cancel{(x-1)!}}+\frac{(x+1)x\cancel{(x-1)!}}{2\cancel{(x-1)!}}+\frac{(x+2)(x+1)x\cancel{(x-1)!}}{6\cancel{(x-1)!}}=9$$

$$\rightarrow \quad x+\frac{(x+1)x}{2}+\frac{(x+2)(x+1)x}{6}=9$$

Multiplicando por 6

$$6x+3x(x+1)+(x+2)(x+1)x=54$$

$$x\{6+3(x+1)+(x+2)(x+1)\}=54$$

Operando y escribiendo convenientemente

$$x(x^2+6x+11)=54=2(2^2+6\cdot 2+11)$$

$\therefore\ x=2$

Otro método

Recuerde que $C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$

Sumando $C_0^x = 1$ a cada miembro

$$\underbrace{C_0^x + C_1^x} + C_2^{x+1} + C_3^{x+2} = 9+1$$

$$\underbrace{C_1^{x+1} + C_2^{x+1}}$$

$$\underbrace{C_2^{x+2} + C_3^{x+2}}$$

$$C_3^{x+3} = 10$$

Usando la definición de combinatorio

$$\frac{(x+3)!}{3!(x+3-3)!}=10 \rightarrow \frac{(x+3)(x+2)(x+1)\cancel{x!}}{6\cdot \cancel{x!}}=10$$

Luego $(x+3)(x+2)(x+1)=5\cdot 4\cdot 3$

De donde $x+1=3 \quad \rightarrow \quad x=2$

Problema 8

¿Cuántos valores de x verifican la siguiente igualdad?

$$\frac{x-1}{x-3}C_{x-4}^{x-2} + C_{x-2}^{x-1} + \frac{x}{x-1}C_{x-2}^{x-1} = 15$$

Resolución

Recuerde que $\frac{n}{k}C_{k-1}^{n-1} = C_k^n$.

Para el problema, $n \geq 4$ se tiene

$$\underbrace{C_{x-3}^{x-1} + C_{x-2}^{x-1}} + C_{x-1}^{x} = 15$$

$$C_{x-2}^{x-1+1} + C_{x-1}^{x}$$

$$\underbrace{C_{x-2}^{x} + C_{x-1}^{x}}$$

$$\rightarrow \quad C_{x-1}^{x+1} = 15$$

Por combinatorios complementarios

$$C_2^{x+1} = 15$$

$$\rightarrow \quad \frac{(x+1)(x+1-1)}{2} = 15$$

$$x^2+x=30$$

$$\rightarrow \quad x(x+1)=5\cdot 6$$

$$\rightarrow \quad x=5$$

Por lo tanto, existe un solo valor para x.

Problema 9

Determine el conjunto

$$A=\left\{(x;y)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,/\, C_2^x + 2C_3^x + C_4^x = C_y^7\right\}$$

por extensión.

Resolución

Resolviendo la ecuación

$$\underbrace{C_2^x + C_3^x} + \underbrace{C_3^x + C_4^x} = C_y^7;\ x\geq 4 \ \wedge\ y\leq 7$$

$$\underbrace{C_3^{x+1} + C_4^{x+1}} = C_y^7$$

$$C_4^{x+2} = C_y^7$$

De donde

$$x+2=7 \ \wedge\ [y=4 \ \vee\ 4+y=7]$$

$$\rightarrow \quad x=5 \ \wedge\ [y=4 \ \vee\ y=3]$$

$$\therefore \quad A=\{(5;\,4),\ (5;\,3)\}$$

Problema 10

En el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} C_y^x = \dfrac{21}{10}C_{y-2}^x & \text{(I)} \\ C_{y+1}^x = C_{y-1}^x & \text{(II)} \end{cases}$$

Determine el valor de xy.

Resolución

Simplificando las ecuaciones

I. $$\frac{\cancel{x!}}{y!(x-y)!}=\frac{21}{10}\frac{\cancel{x!}}{(y-2)!(x-y+2)!}$$

$$\frac{1}{y(y-1)\cancel{(y-2)!}\cancel{(x-y)!}}=$$

$$=\frac{21}{10}\frac{1}{\cancel{(y-2)!}(x-y+2)(x-y+1)\cancel{(x-y)!}}$$

$$\rightarrow\quad 10(x-y+2)(x-y+1)=21y(y-1)\qquad(\alpha)$$

II. $$\frac{\cancel{x!}}{(y+1)!(x-y-1)!}=\frac{\cancel{x!}}{(y-1)!(x-y+1)!}$$

$$\frac{1}{(y+1)y\cancel{(y-1)!}\cancel{(x-y-1)!}}=$$

$$=\frac{1}{\cancel{(y-1)!}(x-y+1)(x-y)\cancel{(x-y-1)!}}$$

$$(x-y+1)(x-y)=(y+1)y$$

$$x^2-xy+x-xy+\cancel{y^2}-y=\cancel{y^2}+y$$

$$x^2-2xy+x-y=y\quad\rightarrow\quad x^2-2xy=2y-x$$

$$x(x-2y)=-(x-2y)\quad\rightarrow\quad x=2y\qquad(\beta)$$

De (β) en (α)

$$10(2y-y+2)(2y-y+1)=21y(y-1)$$

$$10(y+2)(y+1)=21y(y-1)$$

Efectuando y simplificando

$$11y^2-51y-20=0$$

$$11y \quad 4 \rightarrow y=-\frac{4}{11}$$

$$y \quad -5 \rightarrow y=5$$

Como $y\in\mathbb{Z}^+\ \wedge\ y\geq 2\ \rightarrow\ y=5$

En (β): $x=2(5)=10$

$\therefore\ xy=50$

Problema 11

Calcule el valor de $n+k$ si se sabe que el cuarto término del desarrollo de $(x+2)^n$ es $80x^k$.

Resolución

> **Recuerde que**
>
> $(a+b)^n;\ t_{k+1}=C_k^n a^{n-k}\cdot b^k$

En el problema

$$t_4=t_{3+1}=C_3^n\cdot x^{n-3}\cdot 2^3=2^3C_3^n\cdot x^{n-3}$$

Se tiene

$$2^3\cdot C_3^n=80\ \rightarrow\ C_3^n=10\ \rightarrow\ n=5$$

Además

$$n-3=k\quad\rightarrow\quad k=2$$

$\therefore\ n+k=7$

Problema 12

Halle la relación entre r y n para que los coeficientes de los términos de lugares $3r$ y $r+2$ de la expansión de $(1+x)^{2n}$ sean iguales.

Resolución

Usando la fórmula general de la expansión de $(1+x)^{2n}$

$$t_{3r}=t_{(3r-1)+1}=C_{3r-1}^{2n}\cdot x^{3r-1}$$

$$t_{r+2}=t_{(r+1)+1}=C_{r+1}^{2n}\cdot x^{r+1}$$

Por dato

$$C_{3r-1}^{2n}=C_{r+1}^{2n}$$

I. $3r-1=r+1\quad\rightarrow\quad r=1\ \wedge\ n\in\mathbb{N}$

II. $(3r-1)+(r+1)=2n\quad\rightarrow\quad 4r=2n$

$\therefore\ n=2r$

Problema 13

Halle el término independiente de x si existe en la expansión de $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^9$.

Resolución

Buscando el término general

$$t_{k+1}=C_k^9\sqrt{x}^{9-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k=C_k^9x^{\frac{9-k}{2}-\frac{k}{4}}$$

Si el término es independiente de x, debe ser de grado nulo.

$$\rightarrow\ \frac{9-k}{2}-\frac{k}{4}=0\ \rightarrow\ k=6$$

Luego, el término independiente será el término de lugar 7

$$t_7=t_{6+1}=C_6^9$$

$$\therefore\ t_{\text{indep.}}=84$$

Problema 14

En el desarrollo de $(x^4+x^{-3})^{2n-1}$, uno de los términos centrales es independiente de x. Halle el número de términos.

Resolución

Los términos centrales ocupan los lugares

$$\frac{(2n-1)+1}{2}\ \vee\ \frac{(2n-1)+1}{2}+1$$

Es decir, $t_n\ \wedge\ t_{n+1}$ son términos centrales.

I. $t_n=t_{(n-1)+1}=C_{n-1}^{2n-1}.(x^4)^n.(x^{-3})^{n-1}$

$\rightarrow\ 4n-3(n-1)=0\ \rightarrow\ n=-3$ (absurdo)

II.- $t_{n+1}=C_n^{2n-1}.(x^4)^{n-1}.(x^{-3})^n$

$\rightarrow\ 4(n-1)-3n=0\ \rightarrow\ n=4$

Luego, el número de términos será igual a

$$(2n-1)+1=2n=8$$

Por lo tanto, el número de términos es 8.

Problema 15

Halle el número de términos irracionales en el desarrollo de $(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x})^{48}$.

Resolución

De la fórmula general

$$t_{k+1}=C_k^{48}(\sqrt[4]{x})^{48-k}\cdot\sqrt[3]{x}^k$$

$$\rightarrow\ t_{k+1}=C_k^{48}\cdot x^{\frac{48-k}{4}+\frac{k}{3}};\quad k=0;\ 1;\ldots;\ 48$$

Analizando el exponente de x

$$\frac{48-k}{4}+\frac{k}{3}=12-\frac{k}{4}+\frac{k}{3}=12+\frac{k}{12}$$

Si el término es racional, $\left(12+\frac{k}{12}\right)$ es entero

$$\rightarrow\ k=\overset{\circ}{\overline{12}}\ \rightarrow\ k=0;12;24;36;48$$

De donde diremos que existen 5 términos racionales;

Por lo tanto, 44 serán irracionales.

Problema 16

Teniendo en cuenta el desarrollo de la expresión $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{56}$,

¿cuál de las proposiciones, al determinar su valor, es verdadera?

I. El número de términos irracionales es 40.
II. El número de términos fraccionarios es 4.
III. El término independiente de x ocupa el décimo tercer lugar.

Resolución

De la fórmula del término general

$$t_{k+1} = C_k^{56}\left(\sqrt{x}\right)^{56-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k$$

$$= C_k^{56}\cdot x^{\frac{56-k}{2}+\left(-\frac{k}{3}\right)}$$

Analizando el exponente

$$\frac{56-k}{2}-\frac{k}{3}=28-\frac{k}{2}-\frac{k}{3}=28-\frac{5k}{6}$$

son racionales si $k \overset{\circ}{=} 6$.

$\rightarrow$ $k=0;\ 6;\ 12;\ 18;\ 24;\ 30;\ 36;\ 42;\ 48;\ 54$

Es decir, 10 términos son racionales.

I. **Falsa**

Términos irracionales son $(56+1)-10=47$.

II. **Verdadera**

Será fraccionario si $\left(28-\frac{5k}{6}\right)\in\mathbb{Z}^-$, lo cual ocurre si k es 36; 42; 48; 54; es decir, 4 términos.

III. **Falsa**

Se tendrá el término independiente de x

si $\left(28-\frac{5k}{6}\right)=0 \rightarrow \nexists\, k\in\mathbb{N}$

Luego, no existe término independiente.

Problema 17

Si x^P se encuentra en el desarrollo de $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{2n}$, ¿cuál es su coeficiente?

Resolución

Sea el término de lugar $k+1$

$$t_{k+1} = C_k^{2n}\left(x^2\right)^{2n-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k = C_k^{2n}\cdot x^{4n-2k-k}$$

Por dato

$$4n-3k=P \rightarrow k=\frac{4n-P}{3}.$$

Luego, su coeficiente es $C_{\frac{4n-P}{3}}^{2n}$.

Problema 18

Calcule el coeficiente de x^7 en el desarrollo de $\left(2x^2+x-1\right)^5$.

Resolución

Agrupando

$$\left[\left(2x^2+x\right)-1\right]^5$$

Aplicando la fórmula general como si fuera un binomio

$$t_{k+1} = C_k^5\underbrace{\left(2x^2+x\right)^{5-k}}\cdot(-1)^k$$

$$C_P^{5-k}\left(2x^2\right)^{5-k-P}\cdot x^P$$

Entonces

$$t_{k+1} = (-1)^k C_k^5 C_P^{5-k}\cdot 2^{5-k-P}\cdot x^{2(5-k-P)+P} \qquad (\alpha)$$

Por dato

$$10-2k-2P+P=7$$

$\rightarrow$ $2k+P=3;\ k\geq P$

Entonces, se cumple cuando

$$k=1 \wedge P=1 \vee k=0 \wedge P=3$$

I. Si $k=1;\ P=1$ en (α)

$$t_2 = C_2^5\cdot C_2^4\cdot 2^2\cdot x^7 = 5\cdot 4\cdot 8x^7 = -160x^7$$

II. Si $k=0;\ P=3$ en (α)

$$t_1 = (1)C_0^5\cdot C_3^5\cdot 2^2\cdot x^7 = 40x^7$$

Luego, el término es

$$(-160+40)x^7=-120x^7$$

Por lo tanto, su coeficiente es -120.

Problema 19

Sabiendo que $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$; $n\in\mathbb{N}$, calcule $k=a_0+2a_1+3a_2+4a_3+...(n+1)a_n$.

Resolución

Del dato

$$(1+x)^n=C_0^n+C_1^nx+C_2^nx^2+...+C_n^nx^n$$

Si $x=1 \rightarrow C_0^n+C_1^n+C_2^n+...+C_n^n=2^n$

Se pide el valor de

$$k=C_0^n+2C_1^n+2C_2^n+4C_3^n+...+(n+1)C_n^n$$

$$k=\left[C_0^n+C_1^n+...+C_n^n\right]+\left[C_1^n+2C_2^n+3C_3^n+...+nC_n^n\right]$$

$$k=2^n+nC_0^{n-1}+nC_1^{n-1}+...+nC_{n-1}^{n-1}$$

$$k=2^n+n\left[C_0^{n-1}+C_1^{n-1}+...+C_{n-1}^{n-1}\right]$$

$$\therefore\ k=2^n+n\cdot 2^{n-1}$$

Problema 20

Halle el número de términos en el desarrollo de $S_{(x;y)}=(x^2+y^5)^n$ si la suma de los grados absolutos de todos los términos es igual a 252.

Resolución

El desarrollo es

$$C_0^n(x^2)^n+C_1^n(x^2)^{n-1}(y^5)^1+C_2^n(x^2)^{n-2}(y^5)^2+...+C_n^n(y^5)^n$$

como la suma de grados absolutos es 252

$$\rightarrow\ 252=2[n+(n-1)+...+1]+5[1+2+3+...+n]$$

$$\rightarrow\ 252=2\frac{n(n+1)}{2}+5\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\rightarrow\ 252=\frac{7}{2}[n(n+1)]\ \rightarrow\ n(n+1)=8(9)$$

$$\rightarrow\ n=8$$

Por lo tanto, existen 9 términos.

Problema 21

Calcule la suma siguiente.

$$E=\frac{1!}{1!(n-1)!}+\frac{1!}{3!(n-3)!}+\frac{1!}{5!(n-5)!}+...+\frac{1!}{(n-1)!1!}$$

Resolución

Multiplicando por $n!$

$$n!\cdot E=\frac{n!}{1!(n-1)!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}+\frac{n!}{5!(n-5)!}+...+\frac{n!}{(n-1)!1!}$$

$$n!\cdot E=C_1^n+C_3^n+C_5^n+...+C_{n-1}^n \qquad (\alpha)$$

$$n!\cdot E=2^{n-1}$$

$$\therefore\ E=\frac{2^{n-1}}{n!}$$

Problema 22

Resuelva la ecuación

$$3C_1^x+5C_2^x+...+(2x-1)C_{x-1}^x=8^{23}-2(x+1).$$

Resolución

$$3C_1^x+5C_2^x+...+(2x-1)C_{x-1}^x+\underbrace{2(x+1)}_{(2x+1)C_x^x+1}=8^{23}$$

Nota

$$(2k+1)C_k^x=2kC_k^x+C_k^x$$

Luego

$$\left(2C_1^x+C_1^x\right)+\left(4C_2^x+C_2^x\right)+\ldots+\left(2xC_x^x+C_x^x\right)+1$$

$$=\underbrace{\left(C_1^x+C_2^x+\ldots+C_x^x+1\right)}+2\left\{C_1^x+2C_2^x+3C_3^x+\ldots+xC_x^x\right\}$$

$$=2^x+2\left\{xC_0^{x-1}+2\cdot\frac{x}{2}C_1^{x-1}+3\cdot\frac{x}{3}C_2^{x-1}+\ldots+x\cdot\frac{x}{x}C_{x-1}^{x-1}\right\}$$

$$=2^x+2x\cdot 2^{x-1}=2^x+x\cdot 2^x=2^x(x+1)$$

De donde se tiene

$$2^x(x+1)=8^{23}\quad\rightarrow\quad 2^x(x+1)=2^{69}=2^{63}\cdot 2^6$$

$$2^x(x+1)=2^{63}(63+1)$$

$$\therefore\quad x=63$$

Problema 23

Halle el coeficiente de a^3b^3c en el desarrollo de $(2a+b+3c)^7$.

Resolución

Su término general es

$$\frac{7!}{\alpha!\beta!\gamma!}(2a)^\alpha b^\beta(3c)^\gamma=\frac{7!}{\alpha!\beta!\gamma!}2^\alpha 3^\gamma a^\alpha b^\beta c^\gamma$$

Como la parte variable es a^3b^3c,

donde $\alpha=3$; $\beta=3$; $\gamma=1$,

luego, su coeficiente es

$$\frac{7!}{3!3!1!}\cdot 2^3\cdot 3^1=\frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5\cdot 4\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,\cancel{3!}}\cdot 8\cdot 3$$

$$=7\cdot 5\cdot 4\cdot 8\cdot 3=3360$$

Problema 24

Halle el coeficiente de x^{10} en el desarrollo de $\left(2+3x^3+x^4\right)^4$.

Resolución

Su término general es

$$\frac{4!}{\alpha!\beta!\gamma!}\cdot 2^\alpha\cdot\left(3x^3\right)^\beta\left(x^4\right)^\gamma=\frac{4!}{\alpha!\beta!\gamma!}\cdot 2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot x^{3\beta+4\gamma}$$

De donde

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=4\\ 3\beta+4\gamma=10\end{cases};\quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}_0^+$$

Resolviendo el sistema

$$\gamma=1\ \wedge\ \beta=2\ \wedge\ \alpha=1$$

Luego, su coeficiente es

$$\frac{4!}{1!2!1!}2^1\cdot 3^2=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{\cancel{2!}}\cdot\cancel{2}\cdot 9=216$$

Por lo tanto, el coeficiente de x^{10} es 216.

Problema 25

¿Cuántos términos existen en el desarrollo de $\left(3x+2y^3-z^2+w\right)^5$?

Resolución

El desarrollo de

$$\underbrace{\left(3x+2y^3-z^2+w\right)}_{4\text{ términos}}{}^5$$

tendrá

$$\frac{(5+4-1)!}{5!\cdot(4-1)!}=\frac{8!}{5!3!}=\frac{8\cdot 7\cdot\cancel{6}\,\cancel{5!}}{\cancel{5!}\,\cancel{3!}}=56$$

Por lo tanto, existen 56 términos.

Problema 26

Halle el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $\left(2+x^2-x^3\right)^{10}$.

Resolución

El término general es

$$\frac{10!}{\alpha!\beta!\gamma!}2^{\alpha}(x^2)^{\beta}\cdot(-x^3)^{\gamma}$$

$$=\frac{10!}{\alpha!\beta!\gamma!}2^{\alpha}(-1)^{\gamma}\cdot x^{2\beta+3\gamma} \qquad \text{(I)}$$

De donde $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=10\\ 2\beta+3\gamma=8\end{cases}$

El sistema se resuelve en

$\gamma=0 \wedge \beta=4 \wedge \alpha=6$

$\gamma=2 \wedge \beta=1 \wedge \alpha=7$

Luego, el coeficiente de x^8 en (I) es

$$\frac{10!}{6!4!0!}2^6\cdot(-1)^0+\frac{10!}{7!1!2!}2^7\cdot(-1)^2$$

$$=\frac{10\cdot\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\cancel{8}\cdot7\cancel{6!}}{\cancel{6!}4!}\cdot64+\frac{10\cdot9\cdot\overset{4}{\cancel{8}}\cancel{7!}}{\cancel{7!}\cancel{2!}}\cdot128$$

$=13\,440+46\,080=59\,520$

Por lo tanto, el coeficiente de x^8 es 59 520.

Problema 27

Halle el coeficiente de x^{17} en el desarrollo de $(1-2x+3x^2-x^4-x^5)^5$.

Resolución

Su término general es

$$\frac{5!}{a!b!c!d!e!}(1)^a\cdot(-2x)^b\cdot(3x^2)^c\cdot(-x^4)^d\cdot(-x^5)^e$$

$$\frac{5!}{a!b!c!d!e!}(-2)^b\cdot3^c(-1)^d\cdot(-1)^e\cdot x^{b+2c+4d+5e} \qquad \text{(I)}$$

De donde $\begin{cases}a+b+c+d+e=5\\ b+2c+4d+5e=17\end{cases}$

Del sistema se tendrá

$e=0 \wedge d=4 \wedge c=0 \wedge b=1 \wedge a=0$

$e=1 \wedge d=2 \wedge c=2 \wedge b=0 \wedge a=0$

$e=2 \wedge d=1 \wedge c=1 \wedge b=1 \wedge a=0$

$e=3 \wedge d=0 \wedge c=0 \wedge b=2 \wedge a=0$

$e=3 \wedge d=0 \wedge c=0 \wedge b=1 \wedge a=1$

Luego, el coeficiente será en (I)

$$\frac{5!}{0!1!0!4!0!}(-2)^1 3^0(-1)^4(-1)^0+\frac{5!}{0!0!2!2!1!}(-2)^0 3^2(-1)^2(-1)^1$$

$$+\frac{5!}{0!1!1!1!2!}(-2)^1 3^1(-1)^1(-1)^2+\frac{5!}{0!2!0!0!3!}(-2)^2 3^0(-1)^0(-1)^3$$

$$+\frac{5!}{1!1!0!0!3!}(-2)^1 3^0(-1)^0(-1)^3$$

Reduciendo

$$5(-2)+\frac{5\cdot\cancel{4}\cdot3\cdot2}{\cancel{4}}\cdot9(-1)+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot\cancel{2!}}{\cancel{2!}}\cdot(-2)(-3)$$

$$+\frac{5\cdot\overset{2}{\cancel{4}}\cdot\cancel{3!}}{\cancel{2}\cancel{3!}}\cdot4(-1)+\frac{5\cdot4\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}}\cdot(-2)(-1)$$

$=-10-270+360-40+40=80$

Por lo tanto, el coeficiente de x^{17} es 80.

Problema 28

Halle el término general de $(1-nx)^{1/n}$ en su desarrollo.

Resolución

De la fórmula general

$$t_{k+1}=\binom{1/n}{k}(-nx)^k$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{n}-k+1\right)}{k!}(-1)^k n^k x^k$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{\cancel{n}}\right)\left(\frac{1-n}{\cancel{n}}\right)\left(\frac{1-2n}{\cancel{n}}\right)\ldots\left(\frac{1-nk+n}{\cancel{n}}\right)}{k!}(-1)^k \cancel{n^k} x^k$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}\cdot(n-1)(2n-1)\ldots[(k-1)n-1]}{k!}(-1)^k\cdot x^k$$

Pero

$$(-1)^{k-1}\cdot(-1)^k=(-1)^{2k-1}=-1$$

$$\therefore\quad t_{k+1}=-\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)\ldots[(k-1)n-1]}{k!}x^k$$

Problema 29

Si los coeficientes de tres términos consecutivos de la expansión de $(x+y)^n$ son proporcionales a los números 3; 12; 28, calcule el valor de n, siendo $n<10$.

Resolución

Sean los términos consecutivos t_k; t_{k+1}; t_{k+2}

$$t_k=C_{k-1}^n x^{n-k+1}y^{k-1}$$

$$t_{k+1}=C_k^n x^{n-k}y^k$$

$$t_{k+2}=C_{k+1}^n x^{n-k-1}y^{k+1}$$

Por dato

$$\underbrace{\frac{C_{k-1}^n}{3}=\frac{C_k^n}{12}}_{1}=\underbrace{\frac{C_k^n}{12}=\frac{C_{k+1}^n}{28}}_{2}$$

De (1)

$$4C_{k-1}^n=C_k^n\ \rightarrow\ 4\frac{\cancel{n!}}{(k-1)!\,(n-k+1)!}=\frac{\cancel{n!}}{k!\,(n-k)!}$$

$$\rightarrow\ \frac{4}{\cancel{(k-1)!}\,(n-k+1)\,\cancel{(n-k)!}}=\frac{1}{k\,\cancel{(k-1)!}\,\cancel{(n-k)!}}$$

$$\rightarrow\ 4k=n-k+1\ \rightarrow\ k=\frac{n+1}{5}\qquad(\alpha)$$

De (2)

$$28C_k^n=12C_{k+1}^n\rightarrow 7\frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!}=3\frac{\cancel{n!}}{(k+1)!(n-\cancel{k}-1)!}$$

$$\rightarrow\ \frac{7}{\cancel{k!}\,(n-k)(n-\cancel{k}-1)!}=\frac{3}{(k+1)\,\cancel{k!}\,(n-\cancel{k}-1)!}$$

$$\rightarrow\ 7k+7=3n-3k\ \rightarrow\ 10k+7=3n\qquad(\beta)$$

De (α) en (β)

$$10\left(\frac{n+1}{5}\right)+7=3n$$

$$\rightarrow\ 2n+2+7=3n$$

$$\therefore\quad n=9$$

Problema 30

Si los coeficientes del primer y último término del desarrollo de $P_{(x;y)}=\left(3a^2x^3+ay^7\right)^{20}$ son iguales, halle el coeficiente del término de lugar 18.

Resolución

Veamos los términos

$$t_1=C_0^{20}\left(3a^2x^3\right)^{20}=C_0^{20}\cdot 3^{20}a^{40}x^{60}$$

$$t_{21}=C_{20}^{20}\left(ay^7\right)^{20}=C_{20}^{20}\,a^{20}y^{140}$$

Por dato: coeficientes iguales

$$\rightarrow\ 3^{20}a^{40}=a^{20}\ \rightarrow\ a=\frac{1}{3}$$

$$\rightarrow\ t_{18}=t_{17+1}=C_{17}^{20}\left(3a^2x^3\right)^3\left(ay^7\right)^{17}$$

$$\rightarrow\ \text{Coef. } t_{18}=C_{17}^{20}3^3a^6a^{17},\ \text{donde } a=1/3$$

$$\rightarrow\ \text{Coef. } t_{18}=\frac{20!\ 3^3}{17!\ 3!}\left(\frac{1}{3}\right)^{23}=\frac{20\cdot19\cdot18}{6}\cdot3^{-20}$$

$$\therefore\ \text{Coef. } t_{18}=380\cdot3^{-19}$$

Problema 31

El coeficiente binómico de x^{45} en el desarrollo de $\left(x+x^{-2}\right)^{78}$ es $\binom{78}{a}$, con $a<20$. Halle el coeficiente de x^{4a-8}.

Resolución

Sea el término de lugar $a+1$ el que contiene a x^{45}.

$$t_{a+1}=\binom{78}{a}x^{78-a}\cdot\left(x^{-2}\right)^a=\binom{78}{a}x^{78-a-2a}$$

Del dato

$$78-a-2a=45\ \rightarrow\ 33=3a\ \rightarrow\ a=11$$

Se busca entonces el coeficiente de $x^{4(11)-8}$, es decir, de x^{36}.

Sea el término de lugar $k+1$ el que contiene a x^{36}

$$\rightarrow\ t_{k+1}=\binom{78}{k}x^{78-k}\left(x^{-2}\right)^k=\binom{78}{k}x^{78-k-2k}$$

Por dato: $78-k-9k=36\ \rightarrow\ k=14$

Por lo tanto, su coeficiente es $\binom{78}{14}$.

Problema 32

Halle el coeficiente de x^5 en el desarrollo de $P_{(x)}=\left(1+x-x^3\right)^6$.

Resolución

Aplicando la fórmula del término general

$$\frac{6!}{\alpha!\beta!\gamma!}(1)^\alpha\cdot(x)^\beta\left(-x^3\right)^\gamma=(-1)^\gamma\frac{6!}{\alpha!\beta!\gamma!}x^{\beta+3\gamma}$$

Donde

$\beta+3\gamma=5$

$\alpha+\beta+\gamma=6$

Resolviendo tenemos

$\gamma=0\ \wedge\ \beta=5\ \wedge\ \alpha=1$

$\gamma=1\ \wedge\ \beta=2\ \wedge\ \alpha=3$

Entonces, su coeficiente es

$$\underbrace{(-1)^\gamma\frac{6!}{1!5!0!}}_{6}+\underbrace{(-1)^1\frac{6!}{3!2!1!}}_{-60}$$

Por lo tanto, el coeficiente de x^5 es -54.

Problema 33

Halle el término independiente de x en el desarrollo de $\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^4$.

Resolución

En el término general

$$\frac{4!}{\alpha!\beta!\gamma!}(x)^\alpha\cdot(x)^{-\beta}(1)^\gamma=\frac{4!}{\alpha!\beta!\gamma!}x^{\alpha-\beta}$$

Del dato

$\alpha+\beta+\gamma=4$

$\alpha-\beta=0\ \rightarrow\ \alpha=\beta\ \rightarrow\ 2\alpha+\gamma=4$

Si

$\alpha=0 \wedge \gamma=4$

$\alpha=1 \wedge \gamma=2$

$\alpha=2 \wedge \gamma=0$

Luego, su coeficiente es

$$\frac{4!}{0!\,0!\,4!}+\frac{4!}{1!\,1!\,2!}+\frac{4!}{2!\,2!\,0!}=1+12+6=19$$

Problema 34

Al desarrollar solo dos términos de la expresión matemática $A_{(x)}=\dfrac{2^{12}}{\sqrt{4-x}}$, estos se aproximan a un polinomio $P_{(x)}$. Evalúe $P_{(8)}$.

Resolución

$$A_{(x)}=2^{12}(4-x)^{-1/2}=2^{12}.\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2}$$

$$P_{(x)}=2^{11}.\left(1-\frac{x}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \rightarrow P_{(x)}=2^{11}\left(1+\frac{x}{8}\right)$$

$$\therefore\ P_{(8)}=2^{11}\cdot 2=2^{12}$$

Problema 35

Sabiendo que el desarrollo de $(a+b+c+d+e)^n$ admite 495 términos, indique cuántos términos tendrá el desarrollo de $(p+q+r)^n$.

Resolución

Recuerde el desarrollo de

$$\underbrace{(a+b+c+\ldots)}_{k\ \text{términos}}{}^{n},$$

donde el número de términos es

$$\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}$$

En el problema $k=5$

$$\frac{(n+4)!}{n!\,4!}=495 \rightarrow \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)\,n!}{n!\cdot 24}$$

$$\rightarrow (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)=24\cdot 495$$

Entonces

$$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)=9\cdot 10\cdot 11\cdot 12$$

de donde $n=8$.

Entonces $(p+q+r)^8$ tendrá

$$\frac{(8+3-1)!}{8!\,(3-1)!}=\frac{10!}{8!\,2!}=\frac{\overset{2}{\cancel{10}}\cdot 9\cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}\cdot \cancel{2}}=45$$

Por lo tanto, tendrá 45 términos.

Problema 36

Halle el tercer término de la expansión de

$$\frac{(1+x)^{3/4}+\sqrt{1+5x}}{(1-x)^2}.$$

Resolución

La expresión es equivalente a

$$\left[(1+x)^{3/4}+(1+5x)^{1/2}\right](1-x)^{-2}$$

Desarrollando tenemos

$$\left(1+\frac{3}{4}x-\frac{3}{32}x^2+\ldots+1+\frac{5}{2}x-\frac{25}{8}x^2+\ldots\right)(1+2x+3x^2+\ldots)$$

$$=\left(2+\frac{13}{4}x-\frac{103}{32}x^2+\ldots\right)(1+2x+3x^2+\ldots)$$

Efectuando la multiplicación

$$2+4x+6x^2+\frac{13}{4}x+\frac{13}{2}x^2+\frac{13}{4}\cdot 3x^3-\frac{103}{32}x^2-\frac{103}{32}x^2\cdot 2x\ldots$$

$$=2+\left(4+\frac{13}{4}\right)x+\left(6+\frac{13}{2}-\frac{103}{32}\right)x^2+\ldots$$

$$=2+\frac{29}{4}x+\frac{297}{32}x^2+\ldots$$

Por lo tanto, el tercer término es $\dfrac{297}{32}x^2$.

Problema 37

Halle el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $(1-2x+3x^2)^{-3}$.

Resolución

Agrupando $[1-(2x-3x^2)]^{-3}$

> **Nota**
> $(1-a)^{-3}=1+3a+6a^2+10a^3+15a^4+...$

En el problema

$$=1+3(2x-3x^2)+6(2x-3x^2)^2+10(2x-3x^2)^3+15(2x-3x^2)^4+...$$

Sumando los coeficientes de x^4

$$6\cdot 9+10\cdot 3\cdot 2^2(-3)+15\cdot 2^4$$

Efectuando se obtiene -66.

Por lo tanto, el coeficiente de x^4 es -66.

Problema 38

Indique el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $(1-2x+3x^2)^{-1/2}$.

Resolución

Agrupando $[1-(2x-3x^2)]^{-1/2}$; su desarrollo es

$$1+\frac{1}{2}(2x-3x^2)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(2x-3x^2)^2$$

$$-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(2x-3x^2)^3$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{4!}(2x-3x^2)^4+...$$

$$=1+\frac{1}{2}(2x-3x^2)+\frac{3}{8}(2x-3x^2)^2+\frac{5}{16}(2x-3x^2)^3+\frac{35}{128}(2x-3x^2)^4+...$$

Buscando el coeficiente de x^4

$$\frac{3}{8}\cdot 3^2+\frac{5}{16}\cdot 3\cdot 2^2(-3)+\frac{35}{128}\cdot 2^4=\frac{27}{8}-\frac{45}{4}+\frac{35}{8}$$

$$=-\frac{9}{4}$$

Por lo tanto, el coeficiente es $-9/4$.

Problema 39

Halle el coeficiente de x^7y^2 en el desarrollo de $f_{(x;y)}=(x+y)^5\cdot(2x-y)^4$.

Resolución

Un término cualesquiera de la expansión de $f_{(x;y)}$ es

$$t_{k+1;r+1}=C_k^5x^{5-k}y^k\cdot C_r^4(2x)^{4-r}(-y)^r$$

$$=\underbrace{2^{4-r}(-1)^rC_k^5C_r^4}_{\text{Coef.}}x^{9-k-r}y^{k+r}$$

Del dato tenemos $9-k-r=7 \wedge k+r=2$

$\rightarrow$ $k+r=2$, además $k;r\in\mathbb{Z}_0^+$

$\rightarrow$ $k=2-r$;

$\rightarrow$ $k=0;\quad r=2$

$k=1;\quad r=1$

$k=2;\quad r=0$

Luego, el coeficiente de x^7y^2 es

$$\text{Coef.}=\sum 2^{4-r}(-1)^rC_k^5C_r^4$$

$$=\sum_{r=0}^{2}2^{4-r}(-1)^rC_{2-r}^5C_r^4=24-160+160$$

$$=24$$

Por lo tanto, el coeficiente de x^7y^2 es 24.

Problema 40

Halle el lugar que ocupa el término independiente en la expansión de $\left(\sqrt[7]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$ si los coeficientes de los términos t_{r+1} y t_r están en la relación de $(2r+3)$ a r respectivamente.

Resolución

Sea $t_{k+1}=C_k^n\left(x^{\frac{1}{7}}\right)^{n-k}\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^k$ el término arbitrario; luego, si se trata del término independiente, el exponente de x es cero; entonces

$$\frac{n-k}{7}-\frac{k}{3}=0 \rightarrow 3n=10k \qquad (\alpha)$$

$n\in\mathbb{N}; k\in\mathbb{N}$

$\rightarrow n=\overset{o}{10} \wedge k=\overset{o}{3}$

También tenemos por dato

$$\frac{C_r^n}{C_{r-1}^n}=\frac{2r+3}{r}$$

$$\rightarrow \frac{\frac{n-r+1}{r}C_{r-1}^n}{C_{r-1}^n}=\frac{2r+3}{r}$$

$\rightarrow n=3r+2;\ r\in\mathbb{N};\ n\in\mathbb{N};\ n=\overset{o}{10}$

Luego, el menor valor de $r=6$, para $n=20$, de (α)

$3(20)=10k$

$\rightarrow k=6$

Por lo tanto, el lugar del término independiente (t_7) es siete.

Test 10

1. Luego de resolver la ecuación

$$\frac{(n+4)!}{(n+2)!}=6n+18,$$

calcule el valor de $\sqrt{5n-1}$.

A) 2 B) 3 C) $\sqrt{14}$
D) $\sqrt{24}$ E) $\sqrt{15}$

2. Indique cuál es el valor de a que hace posible la igualdad

$$\frac{(a+1)!+(a+2)!+(a+3)!}{(a+1)!}=81.$$

A) 3 B) 9 C) 6
D) 5 E) 8

3. Indique cuál es el equivalente reducido de

$$C_0^{12}+3C_0^{10}-4C_{15}^{15}+5C_{100}^{101}.$$

A) 101 B) 202 C) 303
D) 505 E) 707

4. Simplifique la expresión

$$\frac{C_1^4+C_2^4+C_3^5+C_4^6+C_5^7+C_2^8}{C_4^7+C_2^7+C_2^8}.$$

A) 6/5 B) 1 C) 7/4
D) 5/6 E) 2/7

5. Calcule el mayor valor de x que verifica la igualdad.

$$C_{x^2+2x}^{26}=C_{x^2+2}^{26}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

6. Resuelva la ecuación.

$$4C_3^{n+1}+C_3^n+C_3^{n+2}=100n$$

A) 10 B) 11 C) 12
D) 9 E) 8

7. Si se cumple que

$$C_{n-5}^{n-2}+C_{n-4}^{n-2}+C_{n-3}^{n-1}=C_3^{84},$$

calcule el valor de $\sqrt{n-3}$.

A) 7 B) 8 C) 9
D) 6 E) 11

8. ¿Cuál es el término de lugar 13 en el desarrollo de

$$\left(x^2+\frac{1}{x^5}\right)^{15}?$$

A) $320x^{-54}$
B) $390x^{-54}$
C) $455x^{-54}$
D) $655x^{-54}$
E) $755x^{-54}$

9. En el desarrollo de $(1+x)^{3n}$, ¿cuál es la razón entre r y n para que los coeficientes de los términos de lugares $3r$ y $r+2$ sean iguales?

A) 1/2 B) 1/3 C) 2/3
D) 3/4 E) 2/5

10. ¿Cuál es el coeficiente del término central en el desarrollo de $\left(\frac{1}{x^2}-x^4\right)^{16}$?

A) C_9^{16} B) $-C_9^{16}$ C) C_8^{16}
D) $-C_8^{16}$ E) C_7^{16}

11. ¿Qué grado tiene el término de lugar 15 en el desarrollo de $(3x^3-2y^2)^{30}$?

A) 72 B) 66 C) 48
D) 68 E) 76

12. ¿Cuántos términos racionales enteros existen en el desarrollo de $\left(x^6-2x^2+\frac{1}{x^2}\right)^{50}$?

A) 76 B) 25 C) 74
D) 32 E) 27

Claves

1 B	3 D	5 C	7 C	9 D	11 E
2 C	4 B	6 A	8 C	10 C	12 A

Problemas PROPUESTOS

Nivel I

1. Simplifique la expresión S.

$$S=\frac{x!+(x+1)!}{x!}-\frac{(x+2)!-(x+1)!}{(x+1)!}.$$

A) 1 B) x C) $x-1$
D) $x+1$ E) 0

2. ¿Cuál es el valor simplificado de

$$M=\frac{2!-1!}{0!}+\frac{3!-2!}{1!}+\ldots+\frac{11!-10!}{9!}?$$

A) 55 B) 77 C) 285
D) 85 E) 385

3. ¿Cuál es el menor valor de n que justifique la igualdad $(n+3)!=n^4+6n^3+11n^2+6n$?

A) 1 B) 0 C) 2
D) 3 E) 4

4. A partir de la ecuación

$$\frac{(n-5)!\,(n-6)!}{(n-5)!-(n-6)!}=720\left(n^2-12n+35\right),$$

indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. n es múltiplo de 6
II. n es par y múltiplo de 7
III. n es tal que $n+2=2^4$

A) VVV B) FVF C) VVF
D) FVV E) VFV

5. Si la expresión T está definida por

$$T=\frac{0!}{2!}+\frac{1!}{3!}+\frac{2!}{4!}+\ldots \text{ 33 sumandos,}$$

¿cuál es el valor simplificado de T?

A) $\frac{32}{33}$ B) $\frac{31}{32}$ C) $\frac{33}{30}$
D) $\frac{33}{34}$ E) $\frac{313}{217}$

6. Sea T la expresión tal que

$$T=\frac{11^{11!+3}\cdot 5^{11!}\cdot(2!)^{11!}(9!)^{(12)!}}{(9!)^{11(11)!}\cdot(11)!^{11!}\cdot 11}.$$

Calcule el valor de $\sqrt{T}$.

A) 11 B) $\sqrt{11}$ C) 121
D) $\sqrt{18}$ E) $\sqrt{99}$

7. Indique el valor de x que verifica la ecuación

$$C_4^{x+3}+C_{x-2}^{x+3}=C_{x-1}^{x+5}-1$$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 7 E) 8

8. ¿Cuál es el valor de n que hace posible la igualdad

$$C_7^{n-5}+C_{n-13}^{n-5}+C_9^{n-4}=C_5^{n-3}?$$

A) 15 B) 17 C) 19
D) 22 E) 10

9. Si $A=C_k^n$; $B=C_k^{n-1}$, ¿qué relación existe entre A y B?

A) $n(A-B)=Ak$
B) $n(A+B)=Bk$
C) $nA=kB$
D) $nB=kA$
E) $A=(n-k)B$

10. Halle el equivalente reducido de S.

$$S=\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6}+\binom{9}{7}.$$

A) C_3^{10} B) C_7^{11} C) C_4^{11}
D) C_6^{10} E) C_9^{11}

11. Simplifique la expresión

$$\frac{C_{10}^{20}\cdot C_{20}^{26}-C_9^{19}\cdot C_6^{26}}{C_5^{25}\cdot C_9^{19}+C_6^{25}\cdot C_{10}^{19}}.$$

A) C_5^{26} B) C_{19}^{26} C) C_{19}^{25}
D) C_6^{25} E) 1

12. De la igualdad

$$\underbrace{C_9^{10}+C_9^{11}+C_9^{12}+\ldots+C_9^{m}}_{n \text{ sumandos}}=C_p^{29}-1$$

determine el mayor valor de $(m+n+p)$.

A) 57 B) 66 C) 49
D) 68 E) 72

13. ¿Cuál es el término central en el desarrollo de $\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)^{10}$?

A) 186 B) 345 C) 230
D) 248 E) 252

14. En el desarrollo de $(x^8+y^{2n})^{2m}$ se cumple que la diferencia de grados de los términos sexto y decimosexto es 20.
Calcule el valor de $\sqrt[3]{n^2-1}$.

A) 8 B) $\sqrt[3]{3}$ C) 2
D) $\sqrt[3]{35}$ E) 4

15. En el desarrollo de $\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^{5n+2}$, el término del lugar 25 es de la forma $Ax^{44}\cdot y^{k}$. Calcule el valor de $n+2$.

A) 16 B) 14 C) 18
D) 10 E) 12

16. En el desarrollo de $(x^3+y^2)^m$ se cumple que el término del lugar 24 es igual al término del lugar 24 pero contado a partir del final. ¿Cuántos términos tiene el desarrollo?

A) 37
B) 47
C) 48
D) 46
E) Indeterminado

17. Si la suma de los coeficientes del desarrollo de $(x^2+y^3)^{16}$ es cuatro veces la suma de coeficientes del desarrollo de $(x^8+x^4)^{n-1}$, ¿cuál es el valor de n?

A) 11 B) 15 C) 14
D) 13 E) 12

18. Al efectuar el desarrollo de $(x+y+z+w)^n$ se obtienen 286 términos.
¿Cuál es el valor de $n+5$?

A) 14 B) 15 C) 17
D) 16 E) 13

19. Halle el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $P_{(x)}=(x^2+x+1)^5$.

A) 37 B) 41 C) 45
D) 16 E) 22

20. Calcule la suma de los coeficientes de los tres primeros términos del desarrollo de $(1+x)^{-4}$.

A) 6 B) 5 C) 7
D) 4 E) 8

Nivel II

21. En la expansión de $(1+x)^{43}$, los coeficientes de los términos de lugares $2r+1$ y $r+2$ son iguales. Halle r si es mayor que 2.

A) 13 B) 11 C) 10
D) 12 E) 14

22. ¿Cuántos términos del desarrollo de $(3\sqrt{3}+\sqrt{2})^{12}$ son números naturales?

A) 7 B) 6 C) 3
D) 4 E) 5

23. En el desarrollo del binomio $(ax^a+bx^b)^n$ los términos de lugares $a+3$ y $b-1$ equidistan de los extremos; además, la suma de todos los coeficientes es 27. Halle la suma de todos los exponentes de variable (x) en su desarrollo.

A) 20 B) 18 C) 16
D) 14 E) 15

24. Calcule el valor del término central en el desarrollo de $(x^{2n}+x^{-2n}+2)^{2n}$, si se sabe que es equivalente a

$$\frac{4n!}{(12-n)!\,(5n-12)!}.$$

A) C_9^{16} B) C_7^{20} C) C_8^{16}
D) C_{10}^{16} E) C_{12}^{20}

25. En el desarrollo del siguiente binomio $(a^4+b^5)^{3n}$ los términos de lugares $(n+6)$ y $(n+8)$ equidistan de los extremos. Determine el exponente de a en el término central.

A) 25 B) 36 C) 48
D) 72 E) 81

26. Halle el lugar que ocupa el término independiente de x en el desarrollo de

$$\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{154}.$$

A) 111 B) 113 C) 115
D) 117 E) 120

27. Halle el coeficiente del término que lleva x^6 en el desarrollo de $(x^2-2x+1)^5$.

A) 320 B) 420 C) 210
D) 260 E) 180

28. Halle el término independiente de x en el desarrollo de $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$.

A) $(-1)^n\cdot\dfrac{\lfloor 3n}{\lfloor 2n\cdot\lfloor n}$

B) $(-1)^n\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n\lfloor n}$

C) $(-1)^n\dfrac{\lfloor 3n}{\lfloor\frac{3n}{2}\lfloor\frac{3n}{2}}$

D) $(-1)^n\dfrac{\lfloor 3n}{\lfloor n-2\lfloor 2n+2}$

E) $(-1)^{n+1}\dfrac{\lfloor 3n}{\lfloor n-1\lfloor 2n+1}$

29. Halle $2n$ en la ecuación

$$\left(C_1^n\, C_2^n\, C_3^n \ldots C_n^n\right)(1!2!3!\ldots n!)^2 = (40\,320)^9.$$

A) 12 B) 14 C) 10
D) 16 E) 18

30. De la expansión de $\left(ax^b+bx^a\right)^{a+b}$, la raíz cuadrada de la suma de coeficientes es 216, y la parte literal (variable) del quinto término es x^{20}. Halle el coeficiente del cuarto término si $(a+b) \in \mathbb{N}$.

A) 10 240 B) 20 480 C) 5120
D) 2560 E) 51 200

31. Dados los términos semejantes, uno del desarrollo de $x\left(x^a+y^b\right)^a$ y otro de $y\left(x^b+y^a\right)^b$, que ocupan la misma posición en cada polinomio. Calcule el valor de $\dfrac{\left(a^2+b^2\right)^2}{1+a^2b^2}$.

A) 2 B) 4 C) 6
D) 9 E) 12

32. Siendo n un número entero positivo, halle el valor de

$$R = \frac{1}{4^n}\left\{C_0^{4n} - C_2^{4n} + C_4^{4n} - C_6^{4n} + \ldots + C_{4n}^{4n}\right\}.$$

A) -2
B) $(-1)^n$
C) $(-1)^{n+1}$
D) $(-1)^{n-1}$
E) 2

33. Halle el equivalente reducido de S.

$$S = \frac{C_1^n}{3} + \frac{2C_2^n}{3^2} + \frac{3C_3^n}{3^3} + \frac{4C_4^n}{3^4} + \ldots + \frac{nC_n^n}{3^n}.$$

A) $\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$ B) $\dfrac{n}{3}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$ C) $\dfrac{n}{3}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n+1}$

D) $\dfrac{n}{3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$ E) $\dfrac{n}{3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n}$

34. Halle el equivalente reducido de M.

$$M = 5C_0^n + \frac{5^2C_1^n}{2} + \frac{5^3C_2^n}{3} + \frac{5^4C_3^n}{4} + \ldots + \frac{5^{n+1}C_n^n}{n+1}.$$

A) $\dfrac{5^{n+1}-1}{n+1}$ B) $\dfrac{6^{n+1}+1}{n-1}$ C) $\dfrac{6^{n+1}-1}{n+1}$

D) $\dfrac{6^{n+1}-2}{n+2}$ E) $\dfrac{5^{n+1}-2}{n+2}$

35. Calcule el valor de

$$C_1^n - 3C_3^n + 9C_5^n - 27C_7^n + \ldots; \quad n \in \mathbb{N}.$$

A) $\dfrac{2^n}{\sqrt{3}}$

B) $\dfrac{2^n}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{3}$

C) $\dfrac{2^n}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\dfrac{2n\pi}{3}$

D) $\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}$

E) $\cos\dfrac{2\pi}{3}$

36. Halle el término independiente de x en el desarrollo de $\left(\dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{3x}\right)^9$.

A) 5/18 B) 1/3 C) 7/18
D) 4/9 E) 1/2

37. Halle el término independiente de x en el desarrollo de $\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^4$.

A) 18 B) 15 C) 17
D) 19 E) 16

38. Halle el equivalente de E

$E=C_1^n x(1-x)^{n-1}+2C_2^n x^2(1-x)^{n-2}+\ldots+nC_n^n x^n$.

A) nx B) $(n+1)x$ C) $(n-1)x$
D) $(1+x)n$ E) $(1-x)n$

39. Halle el término de mayor valor en el desarrollo de

$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)^{100}$ cuando $x=1$.

A) $\frac{100!\cdot 2^{-100}}{(49!)^2}$

B) $\frac{100!}{50!\cdot 51!}\cdot 2^{-100}$

C) $\frac{100!\cdot 2^{-99}}{50!\cdot 50!}$

D) $\frac{100!\cdot 2^{-99}}{51!\cdot 49!}$

E) $\frac{100!\cdot 2^{-100}}{(50!)^2}$

40. Sabiendo que en la expansión de $(3x+1)^n$ los términos de los lugares sexto y séptimo tienen el mismo coeficiente, calcule la suma de todos los coeficientes de dicha expansión.

A) 2^{22} B) 2^{26} C) 2^{34}
D) 2^{36} E) 2^{46}

41. En el desarrollo de $\left(3x^3+\frac{1}{x}\right)^n$ la suma de coeficientes de su desarrollo es 2^{34}. ¿Qué lugar ocupa un término que contiene a x elevado a un exponente igual al número de su lugar?

A) 10 B) 9 C) 12
D) 8 E) 11

42. Un término que se obtiene en el desarrollo de $(x+y+z+w)^9$ es $kx^3y^2z^3w$. ¿Cuánto será el valor de k?

A) 2520 B) 5040 C) 1460
D) 1260 E) 1070

43. Calcule el valor de S.

$S=\left(C_0^n\right)^2+\left(C_1^n\right)^2+\left(C_2^n\right)^2+\ldots+\left(C_n^n\right)^2$.

A) $\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}$ B) $\lfloor n$ C) $\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n}$

D) 2^{2n} E) $\lfloor 2n-1$

44. Halle el segundo término de la expansión de

$\frac{(1+x)^{1/4}\cdot\sqrt{1+5x}}{(1-x)^2}$.

A) $\frac{17}{2}x$ B) $\frac{23}{4}x$ C) $\frac{19}{4}x$

D) $6x$ E) $\frac{17}{4}x$

45. Calcule el valor de S.

$S=2+\frac{5}{3\cdot 2!}+\frac{5\cdot 7}{3^2\cdot 3!}+\frac{5\cdot 7\cdot 9}{3^3\cdot 4!}+\ldots$

A) $\sqrt{3}$ B) $3^{3/2}$ C) 3^{-1}
D) $3^{-1/2}$ E) $\sqrt{2}$

46. Calcule el valor de K.

$$K=1+\frac{3}{4}+\frac{3\cdot 5}{4\cdot 8}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12}+\ldots$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) $\sqrt{8}$

D) $\frac{1}{\sqrt{8}}$ E) 2

47. Si el desarrollo de $(1+x+x^2)^n$ es $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_rx^r+\ldots+a_{2n}x^{2n}$, calcule el valor de $a_1+a_4+a_7+\ldots$

A) 3^n B) 3^{n-1} C) 2^n

D) 2^{n-1} E) 3^{n+1}

48. Halle el coeficiente de x^6 en el desarrollo de

$$\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{9}\right)^{-2}.$$

A) $-10/27$ B) $10/27$ C) $2/27$

D) $-2/27$ E) $6/27$

49. Si $n\in\mathbb{Z}^+$, halle la suma de la serie S de n términos.

$$S=\frac{1}{2(1!)}+\frac{3}{2^2(2!)}+\frac{5}{2^3(3!)}+\frac{7}{2^4(4!)}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n(n!)}$$

A) $(2^n-1)/n!$

B) $(2^n\cdot n!-1)/2^n\cdot n!$

C) $(2n+1)/2^n\cdot n!$

D) $(2n-1)/2^n\cdot n!$

E) $(2n-n!)/2^n\cdot n!$

50. Indique la raíz cúbica del producto de todos los términos de la progresión de 3 términos.

$\leftrightarrow 9C_4^n : 5C_5^n : 5C_6^n$

A) 25 B) 105 C) 116

D) 95 E) 138

51. ¿Cuál es el valor del término independiente en el desarrollo de $A_{(x)}=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$?

A) 10 B) 20 C) 30

D) 39 E) 25

52. Halle el término constante del desarrollo de

$$F_{(x;y)}=\left(\frac{x^{n^{-2}}}{y^{n-1}}+\frac{2y^{2n}}{\sqrt[n]{x}}\right)^{4n}.$$

A) 220

B) 455

C) 1760

D) 458

E) 1920

53. Si el único término central del desarrollo de $H_{(x;y)}=\left(3x^2-\frac{2y}{x}\right)^n$ es de sexto grado, ¿qué exponente tendrá y en ese término?

A) 6 B) 4 C) 3

D) 5 E) 2

54. En la expansión de la expresión

$$F_{(x)}=\left(x^3\sqrt{x}-x^{-4}\right)^{15}$$

el término de lugar $(2n-3)$, contado a partir del extremo final, tiene por grado 45. Halle el grado del término de lugar $(n-1)$, contado a partir del extremo inicial.

A) 8 B) 26 C) 28

D) 0 E) 30

55. Los términos de lugares: n; $(n+1)$ y $(n+2)$ del desarrollo de $E_{(x)}=(1-x)^m$ se hallan en progresión geométrica. Según esto, halle el término de lugar veinte e indique la parte lateral.

A) x^{19} B) x^{21} C) x^{22}
D) x^{20} E) x^{23}

56. Si $ka^2b^3c^m$ pertenece a la expansión de $E_{(a;b;c)}=(a+b+c)^7$, calcule el valor de $k+3m$.

A) 4^3 B) 5^3 C) 6^3
D) 7^3 E) 8^3

57. En el desarrollo de

$$M_{(x)}=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^7+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^7;$$

indique el coeficiente del término lineal.

A) -7 B) -14 C) 21
D) 7 E) 14

58. Halle el coeficiente de x^7y^2 en el desarrollo de $f_{(x;y)}=(x+y)^5(2x-y)^4$.

A) -16 B) 24 C) -160
D) 48 E) 344

59. Calcule el valor aproximado de

$S=\sqrt[3]{30}+\sqrt[4]{93}+\sqrt[5]{288}+\ldots$ 27 radicales.

A) 80 B) 81 C) 82
D) 83 E) 84

60. En el desarrollo de $\left(x^2+y-x\right)^8$, halle el coeficiente de los términos de la forma $x^{10}y^k$, donde k es un número par no nulo.

A) 420
B) 420; 560
C) -420; 56
D) 56
E) 560

CLAVES
Problemas propuestos

NIVEL I

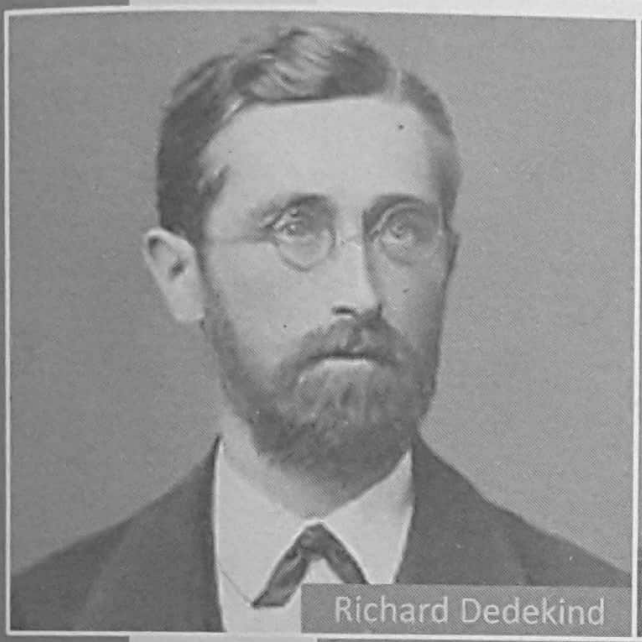
1 A	5 D	9 A	13 E	17 B
2 E	6 A	10 A	14 C	18 B
3 A	7 A	11 E	15 E	19 C
4 D	8 B	12 B	16 B	20 C

NIVEL II

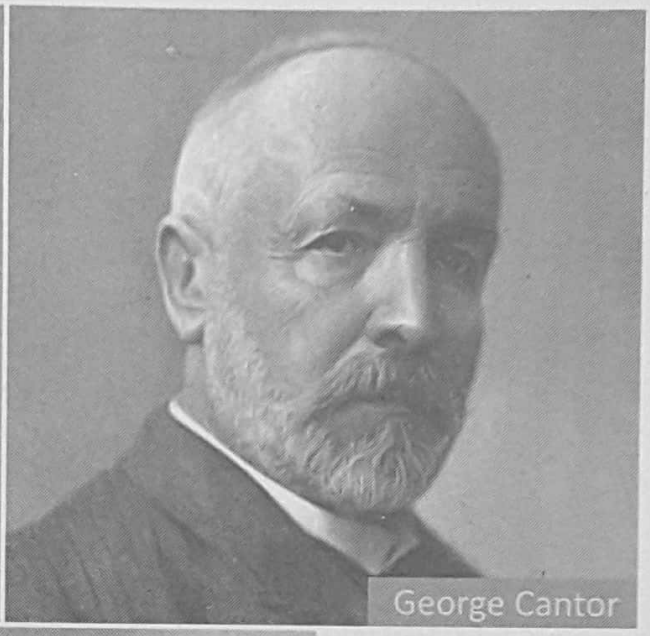
21 E	29 D	37 D	45 B	53 C
22 A	30 A	38 A	46 C	54 D
23 B	31 B	39 E	47 B	55 A
24 C	32 B	40 E	48 D	56 C
25 D	33 B	41 E	49 B	57 B
26 B	34 C	42 B	50 B	58 B
27 C	35 B	43 A	51 A	59 E
28 A	36 C	44 C	52 C	60 A

Capítulo

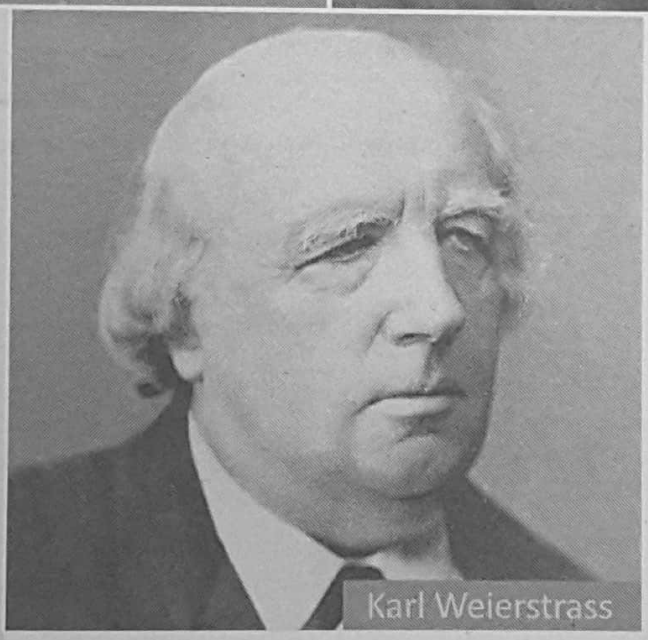
XI



Richard Dedekind



George Cantor



Karl Weierstrass

Números reales

CAPÍTULO XI

NÚMEROS REALES

Objetivos

- Diferenciar las propiedades de los diversos conjuntos numéricos.
- Conocer la estructura del campo de los números reales.
- Identificar los elementos distinguidos de un campo.
- Demostrar teoremas aplicando los axiomas de los números reales.

Introducción

No es posible jugar ajedrez sin conocer las reglas, ya que podríamos mover un peón cuatro espacios hacia delante o una de las torres diagonalmente. Análogamente, no podremos trabajar con los números sin conocer las reglas que los gobiernan.

Los números están vinculados a diversas aplicaciones teóricas y prácticas. Podríamos citar el caso de la música, donde los números se relacionan estrechamente con ella; se ha descubierto que existe una relación entre la calidad armónica de los acordes de una lira y las razones entre las longitudes de las cuerdas pulsadas.

Con tantas otras aplicaciones, no nos equivocamos al decir que el mundo está gobernado por los números.

El número es el concepto matemático más importante, incluso marca hitos en la historia, así:

- El origen de los números naturales caracteriza a la sociedad primitiva y es acondicionado para resolver las necesidades de las actividades prácticas del hombre.
- La aplicación de los números fraccionarios positivos fue acondicionada a la necesidad de efectuar mediciones más pequeñas que la unidad.
- La introducción de los números negativos fue provocada por el desarrollo del álgebra en la resolución de problemas generales (siglo XVII).
- En los años setenta del siglo XIX, fue desarrollada una teoría rigurosa de los números reales en los trabajos de R. Dedekind, G. Cantor y K. Weierstrass.

Cada conjunto numérico ha sido creado por extensión debido a ciertas necesidades circunstanciales del hombre para resolver los problemas concretos de la vida cotidiana.

DEFINICIÓN PREVIA

Un número es un ente (algo intangible, por decirlo así) que nos sirve para contar y establecer un orden de sucesión entre las cosas. Los números se pueden clasificar en naturales, enteros, racionales, irracionales, reales y complejos.

Para tener una idea más completa de los números reales $\mathbb{R}$, veamos cómo están estructurados los diversos subconjuntos que lo conforman. Cada conjunto numérico engloba a otros, como vemos a continuación:

- Números reales ($\mathbb{R}$)
  - Números racionales ($\mathbb{Q}$)
    - Números enteros ($\mathbb{Z}$)
      - Enteros positivos ($\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$)
      - Número cero (0)
      - Enteros negativos ($\mathbb{Z}^-$)
    - Números fraccionarios
  - Números irracionales ($\mathbb{Q}' = \mathbb{I}$)
    - Irracional algebraico: $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{7}-9$; ...
    - Irracional trascendente: π; e; ...

Haremos una descripción de los subconjuntos más importantes de $\mathbb{R}$.

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

En el desarrollo de las culturas fue evolucionando esta forma primitiva de representar objetos o cosas reales a través de símbolos, naciendo así el primer conjunto de números llamados números naturales. Estos números son utilizados fundamentalmente para contar.

Los números naturales sirven para designar la cantidad de elementos que tiene un cierto conjunto y se afirma que son infinitos. El conjunto formado por todos estos números se designa por $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; ...\}$$

El cero se excluye del conjunto de los números naturales, sin embargo hay algunos autores que sí lo consideran.

Los números naturales representan la cardinalidad o también la ordinalidad de un conjunto, pues sirven para ordenar los elementos de este.

Los números naturales son los primeros que surgen en las distintas civilizaciones, ya que las tareas de contar y de ordenar son las más elementales que se pueden realizar en el tratamiento de las cantidades. Entre los números naturales están definidas las operaciones de adición y multiplicación. Además, el resultado de sumar o de multiplicar dos números naturales es también un número natural, por lo que se dice que son operaciones internas.

La sustracción, sin embargo, no es una operación interna en $\mathbb{N}$, pues la diferencia de dos números naturales no necesariamente es un número natural. La división tampoco es una operación interna en $\mathbb{N}$, pues el cociente de dos números naturales no necesariamente es otro número natural.

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES

La adición de los números naturales cumple las siguientes propiedades:

Ley de clausura

Para todo par de números naturales, la suma de ellos es otro número natural.

Asociativa

Si a, b y c son números naturales cualesquiera, se cumple que:

$(a+b)+c=a+(b+c)$

$(7+4)+5=11+5=16;$

asimismo $7+(4+5)=7+9=16$

Es decir, se puede agrupar en forma indistinta.

Conmutativa

El orden de los sumandos no altera la suma total. Si a y b son números naturales cualesquiera, se cumple que: $a+b=b+a$

En particular, para los números 7 y 4 se verifica que: $7+4=4+7=11$

Gracias a las propiedades asociativa y conmutativa de la adición se pueden efectuar operaciones complicadas de los números naturales.

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES

La multiplicación de los números naturales cumple las siguientes propiedades:

Ley de clausura

Para todo par de números naturales, su producto es otro número natural.

Asociativa

Si a, b y c son números naturales cualesquiera, se cumple que: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

Por ejemplo

$(3\cdot 5)\cdot 2=15\cdot 2=30$

$3\cdot(5\cdot 2)=3\cdot 10=30$

vemos que

$(3\cdot 5)\cdot 2=3\cdot(5\cdot 2)$

Conmutativa

Si a y b son números naturales cualesquiera, se cumple que:

$a\cdot b=b\cdot a$

$5\cdot 8=8\cdot 5=40$

Elemento neutro

El 1 es el elemento neutro de la multiplicación porque cualquiera que sea el número natural a, se cumple que:

$a\cdot 1=a=1\cdot a$

$7\cdot 1=1\cdot 7=7$

Distributividad del producto respecto de la adición

Si a, b y c son números naturales cualesquiera, se cumple que:

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

$5\cdot(3+8)=5\cdot 11=55$

asimismo $5\cdot 3+5\cdot 8=15+40=55$

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Son todos los números naturales y sus opuestos aditivos, es decir, los números enteros positivos y negativos, incluido el número cero y es representado por:

$\mathbb{Z}=\{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$

NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

Los números naturales son llamados también los enteros positivos y se denotan por $\mathbb{Z}^+$. Es decir $\mathbb{N}=\mathbb{Z}^+$.

El número 8 es un entero positivo y se puede representar como 8 o como +8.
El número 24 es un entero positivo y se puede representar como 24 o como +24.

NÚMEROS ENTEROS NEGATIVOS

Los enteros negativos son los números naturales que llevan antepuesto un signo negativo (–). Se denota por $\mathbf{Z}^-$, es decir $\mathbf{Z}^-=\{...; -3; -2; -1\}$.
El número –8 es un entero negativo; el número –24 también es un entero negativo.

> **Nota**
> El conjunto de los números enteros no negativos es {0; 1, 2; 3; ...} y el conjunto de los números enteros no positivos es {...; –3; –2; –1; 0}.

NÚMERO CERO

Es un número entero que no es ni positivo ni negativo y se denota mediante 0. Es conocido también como el elemento neutro aditivo.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Para sumar números enteros tenemos dos posibilidades:

Si los números son del mismo signo

Cuando tengamos dos números de igual signo, lo que tendremos que hacer es sumar las cantidades y al resultado anteponerle el mismo signo.
En el caso 35+46+11, aquí tenemos tres números positivos: +35; +46; +11.
Entonces, al sumar los tres números nos dará 92; como vemos, el resultado también será positivo.
En el caso –12–28–21, aquí los números también se suman y al resultado se le antepone el signo negativo; es decir, el resultado será –61.

Si tenemos números de signos diferentes

Si tenemos dos números de diferentes signos, los números se restarán y al resultado se le antepone el signo del mayor en valor absoluto.
Así, en la operación 35–46 tenemos un número positivo y otro negativo, y el resultado será –11 ya que 46 es mayor que 35 (en valor absoluto).
En cambio, en –12+28 el resultado será 16 ya que 28 es mayor que 12.
El número cero es llamado neutro aditivo ya que cualquier número sumado con cero obtiene como resultado el mismo número, es decir, $a+0=a$ para todo a entero.

MULTIPLICACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Cuando tengamos que multiplicar dos o más números enteros, lo primero que debemos hacer es proceder a multiplicar los números sin importarnos el signo que estos tengan. Una vez que hemos hallado el resultado, recién colocaremos el signo que corresponda de acuerdo a la siguiente ley de signos:

- El resultado de multiplicar dos números enteros del mismo signo es otro número entero positivo: $4\cdot 5=20$; $(-7)\cdot(-3)=21$.
- El resultado de multiplicar dos números enteros de signos distintos es otro número entero negativo: $(3)\cdot(-4)=-12$; $(-2)\cdot(5)=-10$

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

Un error frecuente que se comete al trabajar con potencias de números es no tener en cuenta el uso de los paréntesis. Por ejemplo, no es lo mismo expresar $(-3)^2$ que -3^2.
En $(-3)^2$, el exponente 2 afecta al signo y al número, es decir: $(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=9$

En -3^2, el exponente 2 solo está afectando al número 3, es decir: $-3^2=-(3\cdot 3)=-9$

La radicación no necesariamente está definida en este conjunto; puede ocurrir que la raíz cuadrada de cierto número no resulte ser entero, por ejemplo $\sqrt{13}$. Como vemos, no existe un número entero que sea raíz cuadrada de 13.

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Son todos aquellos números que se pueden escribir en forma de división de números enteros, exceptuando la división por cero, y que pueden ser exactos o inexactos; se incluyen los naturales, enteros y las fracciones, y se les denota por Q.

$$Q=\left\{\frac{m}{n} \Big/ m \text{ y } n \text{ son números enteros con } n\neq 0\right\}$$

Así, tenemos $\frac{3}{4}$; -33; 0; 5.

Los números racionales pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse y el resultado es un número racional.

Si la fracción es irreducible y en la descomposición factorial del denominador solo se encuentran los factores 2 y 5, entonces la fracción es igual a un número decimal exacto, pero si en el denominador hay algún factor distinto de 2 o 5, la expresión decimal es periódica, por ejemplo:

- $\frac{7}{5}=1{,}4$ es un decimal exacto
- $\frac{15}{7}=2{,}142857142857...$ es un decimal periódico

Si el número está dado en decimales, podemos hallar la fracción que generó ese decimal siguiendo las siguientes reglas:

I. $0{,}a=\frac{a}{10}$; $0{,}ab=\frac{ab}{100}$; $0{,}abc=\frac{abc}{1000}$

Ejemplo

$$0{,}7=\frac{7}{10};\ 0{,}39=\frac{39}{100};\ 0{,}125=\frac{125}{1000}$$

II. $0{,}\overset{\frown}{a}=\frac{a}{9}$; $0{,}\overset{\frown}{ab}=\frac{ab}{99}$; $0{,}\overset{\frown}{abc}=\frac{abc}{999}$ periódico puro

Ejemplo

$$0{,}\overset{\frown}{5}=\frac{5}{9};\ 0{,}\overset{\frown}{17}=\frac{17}{99};\ 0{,}\overset{\frown}{123}=\frac{123}{999}$$

III. $0{,}m\overset{\frown}{a}=\frac{\overline{ma}-m}{90}$; $0{,}m\overset{\frown}{ab}=\frac{\overline{mab}-m}{990}$

Ejemplo

$$0{,}6\overset{\frown}{7}=\frac{67-6}{90}=\frac{61}{90};\ 0{,}6\overset{\frown}{31}=\frac{631-6}{990}=\frac{625}{990}$$

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Ley de clausura

La suma de todo par de números racionales es otro número racional.

Asociativa

$(a+b)+c=a+(b+c)$

Conmutativa

$a+b=b+a$

Elemento neutro

El cero es un número racional que hace de elemento neutro en la suma, $a+0=a=0+a$.

Elemento opuesto o inverso aditivo

El opuesto de un número racional a es otro número racional designado por $(-a)$, de tal manera que $a+(-a)=0=(-a)+a$.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Ley de clausura

El producto de todo par de números racionales es otro número racional.

Asociativa

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Conmutativa

$a \cdot b = b \cdot a$

Elemento neutro

El 1 es un número racional que hace de elemento neutro del producto, $a \cdot 1 = a$.

Elemento inverso

El inverso de un número racional $a \neq 0$ es otro número racional denotado por a^{-1}, tal que multiplicado por a da como resultado 1. Es decir, $a \cdot a^{-1} = a^{-1}a = 1$.

DISTRIBUTIVIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN RESPECTO A LA ADICIÓN

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ejemplo

$$\frac{2}{3} \cdot \left(5 + \frac{4}{7}\right) = \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7}$$

EL COCIENTE DE LOS NÚMEROS RACIONALES

El cociente de dos números fraccionarios es igual al producto entre el dividendo y el inverso del divisor.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Ejemplo

$$\frac{-2}{5} \div \frac{4}{3} = \frac{-2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{-6}{20} = \frac{-3}{10}$$

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Un número irracional es todo aquel número que no es posible escribirlo como la división de números enteros. Se dice que es el complemento de los números racionales con respecto a los reales y se representa mediante Q'.

$$Q' = \left\{ x \middle/ x \neq \frac{m}{n} \text{ con } m \text{ y } n \text{ enteros}, n \neq 0 \right\}$$

Los números irracionales son de dos tipos:

NÚMEROS IRRACIONALES ALGEBRAICOS

Estos números son raíces de algún polinomio de coeficientes racionales. Así tenemos

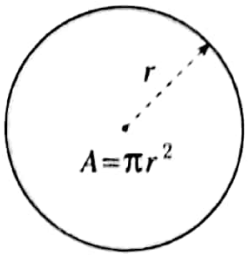
$$\sqrt{7};\ \frac{\sqrt[3]{2}+3}{5}.$$

Aquellos números tienen por representación decimal infinitas cifras no periódicas

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016...$$

Como vemos, tiene infinitos decimales.

NÚMEROS IRRACIONALES TRASCENDENTES



Un número irracional trascendente es aquel que no es raíz de algún polinomio de coeficientes racionales, entre ellos tenemos: π; e; etc. Se pueden expresar también como decimales no periódicos de infinitos dígitos.

Así $e = 2{,}718281828459045235...$, conocido como la base de los logaritmos neperianos;

y $\pi = 3{,}14159265358979323846...$, utilizado en el cálculo geométrico.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Podemos sumar y restar números irracionales solamente cuando el radical que tengamos sea el mismo en los términos que me dispongo a sumar y restar. Lo explicaremos mejor mediante ejemplos.

Ejemplos

- $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}$. Este caso me pide realizar una operación combinada de suma y resta.

  En $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}$ podremos sumar y restar ya que todos los términos tienen $\sqrt{2}$; solo se sumarán algebraicamente los (coeficientes) 3; 5; -1, resultando $(3+5-1)\sqrt{2}=7\sqrt{2}$.

- $3\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\sqrt{5}$. Acá también se me pide realizar una operación combinada de suma y resta.

  En $3\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\sqrt{5}$ no será posible realizar la operación porque los tres radicales son diferentes.

MULTIPLICACIÓN DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Existe una propiedad de los números irracionales y, en general, de los radicales que nos dice: $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, con ciertas restricciones y casos muy puntuales; principalmente nos referimos cuando a o b son negativos y n es par.

Ejemplos

- $\sqrt[3]{5\cdot 4}=\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{4}$
- $\sqrt{12}\sqrt{3}=\sqrt{12\cdot 3}=\sqrt{36}=6.$

  A pesar de que ni 12 ni 3 tienen raíz cuadrada exacta, sin embargo, el producto de estos radicales resultó un valor exacto.

- $\sqrt{12}=\sqrt{(-4)(-3)}=\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-3}.$

  En este ejemplo no es válido aplicar esta propiedad, pues se llega a una contradicción.

DIVISIÓN DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

La propiedad nos dice que $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; entonces, si tenemos radicales de grado n que se estén dividiendo, dará lo mismo si los resolvemos por separado y después los dividimos, que si primero los dividimos y luego extraemos la raíz.

Ejemplos

- $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}$ Primero hemos extraído las dos raíces cúbicas para luego dividir los resultados.

- $\frac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{32}}=\sqrt[4]{\frac{162}{32}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}}=\frac{3}{2}$

POTENCIACIÓN DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}$$

donde n es un número natural.

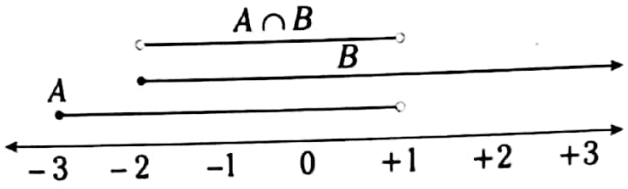
Ejemplos

1. $\left(\sqrt[3]{7}\right)^6=7^{\frac{6}{3}}=7^2=49.$ Como vemos, el grado del radical (en este caso 3) pasó a dividir al exponente (en este caso 6). El resultado de esta división (para nosotros $6\div 3=2$) será el nuevo exponente para la cantidad subradical (en este caso 7). Finalmente, hemos realizado la potenciación.

2. $\left(\sqrt{4}\right)^6=4^{\frac{6}{2}}=4^3=64.$ En este caso hemos realizado lo mismo que en el anterior, haciendo la aclaración de que cuando un radical no tiene grado, este se sobreentiende que es 2.

▸ CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Incluyen todos los números anteriormente descritos; sin embargo, los números reales en esta ocasión los estudiaremos con más detalle.



$(A \cap B) =]-2; +1[$

Para llegar a definirlo de manera más formal, haremos algunas precisiones preliminares.

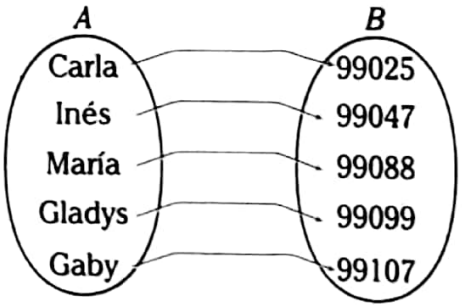
CORRESPONDENCIA BIUNÍVOCA

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, diremos que existe una correspondencia biunívoca entre estos si a cada elemento del primer conjunto le corresponde un solo elemento del segundo y a cada elemento del segundo conjunto le corresponde un solo elemento del primero.

Ejemplo

Consideremos el conjunto A de las alumnas becadas y el conjunto B de los códigos correspondientes a cada alumna del conjunto A.

Graficando la correspondencia entre estos conjuntos.

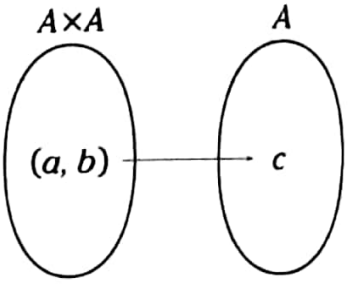


Al analizar el gráfico, vemos que a cada alumna le corresponde un código y cada código pertenece a una alumna; es decir, se ha realizado una correspondencia biunívoca.

OPERACIÓN BINARIA O LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA

Definida en un conjunto no vacío A, consiste en una correspondencia biunívoca que asigna a cada par de elementos de A un único elemento de A. Esto significa que a cada elemento de $A \times A$ le corresponde un único elemento de A.

La operación binaria o ley de composición interna definida en un conjunto A no vacío es toda correspondencia biunívoca de $A \times A$ en A.



La correspondencia biunívoca la denotaremos por $*$; entonces $*$ es una operación binaria en $A \leftrightarrow *$: $A \times A \rightarrow A$, es decir $a \in A \wedge b \in A \rightarrow a * b \in A$.

Ejemplos

1. La adición usual en $\mathbb{Z}$ es una operación binaria ya que la suma de todo par de números enteros es otro entero.

   $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

   $(3; 5) \rightarrow 3 + 5 = 8$

2. La sustracción en $\mathbb{N}$ no es una operación binaria puesto que la diferencia de dos números naturales no siempre es un número natural.

   $4; 7 \in \mathbb{N}$; sin embargo $4 - 7 = -3 \notin \mathbb{N}$

3. La multiplicación en $\mathbb{Q}'$ no es una operación binaria puesto que el producto de dos números irracionales no necesariamente es irracional.

   $\sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}-1 \in \mathbb{Q}'$, pero $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = 2 \notin \mathbb{Q}'$

4. Si $S=\{a; b; c; d\}$, podemos definir una operación en S haciendo uso de la siguiente tabla de doble entrada.

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	b	b	c

fila superior

diagonal principal

columna principal

Se leerá

$a*a=a \quad (a; a) \rightarrow a$

$a*b=b \quad (a; b) \rightarrow b$

$a*c=c \quad (a; c) \rightarrow c$

$\vdots \qquad \vdots$

$d*d=c \quad (d; d) \rightarrow c$

Se concluye que * define una operación binaria en A porque cada uno de los resultados está en A.

PROPIEDADES DE LA OPERACIÓN BINARIA

Ley de clausura o cerradura

Sea A un conjunto no vacío, $a; b \in A$ y una operación *. Si $a*b \in A$, $\forall a; b \in A$, entonces se dirá que la operación * es cerrada en A.

Ejemplo

Consideremos el conjunto $A=\{1; 2; 3; 4\}$ y la operación * entre los números $a; b$ de A, como el máximo común divisor de dichos números.

Simbólicamente $a*b=\text{MCD}\ \{a; b\}$.

Resolución

Veamos en la siguiente tabla de doble entrada:

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	1
4	1	2	1	4

* es una operación cerrada en A.

Ley asociativa

La operación binaria * es asociativa en A si y solo si $(a*b)*c=a*(b*c)$, $\forall a; b; c \in A$.

Ejemplos

1. $a*b=a+b$, donde $a; b \in \mathbb{N}$, es asociativa.

   Resolución

   Veamos

   Sean $x; y; z \in \mathbb{N}$

   I. $(x*y)*z=(x+y)*z=x+y+z$

   II. $x*(y*z)=x*(y+z)=x+y+z$

   De I y II, vemos que * es asociativa.

2. $a*b=a+b+ab, \quad \forall a; b \in \mathbb{N}$

   Resolución

   Veamos

   Sean $x; y; z \in \mathbb{N}$

   I. $(x*y)*z=(x+y+xy)*z$

   $=x+y+xy+z+(x+y+xy)z$

   $=x+y+z+xy+xz+yz+xyz$

   II. $x*(y*z)=x*(y+z+yz)$

   $=x+y+z+yz+x(y+z+yz)$

   $=x+y+z+yz+xy+xz+xyz$

   De I y II, vemos que * es asociativa.

Ley conmutativa en A

La operación binaria * es conmutativa en un conjunto A no vacío si y solo si $a*b=b*a$, $\forall\, a; b \in A$.

Ejemplos

1. $a*b=a+b$, $\forall\, a; b \in \mathbb{Z}$

   Veamos

   $$a*b=a+b=b+a=b*a,$$

   entonces * es conmutativa en $\mathbb{Z}$.

2. $a*b=a\cdot b$ en $\mathbb{Q}$.

   Veamos

   $$a*b=a\cdot b=b\cdot a=b*a,$$

   entonces * es conmutativa en $\mathbb{Q}$.

3. Definimos * mediante la tabla de doble entrada, $A=\{a; b; c\}$

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

M

Es conmutativa si la matriz M es simétrica. Luego diremos que * es conmutativa en A.

Elemento neutro o identidad

Dado un conjunto no vacío A y una operación binaria *, $e \in A$ se llamará elemento identidad o neutro de A bajo la operación * si y solo si $e*a=a*e=a$, $\forall\, a \in A$.

Ejemplos

1. En $(\mathbb{Z}, +)$ el número 0 es el elemento identidad ya que $a+0=a$, $\forall\, a \in \mathbb{Z}$.
2. En $(\mathbb{N}, \cdot)$ el número 1 es el elemento identidad puesto que $a\cdot 1=1\cdot a=A$, $\forall\, a \in \mathbb{N}$.
3. En $A=\{a; b; c\}$ y la operación * definida mediante la tabla:

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Se observa: $a*a=a$

$a*b=b=b*a$

$a*c=c=c*a$

de donde se concluye que a es el elemento neutro del conjunto A con la operación *.

Elemento inverso o recíproco

Dado un conjunto no vacío A y una operación binaria *, se dirá que un elemento denotado como $a' \in A$ es el inverso de $a \in A$ si y solo si $a*a'=a'*a=e$, siendo e el elemento identidad de A bajo *.

Ejemplos

1. En $(\mathbb{Q}, +)$ el inverso de 3 es -3 ya que $3+(-3)=0$.
2. En $(\mathbb{R}, \cdot)$ el inverso de 7 es $\frac{1}{7}$ puesto que $7\cdot\frac{1}{7}=1$.
3. En la operación * definida mediante la tabla

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

vimos que su neutro era a y como

$$a*a=a \rightarrow a'=a$$

$$b*c=a=c*b \rightarrow b'=c$$

el inverso de a es a y el inverso de b es c.

Distributividad de una operación binaria respecto a otra

Consideremos el caso de dos operaciones binarias * y ▾ definidas en un mismo conjunto A. Nos interesa caracterizar el comportamiento relativo de dichas operaciones binarias en el sentido de obtener $(a*b)▾c$ o también $(a▾b)*c$.

a. Se dice que ▾ es distributiva a derecha respecto a * si y solo si

$(a*b)▾c=(a▾c)*(b▾c)$, $\forall a; b; c \in A$.

b. Se dice que ▾ es distributiva a izquierda respecto a * si y solo si

$c▾(a*b)=(c▾a)*(c▾b)$, $\forall a; b; c \in A$.

c. Se dice que ▾ es distributiva respecto a * si y solo si lo es a izquierda y a derecha.

Ejemplos

1. La adición y la multiplicación en $\mathbb{N}$ son operaciones binarias y la segunda es distributiva con respecto a la primera.

   Veamos, sean $a; b; c \in \mathbb{N}$

   $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

   $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$

2. La potenciación en $\mathbb{N}$ es distributiva a derecha respecto a la multiplicación ya que $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$.

   Sin embargo, no lo es a la izquierda, puesto que $n^{a\cdot b}\neq n^a\cdot n^b$.

3. La división es distributiva a derecha con respecto a la adición ya que $(a+b)\div c=a\div c+b\div c$, y no sería correcto decir que la adición es distributiva a derecha respecto a la división ya que $c\div(a+b)\neq c\div a+c\div b$.

▸ ESTRUCTURA DE CUERPO

La terna $(S, +, \bullet)$ es un cuerpo si y solo si cumple los siguientes axiomas:

C_1: Axioma de cerradura, si

$a; b \in S \rightarrow (a+b)\in S$ y $a\cdot b\in S$.

C_2: Las operaciones + y • son conmutativas, es decir,

$a+b=b+a$ y $a\cdot b=b\cdot a$, $\forall a; b \in S$

C_3: Las operaciones + y • son asociativas, es decir,

$a+(b+c)=(a+b)+c$ y $a(bc)=(ab)c$, $\forall a; b; c \in S$

C_4: El elemento idéntico bajo la operación + es 0, es decir, $\forall a \in S \rightarrow a+0=a=0+a$

C_5: El elemento idéntico bajo la operación • es 1, es decir, $\forall a \in S \rightarrow a\cdot 1=1\cdot a=a$

C_6: Para cada $a \in S$ existe un elemento inverso bajo la operación +, denotado por $(-a) \in S$ tal que $a+(-a)=0=(-a)+a$.

C_7: Para cada $a \in S$, excepto el cero, existe un elemento inverso bajo la operación •, denotado por $a^{-1} \in S$ tal que $a\bullet a^{-1}=1=a^{-1}\bullet a$.

C_8: La operación • es distributiva respecto a la operación +:

I. $a(b+c)=ab+ac$

II. $(b+c)a=ba+ca=ab+ac$

Ejemplos

1. Las ternas $(\mathbb{Q}, +, \bullet)$ y $(\mathbb{R}, +, \bullet)$ son cuerpos.
2. La terna $(\mathbb{Z}, +, \bullet)$ no es un cuerpo, pues los únicos elementos no nulos que admiten inverso multiplicativo son -1 y 1.
3. El anillo $\mathbb{R}$ de todos los números reales es un campo porque cumple con las ocho propiedades de campo.

4. La terna $(\mathbb{C}, +, \bullet)$ es un campo porque verifica las ocho propiedades de campo; $\mathbb{C}$ es el conjunto de los números complejos $0=(0; 0)$ y el número complejo $e=1=(1; 0)$.

▸ CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES COMO UN CUERPO ORDENADO Y COMPLETO

Se estudiará como un cuerpo que satisface ciertos postulados.

En la estructura de cuerpo tenemos el conjunto $\mathbb{R}$, que denota a sus elementos por a; b; c; d; ... en el cual existe una relación de equivalencia expresada por $(=)$ y además dos operaciones: $(+)$, $(\cdot)$ adición y multiplicación, respectivamente, que están unívocamente definidas con respecto a la relación de equivalencia. En este caso necesitamos de la terna $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ con los siguientes axiomas de cuerpo.

AXIOMAS DE ADICIÓN

A_1: **Ley de clausura**: $\forall\ a; b \in \mathbb{R}$, $(a+b) \in \mathbb{R}$, la suma también es real.

A_2: **Ley de conmutatividad**: $\forall\ a; b \in \mathbb{R}$, la suma de cualquier par de números reales no depende del orden en que le sumen $a+b=b+a$.

A_3: **Ley asociativa**: $\forall\ a; b; c$ en $\mathbb{R}$,

$(a+b)+c=a+(b+c)$, la suma de tres o más números reales es independiente del modo en que son agrupados (asociados).

A_4: **Existencia y unicidad del elemento neutro aditivo**: existe un elemento en $\mathbb{R}$, y solo uno, denotado por 0, tal que $\forall\ a \in \mathbb{R}$: $a+0=0+a=a$.

A_5: **Existencia y unicidad del elemento inverso aditivo**: para cada número real a existe un elemento en $\mathbb{R}$, y solo uno, denotado por $(-a)$, tal que $a+(-a)=(-a)+a=0$.

AXIOMAS DE MULTIPLICACIÓN

M_1: **Ley de clausura:** $\forall\ a; b \in \mathbb{R}$: $ab \in \mathbb{R}$, la multiplicación ab también es un número real.

M_2: **Ley conmutativa**: $\forall\ a \cdot b \in \mathbb{R}$: $ab=ba$, la multiplicación de dos números reales no depende del orden en que son multiplicados.

M_3: **Ley asociativa**: $\forall\ a; b; c \in \mathbb{R}$: $a \cdot (bc)=(ab) \cdot c$,

la multiplicación de tres o más números reales produce el mismo resultado, sean agrupados de cualquier manera.

M_4: **Existencia y unicidad del elemento neutro multiplicativo**: existe un elemento en $\mathbb{R}$, y solo uno, denotado por 1 (distinto de cero), tal que $\forall\ a \in \mathbb{R}$: $a \cdot 1=1 \cdot a=a$.

M_5: **Existencia y unicidad del inverso multiplicativo**: para cada $a \neq 0$ en $\mathbb{R}$ existe un elemento, y solo uno, denotado por a^{-1}, tal que $a \cdot a^{-1}=a^{-1} \cdot a=1$.

AXIOMAS DE DISTRIBUTIVIDAD

Para todo a; b; c en $\mathbb{R}$:

$$a \cdot (b+c)=ab+ac$$

$$(a+b) \cdot c=ac+bc$$

Por lo tanto, la terna $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ también es un cuerpo.

Ahora, para que la terna $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sea un cuerpo ordenado completo tiene que satisfacer los siguientes postulados:

1. Existe un subconjunto propio M de $\mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:
   a. $0 \notin M$
   b. Si $x \in \mathbb{R}$, entonces se cumple una y solo una de las siguientes proposiciones:

$$x=0, \quad x \in M \quad \text{o} \quad -x \in M$$

2. El subconjunto M está cerrado bajo las operaciones + y · de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ o sea, si

$x; y \in M \rightarrow x+y \in M$ y $x \cdot y \in M$.

3. Si T es un subconjunto no nulo de $\mathbb{R}$, y además tiene una cota superior en $\mathbb{R}$, entonces T tiene una mínima cota superior en $\mathbb{R}$.

Los elementos del conjunto M descritos en los postulados 1 y 2 se llaman elementos positivos de $\mathbb{R}$ o simplemente números positivos.

Los elementos del conjunto M', donde $M'=\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \notin M \wedge x \neq 0\}$, se llaman números negativos.

Ahora, si $\forall\ x; y \in \mathbb{R}$, tal que $y+(-x)=(y-x) \in M$, decimos que x es menor que $y(x<y)$, que nos indica la existencia de la relación de orden; por lo tanto, la terna $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un campo ordenado.

Al postulado 3 se le llama postulado de completitud o postulado de continuidad. Uno de los efectos de este postulado será asegurar que se pueda establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos de $\mathbb{R}$ y los puntos de una línea recta. Esto ocurre cuando se dice que no existen huecos en $\mathbb{R}$.

Como conclusión diremos que si un cuerpo numérico cumple estos tres postulados, será un cuerpo ordenado y completo.

▸ DEFINICIONES COMPLEMENTARIAS

DEFINICIÓN DE LA SUSTRACCIÓN

$\forall x; y \in \mathbb{R}, x-y=x+(-y)$

DEFINICIÓN DE LA DIVISIÓN

$\forall x; y \in \mathbb{R} \wedge y \neq 0: \dfrac{x}{y}=x \cdot y^{-1}$

LEY DE CANCELACIÓN

Sean $a; b; c$ elementos de un cuerpo de $\mathbb{R}$.

Demuestre

1. Si $a+c=b+c \rightarrow a=b$
2. Si $a \cdot c=b \cdot c \wedge c \neq 0 \rightarrow a=b$

Resolución

1. $a+c=b+c$

$a+c+(-c)=b+c+(-c)$ ... sumando $(-c)$

$a+(c+(-c))=b+(c+(-c))$ ... propiedad asociativa

$a+0=b+0$ ... elemento neutro

$\therefore\ a=b$

2. Esta demostración queda para el lector.

Teorema

$\forall x \in \mathbb{R}: x \cdot 0=0$

Demostración

$0+0=0$	neutro aditivo
$x(0+0)=x \cdot 0$	multiplicando por x
$x \cdot 0+x \cdot 0=x \cdot 0$	propiedad distributiva
$x \cdot 0+x \cdot 0=x \cdot 0+0$	neutro aditivo
$\therefore\ x \cdot 0=0$	ley de cancelación

Relación de orden: sea A el conjunto de los números reales. Un subconjunto $R \subset A \times A$ es una relación de orden en A si y solo si $\mathbb{R}$ satisface las siguientes propiedades:

I. Si $a; b \in A \wedge a \neq b \rightarrow aRb \vee bRa$

II. Si $aRb \rightarrow a \neq b$

III. Si $a; b; c \in A$, $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$

Si A es $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es $<$ (menor que) se tendrá:

I. Ley de tricotomía: dados $a; b \in \mathbb{R}$, entonces se cumple una y solamente una de las relaciones:

$$a < b \ \vee \ a = b \ \vee \ b < a$$

De (I) si $a < b \rightarrow a \neq b$

II. Ley de transitividad: para todo $a; b; c \in \mathbb{R}$, se cumple que si

$$a < b \ \wedge \ b < c \ \rightarrow \ a < c$$

▸ CONJUNTOS ACOTADOS

MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UN CONJUNTO

Si A es un conjunto de números reales de un número finito de elementos, entonces A tiene un elemento máximo y uno mínimo. Pero también este conjunto puede tener infinitos números reales, en este caso A puede ser que tenga un elemento máximo y uno mínimo, o tal vez no existen dichos elementos.

Ejemplos

1. $A=\{-3; 2; 5; 10\}$; en este conjunto el elemento máximo es 10 y el mínimo es -3.

2. $B=\left\{x \in \mathbb{R} \middle/ x^2 \geq \frac{1}{2}\right\}$; este conjunto no tiene ni máximo ni mínimo elemento. ¿Por qué?

   Como:

   $$x^2 \geq \frac{1}{2} \ \leftrightarrow \ x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \ \vee \ x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

   de donde

   $$B=\left\langle -\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right\rangle$$

   Por lo tanto, no hay máximo ni mínimo en B.

3. $C=\{x \in \mathbb{R} / x \in [-2, 15\rangle\}$; solo tiene mínimo elemento, que es -2.

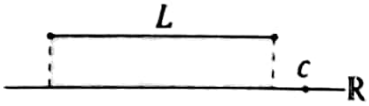
4. $D=\{x \in \mathbb{Z} / x^2 < 16\}$; sí tiene máximo y mínimo elemento, ya que

   $$x \in \langle -4; 4\rangle \ \wedge \ x \in \mathbb{Z} \ \rightarrow \ D=\{-3; -2; ...; 0; ...; 3\}$$

COTA SUPERIOR DE UN CONJUNTO

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $L \subset \mathbb{R}$. Diremos que el conjunto L está acotado superiormente (o tiene una cota superior) si existe un número $c \in \mathbb{R}$ si y solo si c es mayor o igual que todos los elementos de L.

Así



Se puede ver que L está acotado superiormente en $\mathbb{R}$.

Ejemplos

1. Sea $L=\{x \in \mathbb{Z} / x^2 \leq 16\}$ o L está acotado superiormente en $\mathbb{Z}$.

   Resolución

   $L=\{-4; -3; ...; 0; ...; 4\}$

   $5 \in \mathbb{Z}$ es una cota superior de L, pues $\forall x \in L$; $x \leq 5$

   $10 \in \mathbb{Z}$ es cota superior de L, pues $\forall x \in L$; $x \leq 10$

   $4 \in \mathbb{Z}$ es cota superior de L, pues $\forall x \in L$; $x \leq 4$

   pero $3 \in \mathbb{Z}$ no es cota superior de L, pues $\forall x \in L$, no es cierto que $x \leq 3$ porque existe un elemento 4.

   Por lo tanto, concluimos que las cotas superiores de L son todos los números enteros mayores o iguales a 4.

   Asimismo podemos decir que el conjunto L está acotado superiormente en el conjunto $\mathbb{Z}$.

2. El conjunto $S=\{x \in \mathbb{R} / x \in \langle -3; +\infty\rangle\}$ no está acotado superiormente en $\mathbb{R}$ puesto que no existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $\forall x \in S$; $x \leq c$.

COTA INFERIOR DE UN CONJUNTO

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $L \subset \mathbb{R}$. Diremos que el conjunto L está acotado inferiormente (o tiene una cota inferior) si existe un número $d \in \mathbb{R}$ si y solo si d es menor o igual que todos los elementos de L.

CONJUNTOS ACOTADOS

Sean $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $L \subset \mathbb{R}$. El conjunto L está acotado si existe un número $c>0$, tal que para todo $x \in L$; $-c \leq x \leq c$, es decir, el conjunto L es acotado si es acotado superior e inferiormente.

Ejemplo

Sea $L=\{x \in \mathbb{R} / x^2 < 25\}$

Resolución

Si $x^2 < 25 \rightarrow x \in \langle -5; 5\rangle$, luego

$L=\{x \in \mathbb{R} / -5 < x < 5\}$. Como vemos, existen cotas tanto superiores como inferiores. El conjunto de cotas inferiores es $\{d \in \mathbb{R} / d \leq -5\}$ y el conjunto de cotas superiores es $\{c \in \mathbb{R} / c \geq 5\}$ con lo cual queda establecido que el conjunto es acotado.

SUPREMO DE UN CONJUNTO

Sea L un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente. Diremos que un elemento $c \in \mathbb{R}$ es el supremo de L si y solo si c es la menor de las cotas superiores de L.

La notación es $c=\text{Sup}(L)$

ÍNFIMO DE UN CONJUNTO

Sea b un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente. Diremos que un elemento $c \in \mathbb{R}$ es el ínfimo de L si y solo si c es la mayor de todas las cotas inferiores de L.

La notación es $c=\text{Inf}(L)$

Ejemplo

Sea $A=\left\{x \in \mathbb{R} \middle/ x=\frac{(-1)^n}{n} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$

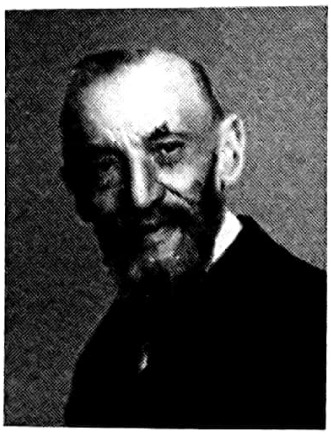
Se tendrá $\left\{-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots\right\}$,

que ordenado es $\left\{-1; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}; \ldots; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right\}$

$\rightarrow \text{Inf}(A)=-1; \text{Sup}(A)=\frac{1}{2}$

BIOGRAFÍA

Giuseppe Peano



Nació en Cuneo el 27 de agosto de 1858 y murió en Turín el 20 de abril de 1932. Matemático y filósofo italiano al cual debemos el sistema actual de notación matemática y el primer ejemplo de fractal con la "curva de Peano".

Hijo de padres granjeros, hizo sus primeros estudios en el colegio del pueblo de Spinetta, a cinco kilómetros de Cuneo. Por consejo de un tío sacerdote es llevado a Turín para estudiar la secundaria en el Liceo Cravour, de donde egresa en 1876. Ese año ingresa a la Universidad de Turín.

Fue discípulo de Enrico D'Ovidio, en geometría analítica y álgebra, y de Angelo Genocchi, quien le enseñó cálculo infinitesimal. Se gradúa como doctor en matemáticas en 1880. Ese mismo año se convierte en ayudante de cátedra de ambos profesores.

En 1884 edita un libro basado en las clases de su maestro Genocchi, *Curso de cálculo infinitesimal*. Dos años después es contratado como profesor en la Academia Militar Real, donde es ascendido a profesor de primera clase en 1889; y en la universidad le es otorgado el grado de profesor principal al año siguiente.

En 1889 publica *Nuevo método de exposición de los principios de la aritmética*, en cuyo contenido se encuentran cinco axiomas aritméticos referentes al fundamental concepto de sucesor y en donde define los números naturales basándose en términos de conjuntos. En 1890 inventa las curvas que llenan el espacio, o sea, mapeos suprayectivos continuos del intervalo [0; 1] sobre el cuadrado unitario. Décadas después, Hausdorff escribió sobre el resultado de Peano: "Este es uno de los más importantes hechos de la teoría de conjuntos".

Fundó la *Rivista di Matematica* en 1891, que estaba dedicada a la difusión de los fundamentos de las matemáticas y de la lógica matemática, en especial por su aplicación para expresar las fórmulas y teoremas matemáticos. Se incluyó un apéndice llamado "Formulario", pero el número de fórmulas fue en aumento y en 1895 tuvo que editarse aparte con el nombre de *Formulario Matemático*.

En 1897 se realizó en Zúrich el primer Congreso Internacional de Matemáticos, en el cual contribuye con una ponencia sobre lógica matemática. El segundo congreso, llevado a cabo en

París en 1900, tuvo una previa Conferencia Internacional de Filosofía donde Peano tomó parte en el comité de dirección. Participó con un artículo sobre las definiciones bien formadas en matemáticas.

En la conferencia conoció a Bertrand Russell, quien admiró su método preciso y cayó en cuenta que la notación proporcionada por Peano era lo que necesitaba. En el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos no participó directamente, aunque sí lo hicieron varios de sus discípulos. Entre las conclusiones del congreso se dictó una resolución aprobaba la formación de un idioma internacional auxiliar para hacer más fácil la difusión de las nuevas ideas matemáticas.

Siguiendo la corriente de pensamiento de Johann Martin Schleyer y de Lazarus Ludwick Zamenhof, quienes habían propuesto nuevos idiomas universales como el volapuk o el esperanto hacia finales del s. XIX, en 1903 hizo su propia propuesta llamada *Latino sine flexione*, basado en el vocabulario latín y sin las inflexiones, en un intento por simplificar la gramática lo más posible y que sea fácil de aprender.

Se puede decir que el primer periodo de Peano abarca hasta 1900, donde alcanza gran habilidad para las materias que serán importantes para el desarrollo de las matemáticas, con un estilo muy avanzado para su época. Después de ese año, dedica sus energías a una edición completa del formulario y a desarrollar su propuesta de idioma universal, también llamado *interlingua*.

Después de 1910, al fallecer su madre, prepara textos para la educación secundaria, que incluye un diccionario de matemáticas y sigue desarrollando idiomas artificiales. Continuó enseñando en la Universidad de Turín hasta un día antes de su fallecimiento, producido por un ataque cardiaco.

Sobre él, H. C. Kennedy escribió: "Estoy fascinado por su agradable personalidad, su capacidad para atraer discípulos que le dedican toda su vida, su tolerancia hacia las debilidades humanas, su perenne optimismo. [...] no debe ser considerado únicamente como un lógico y matemático del s. XIX, sino que por su originalidad e influencia, podría ser considerado uno de los grandes científicos del siglo pasado".

Fuente:

http://es.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano

http://campusvirtual.unex.es/cala/epistemowikia/index.php?title=Giuseppe_Peano

http://www.astroseti.org/articulo/4016/biografia-de-giuseppe-peano

Problemas RESUELTOS

Problema 1

Determine el valor simplificado de N.

$N=0,1+0,2+0,3+...+2,9$

Resolución

Convirtiendo a fracciones

$$N=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+...+\frac{29}{10}$$

$$=\frac{1}{10}(1+2+3+...+29)$$

Recuerde

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\rightarrow\ N=\frac{1}{\cancel{10}}\cdot\frac{29\cdot\cancel{30}}{2}=\frac{87}{2}=43,5$$

$\therefore\ N=43,5$

Problema 2

Simplifique M.

$$M=\sqrt{\frac{\left[\sqrt{144}\cdot 0,\hat{4}-0,\hat{3}\right]}{2,5-0,1}\cdot 3}$$

Resolución

Recordando $0,\hat{a}=\frac{a}{9}$.

Entonces

$$M=\sqrt{\frac{\cancel{12}^{4}\cdot\frac{4}{\cancel{9}_{3}}-\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{9}_{3}}}{\cancel{2,4}}\cdot\cancel{3}}=\sqrt{\frac{\frac{16}{3}-\frac{1}{3}}{0,8}}=\sqrt{\frac{\frac{15}{3}}{\frac{8}{10}}}$$

$$\rightarrow\ M=\sqrt{\frac{\cancel{15}^{5}\cdot\cancel{10}^{5}}{\cancel{3}\cdot\cancel{8}_{4}}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}=2,5$$

Problema 3

Indique lo que se obtiene al sumar el cuadrado de la diferencia de 12 y 4 con el cubo de la suma de 3 y 1.

Resolución

Del enunciado se interpreta:

- El cuadrado de la diferencia de 12 y 4 es $(12-4)^2=8^2=64$
- El cubo de la suma de 3 y 1 es $(3+1)^3=4^3=64$

Se pide la suma

$64+64=128$

Problema 4

En un salón de clase se observa que la cantidad de varones representa los $\frac{3}{7}$ del total. Si hay 24 mujeres, ¿cuántos alumnos tiene el salón?

Resolución

Si los varones representan el $\frac{3}{7}$ del total, entonces las mujeres serán los $\frac{4}{7}$ del total.

Supongamos que el total está representado por x.

Por dato para las mujeres.

$$\frac{4}{7}x=24\ \rightarrow\ x=42$$

Por lo tanto, el salón tiene 42 alumnos.

Problema 5

Si comiera $4n$ caramelos me quedarían m caramelos. ¿Cuánto me quedaría si comiera n caramelos?

Resolución

Sea C la cantidad total de caramelos al inicio. Si comiera $4n$ quedan

$$C-4n=m\ \rightarrow\ C=4n+m$$

¿Cuánto me quedaría si comiera n caramelos?

$$C-n=(4n+m)-n=3n+m$$

Por lo tanto, me quedaría $3n+m$ caramelos.

Problema 6

Con los S/.65 que tenía compré libros por S/.15; además gasté los $\frac{7}{10}$ del resto en una casaca. ¿Cuánto me quedó?

Resolución

Tengo al inicio S/.65, gasté S/.15 en libros, quedándome S/.(65−15)=S/.50.

Gasté en la casaca los $\frac{7}{10}$ de 50, luego me quedó los $\frac{3}{10}$ de 50; es decir, $\frac{3}{10}\cdot 50=15$.

Por lo tanto, al final me quedó S/.15.

Problema 7

El doble de la suma de los términos de una sustracción es 120. Si el sustraendo es la tercera parte del minuendo, calcule la diferencia.

Resolución

Emplearemos los elementos minuendo (m), sustraendo (s) y diferencia (d), que se relacionan mediante

$$m-s=d \rightarrow m=s+d \qquad (\alpha)$$

Por dato

$$2(m+s+d)=120 \rightarrow m+s+d=60 \qquad (\beta)$$

Además, el sustraendo es la tercera parte del minuendo

$$s=\frac{m}{3} \rightarrow m=3s$$

En (α)

$$m=s+d \rightarrow 3s=s+d$$

$$2s=d \rightarrow s=\frac{d}{2}$$

En (β)

$$m+s+d=60$$

$$3\left(\frac{d}{2}\right)+\frac{d}{2}+d=60$$

$$\rightarrow 3d=60$$

$$\therefore d=20$$

Problema 8

¿Cuál de las siguientes expresiones representa al menor número, si n es entero mayor que 1?

A) $\frac{2}{n-1}$ B) $\frac{1}{n}$ C) $\frac{1}{n+1}$

D) $\frac{2}{n}$ E) $\left(\frac{1}{n}\right)^2$

Resolución

Del dato: $n>1$.

Analizando cada caso, además n es entero

$\rightarrow n=2; 3; 4; \ldots$

- Para $n=2$

  A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 1 E) $\frac{1}{4}$

- Para $n=3$

  A) 1 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{9}$

De donde se observa que $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ es siempre el menor.

Problema 9

Dados los siguientes conjuntos:

a. $\mathbb{N}=\{1; 2; \ldots\}$
b. $\mathbb{N}_0=\{0; 1; 2; 3; \ldots\}$
c. $\mathbb{Z}=\{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$
d. $\mathbb{Z}^*=\{\ldots; -3; -2; -1; 1; 2; 3; \ldots\}$
e. $\mathbb{Z}_0^+=\{0; 1; 2; \ldots\}$
f. $\mathbb{Z}_0^-=\{\ldots; -3; -2; -1; 0\}$

Indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificándolas:

I. $\mathbb{Z}^+=\mathbb{N}$
II. $\mathbb{Z}^* \cup \{0\}=\mathbb{Z}$
III. $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}^+=\mathbb{Z}^*$
IV. $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-=\mathbb{Z}$
V. $\mathbb{Z}^+=\mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}$

A) VVVVF B) VVFFV C) VVVFF
D) VVFFF E) VFFFF

Resolución

Observando los conjuntos definidos y analizando las proposiciones:

I. **Verdadera**
Efectivamente $\mathbb{Z}^+=\mathbb{N}$, ya que ambos conjuntos representan a los enteros positivos, es decir $\mathbb{Z}^+=\mathbb{N}=\{1; 2; 3; ...\}$.

II. **Verdadera**
Correcto, $\mathbb{Z}^* \cup \{0\}=\mathbb{Z}$, ya que $\mathbb{Z}^*$ representa a los enteros sin el número cero; en tal sentido, es cierto que $\mathbb{Z}^* \cup \{0\}=\mathbb{Z}$.

III. **Falsa**
Falso que $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}^+=\mathbb{Z}^*$, ya que al quitar a los enteros todos los enteros positivos, estarían quedando los enteros negativos, incluido el cero. Es decir, $\mathbb{Z}-\mathbb{Z}^+=\mathbb{Z}_0^-$.

IV. **Falsa**
Falso que $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-=\mathbb{Z}$, ya que la unión de los enteros positivos y los enteros negativos equivale al conjunto

$$\mathbb{Z}^*=\{...; -3; -2; -1; 1; 2; 3; ...\}$$

Como vemos, son los enteros sin el cero.

V. **Falsa**
Es falso que $\mathbb{Z}^+=\mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}$, ya que los $\mathbb{Z}^+$ no consideran al cero, solo a los enteros positivos.

Problema 10

Siendo el conjunto de los números racionales

$Q=\{x/x=p/q; p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{Z}; q \neq 0\}$,

escriba los siguientes números racionales en la forma p/q.

I. 5	V. 0,35
II. −3	VI. 7,43
III. 0	VII. 0,444...
IV. 1,5	VIII. 0,23777...

Resolución

Como veremos, cada uno tiene infinitas formas de representarlo:

I. $5=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{15}{3}=...$

II. $-3=-\frac{9}{3}=-\frac{15}{5}=...$

III. $0=\frac{0}{3}=\frac{0}{12}=...$

Siempre el numerador será cero.

IV. $1{,}5=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}=...$

V. $0{,}35=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}=...$

VI. $7{,}43=\frac{743}{100}=\frac{1486}{200}=...$

VII. 0,4444... Número periódico puro que se representa como $0{,}\overline{4}$, cuyo equivalente es $\frac{4}{9}; \frac{8}{18_n}; ...$

VIII. 0,23777... Número periódico que se representa como $0{,}23\overline{7}$, cuyo equivalente es

$$\frac{237-23}{900}=\frac{214}{900}.$$

Problema 11

Siendo $a \in \mathbb{Z}^*$; $b \in \mathbb{Z}^*$, diga cuáles de los siguientes números son enteros y justifique.

I. $a+b$	IV. $a \cdot b$	VII. a^2
II. $a-b$	V. $\frac{a}{b}$	VIII. b^3
III. $b-a$	VI. $\frac{b}{a}$	

Resolución

Recuerde $\mathbb{Z}^* = \{...; -3; -2; -1; 1; 2; 3; ...\}$. En ese sentido, $a+b$; $a-b$; $b-a$; $a \cdot b$; a^2; a^3 serán enteros; en cambio, $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ no se garantizan.

Problema 12

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. Si $a \wedge b \in \mathbb{Q}$ entonces $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

II. $\forall a \in \mathbb{Q}', \exists b \in \mathbb{Q}' / (a+b) \in \mathbb{Q}$

III. Si $a^2 \in \mathbb{Q}$ entonces $a \in \mathbb{Q}$

IV. $\forall a \in \mathbb{Q}'$ entonces $a^2 \in \mathbb{Q}$

Resolución

I. **Falsa**

Si $a=1 \in \mathbb{Q}$ y $b=0 \in \mathbb{Q} \rightarrow \frac{a}{b}=\frac{1}{0}$ no está definido.

II. **Verdadera**

$\forall a \in \mathbb{Q}', \exists b=-a\ \mathbb{Q}' / a+(-a)=0 \in \mathbb{Q}$

III. **Falsa**

Si $a^2=2 \in \mathbb{Q} \rightarrow a=\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

IV. **Falsa**

Sea $a=\sqrt[4]{2} \in \mathbb{Q}' \rightarrow a^2=\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Problema 13

Demuestre que $5^{\frac{1}{2}}$ no es un número racional.

Resolución

Para la demostración usaremos un método conocido como el método de la contradicción, que consiste en lo siguiente:

I. Asumamos que $\sqrt{5}$ es igual a un racional de la forma $\frac{m}{n}$, donde m y n son primos entre sí (PESI). Es decir, $\sqrt{5}=\frac{m}{n}$.

II. De manera equivalente: $n\sqrt{5}=m$, elevando al cuadrado se tiene: $n^2 \cdot 5=m^2$, donde m es múltiplo de 5, es decir, $m=5k$.

III. De (II), $n^2 \cdot 5=(5k)^2$. Efectuando $n^2 \cdot 5=25k^2$, que simplificando 5 se tiene $n^2=5k^2$, donde puede apreciarse que n es también múltiplo de 5, lo cual es una contradicción al hecho de ser m y n primos entre sí.

Por lo tanto, se concluye que $\sqrt{5}$ no puede ser racional.

Problema 14

Escriba usando los signos de desigualdad.

I. a es un número positivo.

II. a no es un número positivo.

III. a es mayor que b.

IV. b es menor que c.

V. a está comprendido entre b y c, siendo b menor que c.

Resolución

Utilizando símbolos, los enunciados quedan interpretados así:

I. Si a es positivo, se dice también

$$a>0 \vee a \in \mathbb{R}^+.$$

II. Si a no es positivo: $a \leq 0$; $a \neq \mathbb{R}^+$

III. Si a es mayor que b: $a>b \vee a-b>0$

IV. Si b es menor que c: $b<c \vee b-c<0$

V. Si a está comprendido entre b y c, siendo b menor que c: $b<a<c$.

Problema 15

Escriba usando los signos de desigualdad.

I. a es un número no negativo.

II. b no es un número no positivo.

III. c no es menor que a.

Resolución

Escribiendo simbólicamente:

I. a es un número no negativo: $a \geq 0 \vee a \in \mathbb{R}_0^+$.

II. b no es un número no positivo:

$$b < 0 \vee b \notin \mathbb{R}_0^-.$$

III. c no es menor que a: $c \geq a$.

Problema 16

Complete los espacios en las siguientes implicancias.

I. $x-5>0$ implica que $x>...$

II. $x<-3$ implica que $x+3<...$

III. $-5 \cdot x>-10$ implica que $x<...$

IV. $2 \cdot x-3>5$ implica que $x>...$

V. $x>7$ implica que $x-2>...$

VI. $3 \cdot x<9$ implica que $x<...$

VII. $-3 \cdot x<12$ implica que $x>...$

Resolución

Usando las equivalencias de las desigualdades se tiene para cada proposición:

I. $x-5>0$ implica que $x>5$; transponiendo -5 al otro miembro con $+5$.

II. $x<-3$ implica que $x+3<0$; transponiendo -3 al otro miembro con $+3$.

III. $-5 \cdot x>-10$ implica que $x<2$; se dividió cada miembro por -5. Recuerde que cambia el sentido de la desigualdad porque el -5 es negativo.

IV. $2 \cdot x-3>5$ implica que $x>4$; se sumó 3 a cada miembro y se dividió entre 2.

V. $x>7$ implica que $x-2>5$; restando 2 a cada miembro.

VI. $3 \cdot x<9$ implica que $x<3$; se ha dividido por 3 cada miembro.

VII. $-3 \cdot x<12$ implica que $x>-4$; se divide cada miembro por -3. Recuerde que el sentido cambia.

Problema 17

Escriba como intervalo y como conjunto los siguientes subconjuntos de la recta real:

I. El intervalo cerrado de extremos 3 y 7.

II. El intervalo abierto de extremos -5 y 0.

III. El intervalo cerrado a izquierda y abierto a derecha de extremos 5 y 6.

IV. El conjunto de los números enteros pertenecientes al intervalo del ítem III.

Resolución

I. El intervalo cerrado de extremos 3 y 7 en forma de conjunto se expresa como

$$A=\{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x \leq 7\}$$

II. El intervalo abierto de extremos -5 y 0 es representado por el conjunto

$$A=\{x \in \mathbb{R} / -5<x<0\}$$

III. El intervalo cerrado a izquierda y abierto a derecha de extremos 5 y 6 es representado por el conjunto $A=\{x \in \mathbb{R} / 5 \leq x<6\}$

IV. El conjunto de los números enteros pertenecientes al intervalo del ítem III se representa por $A=\{x \in \mathbb{Z} / 5 \leq x<6\}=\{5\}$

Problema 18

Dado el sistema de inecuaciones:

$2x-y<2$ (I)

$x+y<4$ (II)

Indique cuántas soluciones de componentes enteras positivas tiene.

Resolución

Sumando las desigualdades

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y<2 \\ x+y<4 \end{array}\right\}(+)$$

se obtiene $3x<6$, es decir, $x<2$. Como se pide entero, entonces $x=1$.

Reemplazando en las otras desigualdades:

$$\begin{cases} 2(1)-y<2 \\ (1)+y<4 \end{cases} \text{ luego } \begin{cases} y>0 \\ y<3 \end{cases} \text{ de donde}$$

$y=1 \vee y=2$, por ser enteros positivos, de acuerdo a lo pedido.

Eso implica que las soluciones $(x; y)$ son $(1; 1)$ o $(1; 2)$.

Por lo tanto, tiene dos soluciones.

Problema 19

Respecto al conjunto solución de la ecuación $3x|x+1|=x^2+2$, podemos afirmar que

A) es unitario.
B) tiene dos elementos.
C) es vacío.
D) tiene infinitos elementos.

Resolución

De la igualdad se puede distinguir que x será positivo; en consecuencia, $(x+1)$ es también positivo, quedando la ecuación

$3x(x+1)=x^2+2 \rightarrow 3x^2+3x=x^2+2 \rightarrow 2x^2+3x-2=0.$

Haciendo uso del aspa simple se factoriza como

$(2x-1)(x+2)=0.$

Además, como x es positivo solo $x=\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, el conjunto es unitario.

Problema 20

Calcule el valor numérico de la expresión

$x=|a+b|-2\cdot|a|\cdot|b|+|a-b|,$

sabiendo que $a=2$ y $b=-5$.

Resolución

Reemplazando los valores de a y de b en x:

$$x=|2+-5|-2|2||-5|+|2--5|$$
$$=|-3|-2|2||5|+|7|=3-20+7=-10$$
$$\therefore\ x=-10$$

Problema 21

Sabiendo que $a=10$; $b=-10$, calcule el valor de la expresión

$$x=\frac{|a+b|-|a^2-b^2|}{|a\cdot b|+a\cdot b|a-b|}.$$

Resolución

Reemplazando los valores de a y b en x:

$$x=\frac{|10+(-10)|-|10^2-(-10)^2|}{|10(-10)|+10(-10)|10-(-10)|}$$
$$=\frac{|0|-|10^2-10^2|}{|-100|+10(-10)|10+10|}$$
$$=\frac{0-0}{100-2000}=0$$

Problema 22

Si $x<y<0$, indique el valor de verdad de cada una de las proposiciones.

I. $x^2<xy<0$
II. $x^2>xy>y^2$
III. $x^2<y^2<0$
IV. $x^2>y^2$

Resolución

Del dato, x e y son negativos; además, $x<y$. Analicemos cada proposición:

I. **Falsa**
Multiplicando por $x<0$ a $x<y$ se tiene $x^2>xy>0$. Como vemos, es contrario a lo propuesto.

II. **Verdadera**

De (I) $x^2 > xy$ es verdadero. Faltaría ver si $xy > y^2$. Partiendo de $x < y$, multiplicando por y que es negativo, el sentido de la desigualdad cambiará $xy > y^2$.

III. **Falsa**

La proposición en forma inmediata es falsa, ya que un número real al cuadrado no puede ser negativo.

IV. **Verdadera**

De (II) $x^2 > xy > y^2$. Por transitividad se puede concluir que $x^2 > y^2$.

Problema 23

Halle la suma de los valores enteros de x que satisfacen el siguiente sistema:

$5x-1>0$ (I)

$3x-11>0$ (II)

$2x-15<0$ (III)

Resolución

De (I) $x>\frac{1}{5}$

De (II) $x>\frac{11}{3}$

De (III) $x<\frac{15}{2}$

Intersecando estos resultados se tiene que

$$\frac{11}{3}<x<\frac{15}{2}.$$

Tomando los números enteros de este intervalo: 4; 5; 6; 7, cuya suma es 22.

Problema 24

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La operación · sobre Z es binaria, tal que

$$a\cdot b=\frac{a+1}{b}.$$

II. La operación * sobre Q es binaria, tal que

$$a*b=\frac{ab+1}{a+b}, \text{ con } a+b\neq 0.$$

III. La operación ⊕ sobre R es conmutativa, tal que

$$a\oplus b=\frac{a+b-2}{ab}, \text{ con } ab\neq 0.$$

Resolución

I. **Falsa**

Como para todo $a; b \in Z$; $\left(\frac{a+1}{b}\right)$

no necesariamente es entero, entonces la operación · no es binaria.

II. **Verdadera**

Como para todo $a; b$ racionales se tiene que ab es racional, también $ab+1$ es racional.

$\rightarrow \frac{ab+1}{a+b}$, con $a+b\neq 0$ es también racional.

Por lo tanto, * es una operación binaria sobre Q.

III. **Verdadera**

Si ⊕ es conmutativa, se debe verificar que $a\oplus b=b\oplus a$ para todo $a; b$ reales.

a. $a\oplus b=\frac{a+b-2}{ab}$

b. $b\oplus a=\frac{b+a-2}{ba}=\frac{a+b-2}{ab}$

De a. y b., la operación ⊕ es conmutativa.

Problema 25

La operación * está definida en $Q-\{-1\}$ según

$a*b=a+ab+b, \ \forall\ a; b \in Q$

Demuestre que 0 es su elemento neutro.

Resolución

Sea $b=e$, donde e es el elemento neutro

$\rightarrow a*e=a \quad \rightarrow \quad a+ae+e=a$

$\rightarrow ae+e=0 \quad \rightarrow \quad e(a+1)=0; \quad a\neq -1$

$\therefore \quad e=0, \quad \forall\, a\in \mathbb{Q}$

Problema 26

Del problema 25, demuestre que el elemento inverso de 2 es $-2/3$.

Resolución

Sea x el inverso de 2

$\rightarrow 2*x=e$ (por definición)

$\rightarrow 2+2x+x=0$ (del problema anterior)

$\rightarrow 2+3x=0$

$\rightarrow x=-\dfrac{2}{3}$

Problema 27

En $A=\{1; 2; 3; 4\}$ se define una operación * cuyos valores están dados por la tabla de doble entrada adjunta:

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	1

Halle el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

I. En $x*4=1$ existe un solo valor x en A.

II. La operación * es conmutativa.

III. $(2*3)*[3*(1*4)]=1$

Resolución

I. **Falsa**

De la tabla: $2*4=1$

$4*4=1$

Entonces, para x existen dos valores.

II. **Verdadera**

Observando la tabla:

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	1

Al trazar una diagonal, se observa simetría, entonces la operación * es conmutativa.

III. **Verdadera**

Reduciendo

$$(2*3)*[3*(1*4)]=4*[3*4]$$
$$=4*2=1$$

Problema 28

Si $(a; b)$ y $(c; d)$ son elementos de $\mathbb{N}^2$ y definimos las operaciones de + y • mediante

$(a; b)+(c; d)=(a+c; b+d)$

$(a; b)\cdot(c; d)=(a\cdot c; b\cdot d)$

establezca el valor de verdad de cada una de las proposiciones.

I. Con respecto a + y •, $\mathbb{N}^2$ es cerrada

II. Las operaciones + y • son conmutativas y asociativas.

III. En las operaciones + y • existe un único elemento neutro.

Resolución

I. **Verdadera**

Como vemos, $(a+c, b+d)$ y (ac, bd) son también elementos de $\mathbb{N}^2$.

Entonces, respecto a las operaciones de + y •, $\mathbb{N}^2$ es cerrada.

II. **Verdadera**

$$(a;b)+(c;d)=(a+c;b+d)$$
$$=(c+a;d+b)$$
$$=(c;d)+(a;b)$$
$$(a;b)\cdot(c;d)=(a\cdot c;b\cdot d)$$
$$=(c\cdot a;d\cdot b)$$
$$=(c;d)\cdot(a;b)$$

Entonces, las operaciones + y • son conmutativas.

> **Observación**
> La asociatividad se prueba de modo análogo.

III. **Verdadera**

Los elementos neutros para + y • son, respectivamente, (0; 0) y (1; 1).

Problema 29

Si en los números naturales definimos la operación ∇ mediante $m\nabla n=\sqrt{m^2+n^2}$, entonces indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. $m\nabla(rn)=r(m\nabla n), r\in\mathbb{N}$

II. $(m\nabla n)+(n\nabla p)\geq(m\nabla p), r\in\mathbb{N}$

III. $m\nabla n=(m-n)\nabla\sqrt{mn}; m\geq n$

IV. $m\nabla(n+p)=(m\nabla n)+(n\nabla p)$

Resolución

I. **Falsa**

Por su definición

$$m\nabla rn=\sqrt{m^2+r^2n^2}\neq r\sqrt{m^2+n^2}$$

II. **Verdadera**

$$(m\nabla n)+(n\nabla p)\geq(m\nabla p)$$
$$\rightarrow\ \sqrt{m^2+n^2}+\sqrt{n^2+p^2}\geq\sqrt{m^2+p^2}$$

Al cuadrado

$$m^2+n^2+n^2+p^2+\sqrt{(m^2+n^2)(n^2+p^2)}\geq m^2+p^2$$
$$\rightarrow\ 2\left(n^2+\sqrt{(m^2+n^2)(n^2+p^2)}\right)\geq 0$$

III. **Falsa**

$$(m\nabla n)=(m-n)\nabla\sqrt{mn}$$
$$\rightarrow\ \sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{(m-n)^2+\sqrt{(mn)}^2}$$
$$\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{m^2+n^2-2mn+mn}$$
$$\sqrt{m^2+n^2}\neq\sqrt{m^2+n^2-mn}$$

IV. **Falsa**

$$m\nabla(n+p)=(m\nabla n)+(m\nabla p)$$
$$\rightarrow\ \sqrt{m^2+(n+p)^2}=\sqrt{m^2+n^2}+\sqrt{m^2+p^2}$$

Problema 30

Se define la operación * por:

- $a*b=a^2-b,\ \ \forall\, a;b\in\mathbb{R}$
- $a*^2=a*a,\ \ \forall\, a\in\mathbb{R}$
- $a*^3=(a*^2)*a,\ \ \forall\, a\in\mathbb{R}$

Calcule $a*^3$.

Resolución

$$a*^3=(a*a)*a=(a^2-a)*a=(a^2-a)^2-a$$
$$\rightarrow\ a*^3=a^4-2a^3+a^2-a$$
$$\therefore\ a*^3=a^4-2a^3+a^2-a$$

Problema 31

En el conjunto $\mathbb{N}_0$ (naturales ampliados) se define una operación □:

$$a\square b=(a+b)\cdot(a-b),\ \ \forall\, a;b\in\mathbb{N}$$

Responda a las siguientes preguntas:

I. ¿Está la operación □ totalmente definida en $\mathbb{N}_0$?

II. ¿Es la operación □ asociativa?

Resolución

I. La operación □ está totalmente definida en $\mathbb{N}_0$ si

$\square: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \ \forall\, a; b \in \mathbb{N}_0$

$a \square b = (a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Si $a=2;\ b=3 \ \rightarrow\ a \square b = 2^2 - 3^2 = -5,$

pero $-5 \notin \mathbb{N}_0$.

Por lo tanto, la operación □ no está totalmente definida.

II. La operación □ es asociativa si

$\forall\, a; b; c \in \mathbb{N}_0,\ (a \square b) \square c = a \square (b \square c)$

$(a \square b) \square c = (a^2 - b^2) \square c$

$= (a^2 - b^2)^2 - c^2 \qquad (\alpha)$

$a \square (b \square c) = a \square (b^2 - c^2)$

$= a^2 - (b^2 - c^2)^2 \qquad (\beta)$

Como $(\alpha) \neq (\beta)$, la operación □ no es asociativa.

Problema 32

Del mismo problema anterior (31), responda:

I. ¿Tiene un elemento neutro?

II. ¿Tiene elemento simétrico todo número natural respecto a la operación □?

Resolución

I. Sea e el elemento neutro $\forall\, a \in \mathbb{N}_0$

$a \square e = a \rightarrow a^2 - e^2 = a$

$\rightarrow\ e = \pm\sqrt{a(a-1)} \qquad (\alpha)$

$e \square a = a \ \rightarrow\ e^2 - a^2 = a$

$\rightarrow\ e = \pm\sqrt{a(a+1)} \qquad (\beta)$

Como $\alpha \neq \beta$, entonces □ no tiene elemento neutro.

II. Si no existe e para la operación □ sobre los $\mathbb{N}_0$, tampoco habrá elemento simétrico para todo $a \in \mathbb{N}_0$.

Problema 33

Demuestre que $\forall -x \in \mathbb{R}:\ -x = (-1)x$.

Resolución

$x \cdot 0 = 0$ teorema anterior

$1 + (-1) = 0$ postulado (elemento neutro aditivo)

$x(1 + (-1)) = x \cdot 0$ multiplicando por x

$x \cdot 1 + x(-1) = 0$ distributividad

$x + (-1)x = 0$ conmutatividad

$x + (-x) + (-1)x = (-x)$ sumando $(-x)$

$(x + (-x)) + (-1)x = -x$

$0 + (-1)x = -x$ neutro aditivo

$\therefore\ (-1)x = -x$

Problema 34

Demuestre que:

Si x es un número real y $x \neq 0 \ \rightarrow\ x^2 \neq 0$.

Resolución

(Por contradicción o reducción al absurdo).

$x \in \mathbb{R};\ x \neq 0 \ \rightarrow\ x^2 \neq 0$

$x^2 = 0$ suposición contradiciendo a la hipótesis

$0 = x \cdot 0$ teorema anterior

$x^2 = x \cdot 0$ realizando sustitución $\rightarrow\ x \cdot x = x \cdot 0$

aplicando cancelación: $x = 0$, esto es una contradicción.

Con lo cual queda demostrado que si

$x \in \mathbb{R} \ \wedge\ x \neq 0 \ \rightarrow\ x^2 \neq 0$

Problema 35

Demuestre que:

Si $x; y \in \mathbb{R}$, $xy \neq 0 \rightarrow (xy)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$.

Resolución

$(xy)(xy)^{-1} = 1$ elemento inverso multiplicativo

$(xy) \cdot (xy)^{-1} = 1 \cdot 1$ elemento neutro multiplicativo

$(xy)(xy)^{-1} = (xx^{-1}) \cdot (y \cdot y^{-1})$ inverso multiplicativo

$(xy)(xy)^{-1} = x(x^{-1}y^{-1} \cdot y)$ conmutatividad y asociatividad

$(xy)(xy)^{-1} = (xy)(x^{-1}y^{-1})$

Como $xy \neq 0$, aplicando la cancelación se tiene $(xy)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$.

Problema 36

Demuestre que: $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$, si $xy \neq 0$.

Resolución

$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = (xy^{-1})^{-1}$ definición de la división

$= x^{-1}(y^{-1})^{-1}$ (I)

como $a \neq 0 \rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$ y su inverso multiplicativo es a^{-1}.

Asumiendo $x = a^{-1} \neq 0$, $a \neq 0$

$\rightarrow x^{-1} = (a^{-1})^{-1}$

$x \cdot x^{-1} = 1 = (a^{-1})(a^{-1})^{-1}$ inverso multiplicativo.

También $a^{-1} \cdot a = 1$, de donde se tendrá

$a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1} = a^{-1} \cdot a$

$\therefore (a^{-1})^{-1} = a$ ley de cancelación

Luego en (I)

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = x^{-1} \cdot y$$

Por definición de división

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$$

Problema 37

Demuestre que:

$\forall\, a; b \in \mathbb{R}: a(-b) = -(ab) = (-a)b$

Resolución

- $a(-b) = a[(-1)b]$ (del problema 33)

  $= (a(-1)b)$ (M_3)

  $= (-1)(ab)$ (M_2, M_3)

  $a(-b) = -(ab)$ (I)

- $(-a)b = (-1)(ab)$ (del problema 33)

  $(-a)b = -(ab)$ (II)

De (I) y (II)

$a(-b) = -(ab) = (-a)b$

Problema 38

Demuestre que: $\forall\, a; b \in \mathbb{R}$, $(-a)(-b) = a \cdot b$

Resolución

Como

$(-a)(-b) = (-a)(-b)$ (reflexión)

$= (-1)(a)(-b)$ (del problema 33)

$= a(-1)(-b)$ (M_2, M_3)

$= a(-(-b))$ (del problema 33)

$= ab$ Teorema $(-(-b) = b)$

$\therefore (-a)(-b) = ab$

Problema 39

Demuestre que $\sqrt{2}$ es irracional.

Resolución

Usaremos el método del absurdo.

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional

$\rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b}$; $a; b \in \mathbb{Z}$, con a y b primos entre sí.

De $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ al cuadrado $\rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2}$

$\rightarrow a^2 = 2b^2 \rightarrow a^2$ es par, de donde a es par.

Si a es par, sea $a=2k;\ k \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow\ (2k)^2 = 2b^2\ \rightarrow\ b^2=2k^2$

Esto implica también que b es par, lo cual lleva a la contradicción de lo supuesto, en donde a y b son irreductibles (primos).

Por lo tanto, $\sqrt{2}$ no es racional.

Problema 40

Demuestre que $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.

Resolución

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{c}{d}&=ab^{-1}+cd^{-1}\\&=a\cdot 1\cdot b^{-1}+c\cdot 1\cdot d^{-1}\\&=a\cdot d\cdot d^{-1}\cdot b^{-1}+c\cdot b\cdot b^{-1}\cdot d^{-1}\\&=(ad+bc)\cdot b^{-1}d^{-1}\end{aligned}$$

pero $b^{-1}\cdot d^{-1}=(bd)^{-1}$ (del problema 35)

$\therefore\ \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{b\cdot d}$

Problema 41

Demuestre que: $a;\ b;\ x \in \mathbb{R};\ a\neq 0$

$\rightarrow ax+b=0\ \leftrightarrow\ x=-a^{-1}\cdot b$

Resolución

I. Si $ax+b=0$

$\rightarrow\ ax+b+(-b)=0+(-b)$

$\rightarrow\ ax+0=-b\ \rightarrow\ ax=-b$

$\rightarrow\ a^{-1}ax=a^{-1}(-b)$

$\rightarrow\ (aa^{-1})x=-a^{-1}\cdot b$

$1\cdot x=-a^{-1}b\ \rightarrow\ x=-a^{-1}\cdot b$

II. Si $x=-a^{-1}\cdot b\ \rightarrow\ ax=a(-a^{-1}\cdot b)$

$=-(a\cdot a^{-1})b=-(1)\cdot b=-b$

$\rightarrow\ ax+b=(-b)+b=0\ \rightarrow\ ax+b=0$

De (I) y (II) queda demostrado el teorema.

Problema 42

Para cada número real x, demuestre que $x+x+x=3x$.

Resolución

$$\begin{aligned}x+x+x&=x+(x+x)\\&=x+(x\cdot 1+x\cdot 1)\\&=x+x(1+1)\\&=x+x\cdot 2\\&=x(1+2)\\&=x\cdot 3\end{aligned}$$

$\therefore\ x+x+x=3x$

Problema 43

Sea $A=\{x \in \mathbb{R}\ /\ x^2 \geq 64\}$.

¿El conjunto está acotado?

Resolución

$x^2\geq 64\ \leftrightarrow\ x\geq 8\ \vee\ x\leq -8$

$\leftrightarrow\ x \in \langle -\infty;\ -8] \cup [8;\ +\infty\rangle$

Hallando las cotas inferiores y superiores de A, si existen:

$\nexists\ c \in \mathbb{R}\ /\ \forall\ x \in A;\ c\leq x$

$\nexists\ c \in \mathbb{R}\ /\ \forall\ x \in A;\ x\leq c$

lo cual nos hace concluir que el conjunto A no es acotado.

Problema 44

Tres amigos, José, Pedro y Luis, hacen las afirmaciones siguientes respecto a un número irracional x.

I. José: x^2 es irracional.

II. Pedro: toda potencia de x es irracional.

III. Luis: alguna potencia de x (de exponente diferente de cero) es racional.

¿Cuál de los tres amigos dio una afirmación correcta?

Resolución

I. Si $x \in$ irracional $\rightarrow (x^2 \in \mathbb{Q} \vee x^2 \in \mathbb{Q}')$

II. Toda potencia de x irracional no siempre es irracional.

Ejemplo: $(\sqrt{2})^6 = 8 \in a$

III. Alguna potencia de x irracional es racional.

Ejemplo: $(\sqrt{3})^2 = 3 \in \mathbb{Q}$

Por lo tanto, Luis dio una afirmación correcta.

Problema 45

Dadas las afirmaciones, indique el valor de verdad.

I. $\forall a \in \mathbb{Q}$ se tiene $(a^2)^{1/2} = a$

II. $\forall a \in \mathbb{Q}$; $\forall r \in \mathbb{R}$ existe a^r

III. Si $a \in \mathbb{Q}$ y $\forall r \in \mathbb{R}$ existe a^r, entonces existe r^a

Resolución

I. **Falsa**

$\forall a \in \mathbb{Q}$: $(a^2)^{1/2} = \sqrt{a^2} = |a|$

II. **Falsa**

$\forall a \in \mathbb{Q}$: $\forall r \in n$, no siempre está definido a^r.

Ejemplo

$a = 0 \wedge b = -1$: 0^{-1} no está definido.

III. **Falsa**

Si $\forall a \in \mathbb{Q}$; $\forall r \in \mathbb{R}$ existe a^r, no necesariamente existe r^a.

Ejemplo

$(-4)^0 = 1$, pero 0^{-4} no existe.

Problema 46

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. La suma de dos irracionales es otro irracional.

II. En una división en $\mathbb{Z}$, el resto es menor que el divisor.

III. La gráfica de la clase de equivalencia [2/3] es una recta.

Resolución

I. **Falsa**

La operación de adición en los irracionales no es cerrada.

Ejemplos

$(2+\sqrt{3})+(-\sqrt{3}) = 2 \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{3}+(1-2\sqrt{3}) = 1-\sqrt{3} \in \mathbb{Q}'$

II. **Falsa**

No siempre.

Ejemplos

$$\begin{array}{r|l} 16 & -3 \\ \hline 1 & -5 \end{array} \rightarrow r = 1 > d = -3$$

III. **Falsa**

$$\left[\frac{2}{3}\right] = \left\{\ldots; \frac{-20}{30}; \frac{-16}{-24}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{6}; \frac{6}{9}; \ldots\right\}$$

Es un conjunto de puntos discontinuos.

Problema 47

Sabiendo que $\sqrt{2}$ es un irracional, demuestre que $(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})$ es irracional.

Resolución

Supongamos que $x = \sqrt[3]{3}+\sqrt{2}$ es un número racional.

$\rightarrow x - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3}$

Elevando al cubo

$$x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2} = 3$$

$$\rightarrow x^3 + 6x - 3 = \sqrt{2}(3x^2+2)$$

$$\rightarrow \frac{x^3+6x-3}{3x^2+2} = \sqrt{2}$$

Pero el primer miembro $\left(\dfrac{x^3+6x-3}{3x^2+2}\right)$ es racional, ya que $x \in \mathbb{Q}$, esto implica una contradicción.

Por lo tanto, como x no es racional, entonces es irracional.

Problema 48

Sean a y b dos números reales tales que el producto ab es irracional, luego analice las siguientes proposiciones:

I. Si a es irracional, entonces b debe ser irracional.

II. Si a es racional, entonces b debe ser irracional.

III. Si a es irracional, entonces b debe ser racional.

Resolución

I. **Falsa**

Veamos un contraejemplo.

$$ab=\underset{\underset{a}{\uparrow}}{\sqrt{5}}\cdot\underset{\underset{b}{\uparrow}}{3}\in\mathbb{Q}'$$

Para $a=\sqrt{5}$; $b=3$

II. **Verdadera**

$ab\in\mathbb{Q}'\ \wedge\ a\in\mathbb{Q}$, entonces b necesariamente pertenece a $\mathbb{Q}'$.

Ejemplo: $5\cdot\sqrt{3}\in\mathbb{Q}'$

$\uparrow$ a; $\uparrow$ b; $b\in\mathbb{Q}'$

III. **Falsa**

Veamos un contraejemplo.

$ab=\sqrt{6}\in\mathbb{Q}'$

Para $a=\sqrt{2}$; $b=\sqrt{3}$

Problema 49

Sea $Z_5=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

Definimos la adición y la multiplicación en $\mathbb{Z}_5$ como sigue

$$a+b=\begin{cases} a+b, & \text{si } a+b<5 \\ a+b-5, & \text{si } a+b\geq 5 \end{cases} \quad \forall\ a;\ b\in\mathbb{Z}_5$$

$$a\cdot b=\begin{cases} ab, & \text{si } ab<5 \\ \text{resto}\left(\dfrac{ab}{5}\right), & \text{si } ab\geq 5 \end{cases}$$

Resuelva en $\mathbb{Z}_5$ el sistema:

$$2x+3y=2 \qquad \text{(I)}$$

$$x+2y=4 \qquad \text{(II)}$$

Resolución

De (II)

$x=4-2y$

En (I)

$2(4-2y)+3y=2 \ \rightarrow\ 3-4y+3y=2 \ \rightarrow\ y=1$

Luego

$x=4-2\cdot 1 \ \rightarrow\ x=2$

$\therefore\ x=2;\ y=1$

Observación

$2\cdot 4=3$ en $\mathbb{Z}_5$

Test 11

1. Determine el valor simplificado de $N=0,1+0,2+0,3+...+2,9$.

A) 43,5 B) 42,5 C) 39,2
D) 45,4 E) 39,6

2. Verifique si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:
   I. No es posible encontrar un número irracional del que se conozcan todas sus cifras decimales.
   II. La suma de un número racional con otro irracional es irracional.
   III. La suma de dos números irracionales es irracional.
   IV. El producto de dos números irracionales es irracional.

A) VVVV B) VVFF C) VFFF
D) FFFV E) FVVV

3. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:
   I. Entre cada dos números reales distintos hay infinitos racionales e infinitos irracionales.
   II. La división de dos números racionales cualesquiera es necesariamente otro número racional.
   III. El conjunto de los números reales es solo la unión de los números racionales y los números irracionales.

A) VVV B) FVF C) VFV
D) FFV E) VVF

4. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:
   I. Sean x e y dos números reales positivos distintos tales que su producto y su cociente son racionales, entonces estos dos números x e y son racionales.
   II. Todo número decimal periódico es racional.
   III. El inverso de todo número real no nulo es otro número real.

A) VVV B) VVF C) FFV
D) FVV E) FFF

5. ¿Cuál es la fracción generatriz de $3,5\overline{1}$?

A) $\frac{115}{33}$ B) $\frac{315}{99}$ C) $\frac{375}{99}$
D) $\frac{335}{99}$ E) $\frac{116}{33}$

6. ¿Cuál es la fracción generatriz de $3,5\,\overline{1}$?

A) $\frac{295}{90}$ B) $\frac{158}{45}$ C) $\frac{157}{45}$
D) $\frac{147}{45}$ E) $\frac{293}{90}$

7. Sean los siguientes subconjuntos de los números reales:
$A=\{x \in \mathbb{Z} / x \in [-10; 11]\}$
$B=\{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x < 2\}$
¿Cuántos números integran el conjunto $A-B$?

A) 21 B) 10 C) 20
D) 11 E) 19

8. ¿Cuál es el resultado de efectuar

$$\frac{3}{4}-2\left(5-\frac{14}{3}\right)^2+\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)?$$

A) $\frac{7}{18}$ B) $\frac{5}{36}$ C) $\frac{5}{18}$
D) $\frac{11}{36}$ E) $\frac{7}{36}$

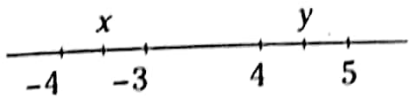
9. ¿Cuál es el equivalente reducido de

$$3\frac{5}{9}-1{,}0\overline{3}-\left\{1\frac{1}{3}+0{,}\overline{6}\right\}?$$

A) $\frac{47}{90}$ B) $\frac{41}{90}$ C) $\frac{43}{90}$

D) $\frac{23}{45}$ E) $\frac{13}{45}$

10. Dada la recta numérica



respecto a los números x e y podemos afirmar que

A) $|x| > |y|$
B) $|x+y| < 2$
C) $|x|=|y|$
D) $|x-y|=1$
E) $1 < |x-y| < 3$

11. El conjunto representado en la siguiente recta numérica es el conjunto solución de la inecuación $(ax+1)(x-b)\leq 0$.

Calcule el valor de $a-b$.

A) $-\frac{5}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{3}{2}$

D) $-\frac{3}{2}$ E) 0

12. Si los intervalos

$M=\langle -2; x+2]$ y $N=[2x-1; +\infty\rangle$

tienen un solo elemento en común, indique dicho elemento.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 7 E) 2

Claves

1 A	3 C	5 E	7 C	9 A	11 E
2 B	4 D	6 B	8 E	10 B	12 C

Problemas PROPUESTOS

Nivel I

1. ¿Cuál es el racional equivalente de 2,56565656...?

A) $\frac{253}{99}$ B) $\frac{254}{99}$ C) $\frac{243}{99}$

D) $\frac{263}{99}$ E) $\frac{255}{99}$

2. ¿Cuál es el equivalente reducido de $3,\widehat{2}+6,8\widehat{3}$?

A) $\frac{62}{123}$ B) $\frac{65}{123}$ C) $\frac{57}{123}$

D) $\frac{58}{123}$ E) $\frac{55}{123}$

3. Simplifique e indique el equivalente de $0,5+0,02+\frac{1}{2}$.

A) 1,02 B) 1,2 C) 3,05
D) 2,25 E) 2,02

4. Dado el operador matemático $\oplus$, definido por $a\oplus b=\overline{ab}-2$, califique las siguientes proposiciones:
   I. $\oplus$ es conmutativo sobre $\mathbb{Q}$.
   II. $\oplus$ es asociativo sobre $\mathbb{R}$.
   III. El elemento neutro de $\oplus$ es $2-9a$ para cada a racional.

A) VVV B) VVF C) FFV
D) FVF E) FFF

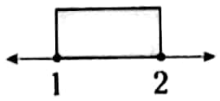
5. Definido el operador matemático $\oplus$ sobre $\mathbb{R}$ como $a\oplus b=a+b-2009$, halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
   I. Su elemento neutro es 2009.
   II. El inverso de 2009 es 2009.
   III. El operador $\oplus$ es asociativo.

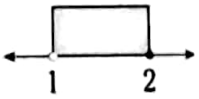
A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFF E) FFV

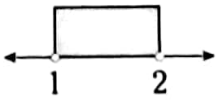
6. Escriba en forma de conjunto el número o los números que cumplen las condiciones:
   I. $1<x<4$
   II. $-3<x$
   III. $x<1$

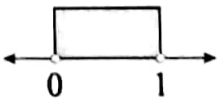
A) $[1;2]$ B) $\langle 1;2\rangle$ C) $\{1\}$
D) $\{1;2\}$ E) ϕ

7. Represente en la recta real los números que cumplen la condición:
   I. $1<x<4$
   II. $-1<x$
   III. $x<2$

A) 

B) 

C) 

D) 

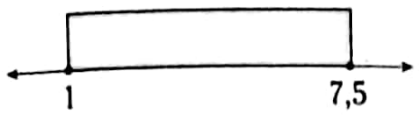
E)

8. Resuelva la inecuación

$$3+\frac{x-3}{6}>\frac{x+5}{3}-\frac{7}{3}.$$

A) $x<17$
B) $x>19$
C) $x<19$
D) $x>17$
E) $x<18$

9. ¿Cuál es la longitud del listón que se está midiendo?



A) 6 m B) 7 m C) 6,5 m
D) 7,5 m E) 5,5 m

10. Resuelva la inecuación cuadrática
$(x-1)(ax-b)>0;\ a>1>b>0$
e indique el complemento de su conjunto solución.

A) $\left\langle \frac{b}{a}; 1\right\rangle$ B) $\left\langle 1; \frac{a}{b}\right\rangle$ C) $\left[\frac{b}{a}; 1\right]$

D) $\left\langle -\infty; \frac{b}{a}\right\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$ E) $\langle -\infty; 1\rangle$

11. Indique cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera:

A) $|x^2+1|=x^2+1$
B) Si $|1-x|=2$, entonces $x=-1$
C) $|2x-1|=0 \leftrightarrow x=\frac{1}{2}$
D) Si $|x-2|=-1$, entonces $x \in \langle 0; +\infty\rangle$
E) $x^2-3x+3>0$, para todo x real.

12. Si los intervalos $M=\langle -2; x+2]$ y $N=[2x-1; +\infty\rangle$ tienen un solo elemento en común, indique dicho elemento.

A) 3 B) 4 C) 2
D) 5 E) 6

13. Luego de resolver la inecuación $0<\frac{1}{2x^2+x}<1$, indique su conjunto solución.

A) $\left\langle -\infty; \frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$

B) $\langle -\infty; -2\rangle \cup \langle -1; +\infty\rangle$

C) $\mathbb{R}-\left\langle -1; \frac{1}{2}\right\rangle$

D) $\langle -\infty; -1\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}; +\infty\right\rangle$

E) $\mathbb{R}-\left\{0; -\frac{1}{2}\right\}$

14. Resuelva la inecuación $\frac{x-1}{2}>x-2$.

A) $x>3$ B) $x<3$ C) $x>2$
D) $x>4$ E) $x<4$

15. Si los intervalos
$A=\langle 0; x+2]$ y $B=\langle 2x-1; +\infty\rangle$
tienen intersección no vacía, tal que
$A \cap B \subset \langle 1; 3]$, entonces:

A) $x \in \langle 1; 2\rangle$
B) $x \in \{0; 1; 2\}$
C) x es negativo
D) $x \in \langle 0; 1\rangle$
E) $x \in \{2; 3\}$

16. Indique el valor simplificado de

$$1+\cfrac{1+\cfrac{1}{4}}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{1}{4}}}}$$

A) $\frac{49}{24}$ B) $\frac{47}{24}$ C) $\frac{41}{24}$

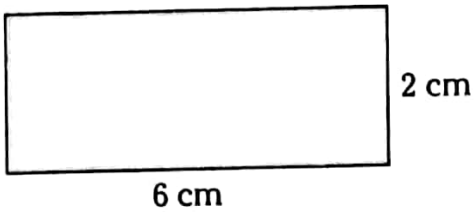
D) $\frac{39}{24}$ E) $\frac{50}{24}$

17. ¿Qué valores de x verifican la siguiente desigualdad?

$$\frac{5x-2}{3}-\frac{x-8}{4}>\frac{x+14}{2}-2$$

A) $x<4$
B) $x>4$
C) $x>3$
D) $x<3$
E) $3<x<4$

18. El perímetro de un cuadrado no supera el perímetro del rectángulo de la figura. ¿Qué se puede asegurar acerca de la superficie S del cuadrado?



A) El área no puede ser 10 cm^2.
B) El área no puede ser 13 cm^2.
C) El área no puede ser 17 cm^2.
D) El área no puede ser 15 cm^2.
E) El área no puede ser 7 cm^2.

19. La desigualdad $0<|x+3|<1$ es cierta cuando:

A) $-4<x<1$
B) $-3<x<1$
C) $-2<x<2$
D) $-4<x<-2 \wedge x\neq -3$
E) $0<x<1$

20. ¿Cuáles son los números x cuyo triple excede a su duplo en más de 20?

A) $x<12$ B) $x<16$ C) $x<18$
D) $x>22$ E) $x>20$

Nivel II

21. En el conjunto de los números naturales se define la operación *

$a*b=a+b+2ab, \quad \forall\, a;b\in\mathbb{N}$

Indique el valor de verdad respecto a las siguientes proposiciones:

I. La operación * es asociativa.
II. La operación * es conmutativa.
III. El elemento neutro es 0.

A) VVV B) VVF C) VFV
D) VFF E) FVV

22. Definamos una nueva operación binaria sobre los números reales. Para $a;b\in\mathbb{R}$ llamaremos $a*b=a$, donde * es el nuevo operador. Luego, se puede asegurar que

A) la suma de los resultados de $2*0$; $-4*6$; $8*8$ es 8.
B) dado un elemento $a\in\mathbb{R}$, no es posible hallar otro número b tal que $a*b=a$.
C) la operación * es asociativa.
D) la operación * es conmutativa.
E) no es operación binaria.

23. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales. Se define la operación binaria

$*/*: (a;b) \rightarrow 2a+3b \quad \forall\, a;b\in\mathbb{R}$

Luego, se puede afirmar que

A) la operación * es conmutativa.
B) la operación * es asociativa.
C) no hay un elemento identidad para la operación *.
D) no tienen elementos recíprocos para cada elemento de $\mathbb{Q}$.
E) $(4*3)*(3*4)$ es 71.

24. Se define una operación * en el conjunto de los números naturales de modo que
$a*b=a+(b+1)$.
Indique el valor de verdad en las siguientes proposiciones:
I. 3 * 2 es 6
II. $\mathbb{N}$ es cerrado para esta operación.
III. La operación * es conmutativa y asociativa.

A) VVV B) VVF C) VFV
D) VFF E) FVV

25. Sobre $\mathbb{R}-\{-1\}$ se define la operación binaria *, de modo que:
$\forall\, a; b \in \mathbb{R}, a*b=a+b+ab$.
Establezca el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
I. El operador * es conmutativo.
II. El simétrico del real r es $-\dfrac{r}{r+1}$.
III. El elemento neutro es 0.

A) VVV B) VFV C) FVV
D) VFF E) FFV

26. Si $E=\{a\}$, la terna $(P(E); \cup; \cap)$ y la ley de composición para los operadores $\cup$ (unión), $\cap$ (intersección) están dados por las tablas siguientes:

$\cup$	ϕ	E
ϕ	ϕ	E
E	E	ϕ

$\cap$	ϕ	E
ϕ	ϕ	ϕ
E	ϕ	E

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
I. $[(E\cup E)\cap(\phi\cup E)]\cup E=E$.
II. $\cup$ es conmutativo.
III. $\cap$ es asociativo.

A) VVV B) VFF C) VFV
D) FVF E) VVF

27. Demuestre que
$$\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b},\quad \forall\, a; b\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

28. Demuestre que
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b},\quad \forall\, a; b; c\in\mathbb{R} \text{ y } b\neq 0$$

29. Demuestre que
$-(-a)=a,\ \forall\, a\in\mathbb{R}$.

30. Demuestre que
$-(a+b)=-a+(-b),\ \forall\, a; b\in\mathbb{R}$.

31. Establezca el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
I. El conjunto
$$\left\{n+(-1)^n\frac{1}{n}\Big/ n\in\mathbb{N}\right\}$$
es acotado superiormente.
II. El conjunto
$$\left\{n+(-1)^n\frac{1}{n}\Big/ n\in\mathbb{N}\right\}$$
es acotado inferiormente.
III. El conjunto
$$\left\{n+(-1)^n\frac{1}{n}\Big/ n\in\mathbb{N}\right\}$$
es acotado.

A) VVV
B) VFF
C) FVF
D) FFF
E) VVF

32. Indique la afirmación incorrecta:

A) El supremo del conjunto

$$\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle/\, x=\frac{(-1)^n}{n} \wedge n\in\mathbb{N}\right\} \text{ es } \frac{1}{2}.$$

B) El ínfimo del conjunto

$$\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle/\, x=\frac{(-1)^n}{n} \wedge n\in\mathbb{N}\right\} \text{ es } -1.$$

C) El conjunto $\{n/n \in \mathbb{N}\}$ es acotado solo inferiormente y su ínfimo es 1.

D) El conjunto $\left\{n+(-1)^n\cdot\frac{1}{n} \,\middle/\, n\in\mathbb{N}\right\}$ no tiene ínfimo ni supremo.

E) El conjunto $A=\{x\in\mathbb{N} \,/\, \sqrt{x+1}<2\}$ es un conjunto acotado.

33. ¿Cuál de los siguientes conjuntos no es acotado?

A) $\{x\in\mathbb{R} \,/\, x^2\leq 81\}$

B) $\{x\in\mathbb{R} \,/\, \sqrt{x^2-4}<\sqrt{21}\}$

C) $\{x\in\mathbb{R} \,/\, x^2>25 \wedge x^2\geq 100\}$

D) $\{x\in\mathbb{Z}^+ \,/\, x^2<16 \wedge x^2>4\}$

E) $\sqrt{2x+3}<-x$

34. Demuestre los siguientes teoremas:

I. $\forall\, a; b; c \in \mathbb{R}$, si $a>b$ y $b>c \rightarrow a>c$

II. $a<b \leftrightarrow -a>-b$

III. Si $a<b \wedge c>0 \rightarrow ac<bc$

IV. Si $a<b \wedge c<0 \rightarrow ac>bc$

V. Si $x\neq 0 \rightarrow x^{-1}\neq 0$
(x^{-1} inverso multiplicativo de x).

VI. Si x e y tienen el mismo signo $\rightarrow xy>0$

35. Si $m\otimes n=$ residuo de dividir $(m+n)$ entre 8 y $m\#n=$residuo de dividir $m\cdot n$ entre 8, calcule $(6\otimes 7)\#(5\otimes 7)$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 8 E) 10

36. Sean las operaciones definidas por

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	c	b	a

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	d	b
d	a	d	b	c

Si $x=b*c$, determine el valor de $(c*x)\cdot(b*a)$.

A) a B) b C) x
D) d E) c

37. Si $a*b=(a^2+b^2)-ab$, entonces el valor de $a*(b*(b+1))$ es:

A) $ab(b+1)+a^2+b^2(b+1)^2$

B) $(1+b+b^2)[1+b^2+b+a-a^2]$

C) $[(1+b+b^2)(1+b+b^2-a)+a^2]$

D) $ab(b+1)+a^2+a(b+1+b^2)$

E) $ab(b+1)+a^2-a(1+b+b^2)$

38. En $\mathbb{R}$ definimos las siguientes operaciones:

$$a*b=3b+\frac{1}{2}a$$

$$a\#b=3a+\frac{3}{2}b$$

$$a\Delta b=7a-3b$$

Si $x*x=9; y\#y=21$, halle el valor de $(x\Delta y)+20$.

A) 24 B) 25 C) 26
D) 28 E) 14

39. Sea $B=\{m; n; p; q\}$ y * la operación definida en A mediante la tabla. Halle el valor de $x=\left[(q*m^{-1})^{-1}*n\right]^{-1}$.

*	m	n	p	q
m	m	n	p	q
n	n	m	q	p
p	p	q	m	n
q	q	p	n	m

Observación: m^{-1} representa el inverso de m bajo la operación *.

A) m B) q C) n
D) p E) mn

40. Sea $A=\{a; b; c; d; e\}$ y $\odot$ la operación binaria asociativa definida en A; según la tabla adjunta y dado el sistema:

$x\odot y=b;\ \ x\odot y^{-1}=d$

Halle el par ordenado $(x\odot a; y\odot d)$

$\odot$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

A) $(a; b)$ B) $(c; c)$ C) $(a; d)$
D) $(b; c)$ E) $(a; c)$

41. Dado el conjunto $G=\{a_0; a_1; a_2; a_3; a_4\}$, definimos la operación binaria * como:

$$a_i*a_j=\begin{cases} a_{i+j}, \text{ si } i+j<5 \\ a_{i+j-5}, \text{ si } i+j\geq 5 \end{cases}$$

Si b_i es el inverso de a_i, calcule $b_2*(b_3*b_4)$.

A) a_2 B) a_4 C) a_3
D) a_1 E) a_0

42. Sea * una operación binaria definida en R como
$a*b=(a^2-b)(b^2-a)$.
Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
I. * es conmutativa.
II. $4*(3*2)=5\cdot 9^2$.
III. $\forall\, k\in \mathrm{R}: k^2[a*b]=[ka]*[kb]$.

A) VFV B) VVV C) FVV
D) VVF E) FFV

43. Se define
$a*b=\text{mín}\ \{a; b\}$
$a\Delta b=\text{máx}\ \{a; b\}\in \mathrm{R}$.
Además
mínimo: menor entre a y b
máximo: mayor entre a y b
Calcule $(5\Delta 4)*(\sqrt{2}*\pi)$.

A) 5 B) 4 C) 0
D) $\sqrt{2}$ E) 1

44. Definimos en **N** la operación * como $a*b=a^b$.
Halle la suma usual de
$2*3;\ 3*4;\ 4*2$ y $1*100$.

A) 100 B) 106 C) 102
D) 205 E) 206

45. Si $a; b\in \mathrm{R}$, se define la operación * como

$$a*b=\frac{a+b-1}{3}.$$

Determine el conjunto solución de
$(x+1)^2*2\geq 3((2*x)*1)$.

A) $\langle 3; 4]$ B) $[-3; 3]$ C) $[-2; 6]$
D) $[-2; 6\rangle$ E) $\langle -\infty; +\infty\rangle$

46. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas si se comparan dos variables independientes del tercero.

I. Si x varía directamente con y, y varía directamente con z; entonces x varía directamente con z.

II. Si x varía directamente con z, y varía directamente con z; entonces $x+y$ varía directamente con z, donde x; y; z son positivos.

III. Sean x; $y \in \mathbb{R}^-$. Si x varía directamente con y, y varía directamente con x; entonces $x=y$.

A) VVV B) VVF C) FVF
D) FFV E) VFF

47. Indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

I. $a<b \leftrightarrow -a>-b$

II. $0<a<1 \leftrightarrow a^3<a^2$

III. $b \nless a \leftrightarrow a \neq b$

IV. $a \nless b \wedge a \ngtr b \rightarrow a \neq b$

A) I
B) I y II
C) I, II y IV
D) I y III
E) I, III y IV

48. En $\mathbb{R}$ se define la operación * como:
$a*b=ab+|a+b|$.
Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si $a*a>0$; entonces $a \neq 0$.

II. El cero es el elemento neutro de la operación (*).

III. La operación * es conmutativa.

A) VVV B) FFF C) VFV
D) FFV E) VVF

49. Si definimos en $\mathbb{R}$ la operación * definida por $a*b=$mínimo $\{a; b\}$, ¿cuáles de la siguientes proposiciones son falsas?

I. $a*b=b*a$

II. $a*(b*c)=(a*b)*c$

III. $(x*4)=2 \rightarrow x=1$

IV. $(x*1)=2-x^2 \rightarrow x=1 \vee x=-2$

A) I B) III C) II y IV
D) III y IV E) IV

50. Demuestre que
$(a+b)+[(-a)+(-b)]=0, \quad \forall\, a; b \in \mathbb{R}$.

51. Demuestre que
$(-a)(-b)=ab$.

52. Demuestre que
$a(-1)=-a, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$.

53. Sean a y b números naturales. Si se define $a*b=a+2b$, entonces es verdadero que

A) $(a*b)*a=a+4b$
B) $a*b=b*a$
C) $(a*b)*b=a+4b$
D) $(a*b)*(a*b)=(a+2b)^2$
E) $(a*b)*c=a*(b*c)$

54. Demuestre que

I. $(b+c)+(-c)=b, \quad \forall\, b; c \in \mathbb{R}$.

II. $(-1)(a+b)=-a-b$.

55. Si $a*b=(ab)^2$, $\forall\, a; b \in \mathbb{R}$, entonces el valor de $1*1+2*1+3*1+...+10*1$ es

A) 185 B) 285 C) 385
D) 216 E) 729

56. Denifimos en $\mathbb{R}$ la operación $\odot$ como
$a \odot b = \text{máx}\{a; b\}$.
Resuelva la inecuación
$(x^2+1) \odot 1 \geq 5 \odot 4$.

A) $\langle -\infty; 2]$
B) ϕ
C) $[-2; 2]$
D) $\langle -2; 2\rangle$
E) $\langle -\infty; -2] \cup [2; +\infty\rangle$

57. Se define * en $\mathbb{R}$ como

$$x^* = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

Halle los valores de x que verifican $(x-3)^* = 5$.

A) 8; −2 B) 8 C) −2
D) 1; −8 E) 2; 1

58. Sea la operación * definida en $\mathbb{R}$ tal que
$a * b = (ab)^{-1} = \dfrac{1}{ab}$.
Halle la suma límite de
$S = 1*2 + 2*3 + 3*4 + \ldots$

A) $\dfrac{1}{3}$ B) 1 C) 2
D) 4 E) $\dfrac{1}{2}$

59. Calcule el inverso de 5 bajo la operación * si
$a * b = a + b + ab, \ \forall\, a; b \in \mathbb{R}$.

A) 6/5 B) −6/7 C) −5/6
D) 1/2 E) −1/2

60. En el conjunto $A = \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$ se define la operación binaria

$$a * b = \begin{cases} a+b, & \text{si } a+b < 10 \\ a+b-10, & \text{si } a+b \geq 10 \end{cases}$$

Indique el valor de la verdad de las siguientes proposiciones:

I. El conjunto A es cerrado para esta operación.
II. Es conmutativo.
III. Admite elemento neutro.
IV. Admite inverso todo elemento de A.

A) VVVV B) VFVV C) FFFF
D) VVFF E) FFVV

CLAVES
Problemas propuestos

NIVEL I

1 B*	5 A*	9 C*	13 D*	17 B*
2 D*	6 E*	10 C*	14 B*	18 C*
3 A*	7 C*	11 B*	15 B*	19 D*
4 E*	8 C*	12 D*	16 A*	20 E*

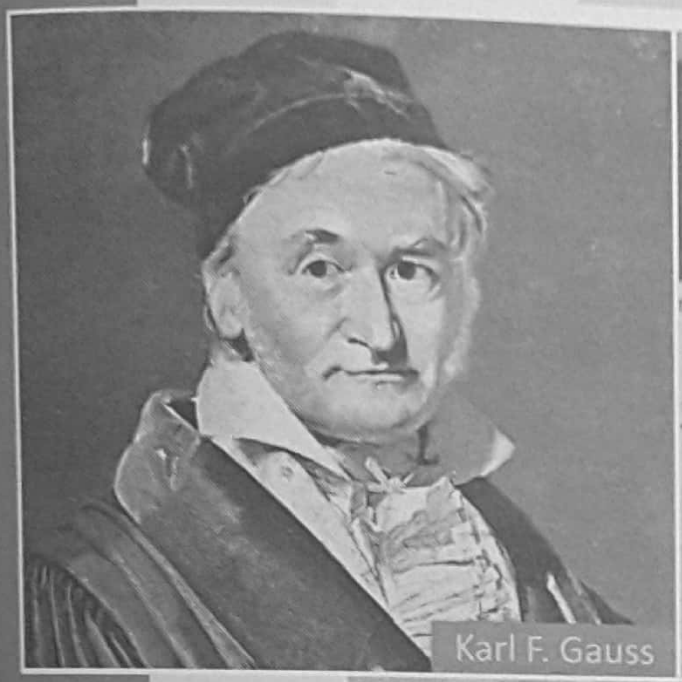
NIVEL II

21 A*	29 •	37 C*	45 E*	53 C*
22 C*	30 •	38 A*	46 B*	54 •
23 C*	31 C*	39 D*	47 A*	55 C*
24 A*	32 D*	40 B*	48 C*	56 E*
25 A*	33 C*	41 D*	49 B*	57 A*
26 A*	34 •	42 D*	50 •	58 B*
27 •	35 C*	43 D*	51 •	59 C*
28 •	36 E*	44 B*	52 •	60 A*

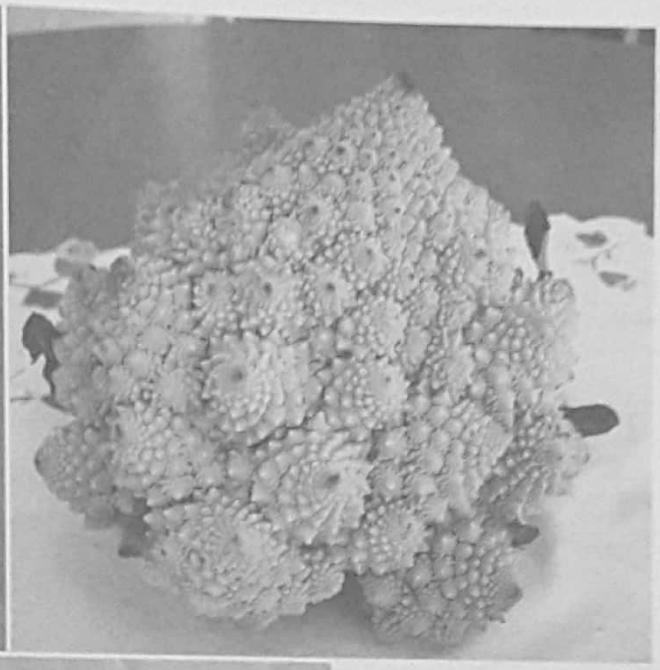
Nota: Las claves con * son demostraciones.

Capítulo

XII



Karl F. Gauss



$$e^{i\pi}+1=0$$

Números complejos

CAPÍTULO XII

NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivos

- Conocer la unidad imaginaria y sus propiedades.
- Reconocer un número complejo en sus diferentes formas.
- Efectuar las operaciones con números complejos.
- Calcular las raíces n-ésimas de un número complejo e interpretarlas geométricamente.

Introducción

El problema de resolver las ecuaciones algebraicas ha llevado al hombre desde los números naturales a los enteros, a los racionales, a los números irracionales y al sistema completo de los números reales.

En el siglo XIX, Leopoldo Kronecker, el primer crítico de los fundamentos del análisis moderno, describió esta evolución larga y gradual de la comprensión del sistema de números por el hombre. Sabemos, por ejemplo, que no existe ningún número real x con la propiedad de verificar $x^2+1=0$; el problema es análogo. Cuando el hombre no conocía los números enteros negativos solo contemplaba la ecuación $x+9=4$; el número -5 aún no tenía algún sentido.

Discutiremos el sistema de los números complejos siguiendo estas mismas líneas, las definiciones y reglas se dan en primer lugar. Y demostraremos después como este sistema de números complejos es una extensión del sistema de los números reales.

La primera representación clara de los números complejos y la primera prueba satisfactoria del teorema fundamental del álgebra la dio Karl Gauss (1777-1855) en su disertación doctoral en 1799. El término número complejo lo introdujo Gauss y la definición de números complejos como pares ordenados de números reales fue usada por primera vez en 1835 por el matemático irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865), y luego Herman Grassman (1809-1877) extendió esta definición de los números complejos a las n-adas ordenadas de números reales $(x_1; x_2; x_3; \ldots ; x_n)$; estos números hipercomplejos generalizan a los números complejos y a los cuaterniones de Hamilton.

Los números complejos son de capital importancia en álgebra. En la teoría de las funciones analíticas de una variable compleja, los números complejos juegan un papel importante en las ecuaciones diferenciales; en los circuitos eléctricos, oscilaciones, vibraciones, fenómenos ondulatorios; en los fractales, que es una herramienta poderosa, así como en los diferenciales.

NÚMEROS COMPLEJOS

DEFINICIÓN

Un número complejo es un par ordenado de números reales $(x; y)$; es decir, $x; y \in \mathbb{R}$, donde x es la primera componente e y es la segunda componente.

Luego formamos el conjunto de los números complejos, denotado por

$$\mathbb{C}=\{(x; y); x, y \in \mathbb{R}\}$$

Notación

$z=(x; y); x, y \in \mathbb{R}$

x: parte real $\text{Re}(z)$

y: parte imaginaria $\text{Im}(z)$

Es decir:

$\text{Re}(z)=x$

$\text{Im}(z)=y$

Ejemplos

- $z_1=(3; 7)$
- $z_2=(-1; \sqrt{2})$
- $z_3=(0; 4)$
- $z_4=(0; 0)$

OPERACIONES DEFINIDAS EN $\mathbb{C}$

Sean los complejos

$z_1=(x_1; y_1)$

$z_2=(x_2; y_2)$

Se define

I. Adición

$z_1+z_2=(x_1+x_2; y_1+y_2)$

II. Multiplicación

$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2; x_1y_2+y_1x_2)$

Ejemplo

Sea $z_1=(2; 3)$; $z_2=(4; 5)$

Entonces

$z_1+z_2=(2+4; 3+5)=(6; 8)$

$z_1 \cdot z_2=(2\cdot 4-3\cdot 5; 2\cdot 5+3\cdot 4)=(-7; 22)$

Debe observarse que la adición de números complejos es la misma operación de adición en V_2 (V_2: álgebra vectorial bidimensional); la operación de multiplicación se distingue en $\mathbb{C}$ y V_2. En los números complejos, la multiplicación origina otro número complejo; en cambio, la multiplicación de dos vectores origina un escalar. Además, la diferencia es que un vector tiene dirección, pero un número complejo no tiene dirección alguna.

IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS

Dados $z_1=(x_1; y_1)$; $z_2=(x_2; y_2)$

$$\boxed{z_1=z_2 \text{ si y solo si } x_1=x_2 \wedge y_1=y_2}$$

Ejemplos

1. Sean $z_1=(4; y+1) \wedge z_2=(x-3; 5-y)$.
   Calcule $x+y$ si $z_1=z_2$.

   Resolución

   $z_1=z_2 \leftrightarrow 4=x-3 \wedge y+1=5-y$

   De ahí $x=7 \wedge y=2$

   $\therefore\ x+y=9$

2. Sean los números complejos

   $z_1=(x^2-x; 2-y)$;

   $z_2=(6; y-8)$

   iguales. ¿Cuál es el mayor valor de $y-x$?

   Resolución

   Si $z_1=z_2 \rightarrow x^2-x=6 \wedge 2-y=y-8$

   $x=3 \vee x=-2 \qquad y=5$

   Luego

   $y-x=5-3 \vee y-x=5-(-2)$

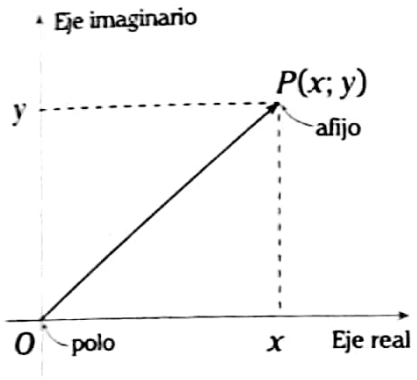
   $\rightarrow y-x=2 \vee y-x=7$

   $\therefore\ (y-x)_{\text{mayor}}=7$

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA (PLANO DE GAUSS)

La representación se realiza en un plano al que llamaremos plano complejo, donde el eje X representa al eje de la parte real y el eje Y al de los imaginarios; a dicho plano se le denomina plano de Gauss.

Sea $z=(x; y); x > 0;\ y > 0$



Donde $\overline{OP}$ es el radio vector del complejo $z=(x; y)$.

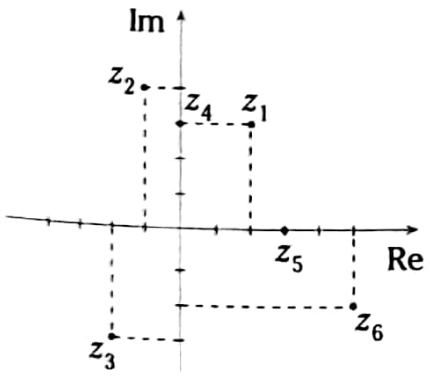
Ejemplo

Represente en el plano complejo los siguientes pares ordenados:

- $z_1=(2; 3)$
- $z_2=(-1; 4)$
- $z_3=(-2; -3)$
- $z_4=(0; 3)$
- $z_5=(3; 0)$
- $z_6=(5; -2)$

Resolución

Graficando en un mismo plano



Definición

El conjunto $\mathbb{C}$, las operaciones de adición y multiplicación definidas anteriormente y las propiedades a mencionar forman el cuerpo de los números complejos.

Propiedades

$\forall z_1;\ z_2;\ z_3 \in \mathbb{C}$

A_1: $z_1+z_2 \in \mathbb{C}$ (Ley de clausura o cerradura para la adición).

A_2: $z_1+z_2=z_2+z_1$ (Ley conmutativa para la adición).

A_3: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ (Ley asociativa para la adición).

A_4: Existe un único ($\exists!$) elemento z_0 de la forma $(0; 0)$ tal que $z+z_0=z$, $\forall$ complejo z (existencia del elemento neutro aditivo).

A_5: Existe un único elemento $-z \in \mathbb{C}\ /\ z+(-z)=z_0=(0;\ 0)$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$ (existencia del elemento inverso aditivo).

M_1: $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$ (Ley de clausura o cerradura para la multiplicación).

M_2: $z_1 z_2=z_2 z_1$ (Ley conmutativa para la multiplicación).

M_3: $(z_1 z_2)z_3=z_1(z_2 z_3)$ (Ley asociativa para la multiplicación).

M_4: Existe un único ($\exists!$) $z' \in \mathbb{C}$ de la forma $z'=(1; 0)$ tal que $z \cdot z'=z$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$ (existencia del elemento neutro multiplicativo).

M_5: Existe un único elemento $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot z^{-1}=z^{-1} \cdot z=(1; 0)$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$ y $z \neq (0; 0)$ (existencia del elemento inverso multiplicativo).

D: $z_1(z_2+z_3)=z_1 z_2+z_1 z_3$ (Ley distributiva).

La demostración de estas propiedades se hace sobre la base de los axiomas de los números reales (ver capítulo de números reales). Demostraremos únicamente A_3 y M_2, las demás quedan como ejercicio de rutina para el lector.

Demostración de A_3

Sean

$$z_1=(x_1; y_1),\ z_2=(x_2; y_2),\ z_3=(x_3; y_3)$$

tales que

$$\{x_1; x_2; x_3; y_1; y_2; y_3\} \subset \mathbb{R}$$

Entonces

$$(z_1+z_2)+z_3=(x_1+x_2; y_1+y_2)+(x_3; y_3)$$
$$=(x_1+x_2+x_3; y_1+y_2+y_3)$$

También

$$z_1+(z_2+z_3)=(x_1; y_1)+(x_2+x_3; y_2+y_3)$$
$$=(x_1+x_2+x_3; y_1+y_2+y_3)$$

Se observa

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$$

Demostración de M_2

Sean

$$z_1=(x_1; y_1),\ z_2=(x_2; y_2),\ \{x_1; y_1; x_2; y_2\} \subset \mathbb{R}$$

Entonces

$$z_1z_2=(x_1; y_1)(x_2; y_2)=(x_1x_2-y_1y_2; x_1y_2+y_1x_2)$$

También

$$z_2z_1=(x_2; y_2)(x_1; y_1)$$
$$\rightarrow\ z_2z_1=(x_2x_1-y_2y_1; x_2y_1+y_2x_1)$$
$$\rightarrow\ z_2z_1=(x_1x_2-y_1y_2; x_1y_2+y_1x_2)$$

(propiedad conmutativa de números reales)

$$\therefore\ z_2z_1=z_1z_2$$

▸ SISTEMA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

El sistema de los números complejos representa una ampliación del sistema de los números reales, bajo ciertas condiciones; con este fin, veamos los puntos situados en el eje de abscisas, o sea los puntos de la forma $(a; 0)$, poniendo en correspondencia al punto $(a; 0)$ el número real a. De este modo, obtenemos evidentemente una correspondencia biunívoca entre el conjunto considerado de puntos y el conjunto de todos los números reales. Como aplicación de las operaciones definidas en $\mathbb{C}$ tenemos:

$$(a; 0)+(b; 0)=(a+b; 0)$$
$$(a; 0)(b; 0)=(ab; 0)$$

Observamos que los puntos $(a; 0)$ y $(b; 0)$ se multiplican entre sí igual que los números reales correspondientes; por lo tanto, dichos números no se diferencian en nada por sus propiedades algebraicas de los números reales representados ordinariamente por puntos de una recta.

$$(a; 0) \equiv a \ \vee\ (a; 0)=a$$

Teorema

$$\forall\, r \in \mathbb{R};\ z=(x; y)$$
$$\{x; y\} \subset \mathbb{R}, \text{ se cumple } rz=(rx; ry)$$

Demostración

$$rz=r(x; y)$$
$$=(r; 0)(x; y)$$

Efectuando la multiplicación

$$rz=(rx-0y; 0x+ry)=(rx; ry)$$
$$\therefore\ rz=(rx; ry)$$

- Si $r \in \mathbb{R}$ multiplica a un complejo z, multiplicará a cada uno de sus componentes.

Ejemplo

Al par $(12; 0)$ le corresponde el número real 12, es decir, $(12; 0)=12$.

Análogamente citamos algunos ejemplos:

- $(4; 0)=4$
- $(a+b; 0)=a+b$
- $(1; 0)=1$ (unidad real)

CANTIDADES IMAGINARIAS

Son aquellos números que resultan de extraer una raíz de índice par a un número real negativo. Así por ejemplo

$\sqrt{-1}$; $\sqrt{-12}$; $\sqrt[4]{-5}$; $\sqrt[2n]{-16}$, donde $n \in \mathbb{N}$.

De todos estos el más importante es $\sqrt{-1}$, al cual denominaremos unidad imaginaria, cuya notación universal es

$$\boxed{i=\sqrt{-1}}$$

Aplicación

$$\sqrt{-16}=\sqrt{16(-1)}=\sqrt{16}\sqrt{-1}=4i$$

$$\sqrt{-5}=\sqrt{5(-1)}=\sqrt{5}\sqrt{-1}=\sqrt{5}i$$

UNIDAD IMAGINARIA

El número complejo (0; 1) es la unidad imaginaria, y tiene la particular notación $i=(0;\ 1)$.

Teorema

$i^2=-1;\ i=(0;\ 1)$

Demostración

$i^2=(0;1)(0;1)=(0-1;0+0) \rightarrow i^2=(-1;0)=-1$

$\therefore\ i^2=-1$

Teorema

$\forall\, y \in \mathbb{R}\ \ (0;y)=yi$

Demostración

$yi=(y;0)(0;1)$

$=(0-0;y+0)=(0;y)$

$\therefore\ (0;y)=yi$

Potencias enteras de la unidad imaginaria

Estudiaremos el comportamiento del número i^n; $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, teniendo en cuenta la siguiente definición:

$$\boxed{i^0=1;\ i^1=i}$$

$i^1=i$

$i^2=-1$

$i^3=i^2\cdot i=-i$

$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$

$i^5=i^4\cdot i=i$

$i^6=i^4\cdot i^2=-1$

$i^7=i^4\cdot i^3=-i$

$i^8=i^4\cdot i^4=1$

$i^9=i^8\cdot i=i$

$i^{10}=i^8\cdot i^2=-1$

$i^{11}=i^8\cdot i^3=-i$

$i^{12}=i^8\cdot i^4=1$

$\vdots$

Se observa que las potencias enteras de i se repiten cada cuatro veces y solo toman uno de los cuatro valores i; -1; $-i$; 1. Esto merece una especial atención.

Propiedades

Se observa principalmente que

$i^4=1;\ i^8=1;\ i^{12}=1$, etcétera.

Esto implica que la unidad imaginaria elevada a un múltiplo de cuatro es igual a la unidad.

Por lo tanto

$$i^{\overset{\circ}{4}}=1$$

En general $\boxed{i^{\pm\overset{\circ}{4}}=1}$

Luego deducimos que

$$i^{\overset{\circ}{4}+1}=i;\ i^{\overset{\circ}{4}+2}=-1;\ i^{\overset{\circ}{4}+3}=-i$$

Generalizando

$$i^{\overset{\circ}{4}+k}=i^k;\ \forall\, k\in\mathbf{Z}$$

Ejemplos

a. $i^{22}=i^{\overset{\circ}{4}+2}=i^2=-1$

b. $i^{43}=i^{\overset{\circ}{4}+3}=i^3=-i$

c. $i^{81}=i^{\overset{\circ}{4}+1}=i^1=i$

Luego se deduce

$$i^{-(\overset{\circ}{4}-k)}=i^k;\ \forall\, k\in\mathbf{Z}$$

Teorema

$$i^{-k}=(-1)^k i^k;\ \forall\, k\in\mathbf{Z}$$

Ejemplos

1. Calcule

   a. i^{57} b. i^{78} c. i^{91}

   Resolución

   a. Como $57=\overset{\circ}{4}+1$

   $\rightarrow\ i^{57}=i^{\overset{\circ}{4}+1}=i^1=i$

   b. $78=\overset{\circ}{4}+2$

   $\rightarrow\ i^{78}=i^{\overset{\circ}{4}+2}=i^2=-1$

   c. $91=\overset{\circ}{4}+3$

   $\rightarrow\ i^{91}=i^{\overset{\circ}{4}+3}=i^3=-i$

2. Calcule

   a. i^{472} b. i^{995} c. i^{877}

   Resolución

   Recuerde que $\overline{abcde}$ es múltiplo de 4 si $\overline{de}$ es múltiplo de 4

   $\rightarrow\ i^{\overline{abcde}}=i^{\overline{de}}$.

   a. Para averiguar si 472 es múltiplo de 4, bastará con que 72 sea múltiplo de 4.

   Como $72=\overset{\circ}{4}$

   $\rightarrow\ i^{472}=i^{\overset{\circ}{4}}=1$

   b. $i^{995}=i^{95}=i^{\overset{\circ}{4}+3}=i^3=-i$

   c. $i^{877}=i^{77}=i^{\overset{\circ}{4}+1}=i^1=i$

3. Calcule $i^{4683}+i^{-527}$.

   Resolución

   Se observa que

   $4683=\overset{\circ}{4}+3\ \wedge\ -527=-(\overset{\circ}{4}-1)=\overset{\circ}{4}+1$

   $\rightarrow\ i^{4683}+i^{-527}=i^{\overset{\circ}{4}+3}+i^{\overset{\circ}{4}+1}=-i+i=0$

4. Reduzca $S=i^{-48}+i^{-17}+i^9$.

   Resolución

   Calculamos cada una de las potencias

   $i^{-48}=(-1)^{48}i^{48}=1$

   $i^{-17}=(-1)^{17}i^{17}=-i$

   $i^9=i^{\overset{\circ}{4}+1}=i^1=i$

   Luego

   $S=1-i+i$

   $\therefore\ S=1$

Propiedades

I. $i+i^2+i^3+i^4=0$

II. $i^{4k}+i^{4k+1}+i^{4k+2}+i^{4k+3}=0;\ \forall\, k\in\mathbf{Z}$

III. $i^k+i^{k+1}+i^{k+2}+i^{k+3}=0;\ \forall\, k\in\mathbf{Z}$

Nota

(Por propiedades aritméticas)

1. $2^n=\overset{\circ}{4};\ \forall\, n\in\mathbb{N};\ n\geq 2$
2. $(\overset{\circ}{4}+r)^n=\overset{\circ}{4}+r^n;\ \forall\, n\in\mathbf{N}\ \wedge\ \forall\, r\in\mathbf{Z}$

Ejemplos

1. Calcule $i^{2^{2^{2^2}}}$.

Resolución

$$i^{2^{2^{2^2}}}=i^{\overset{\circ}{4}}=1$$

2. Halle el valor de $z_1=i^{5^{5^{5^5}}}$.

Resolución

Se observa que

$$5^{5^{5^5}}=(\overset{\circ}{4}+1)^{5^{5^5}}=\overset{\circ}{4}+1 \rightarrow z_1=i^{\overset{\circ}{4}+1}=i$$

3. Determine $z_2=i^{3^{3^{3^3}}}$.

Resolución

$$3^{3^{3^3}}=(\overset{\circ}{4}-1)^{3^{3^3}}=\overset{\circ}{4}-1=\overset{\circ}{4}+3$$

$$\rightarrow z_2=i^{\overset{\circ}{4}+3}=-i$$

4. Simplifique

$W=i^{2!}+i^{3!}+i^{4!}+...+i^{120!}$

Resolución

Como

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ ...n$$

$$\forall n\in \mathbb{Z}^+;\ \ n\geq 2$$

entonces

$$n!=\overset{\circ}{4};\quad \forall n\geq 4$$

El factorial de n siempre es múltiplo de cuatro; $\forall\, n\geq 4$.

Entonces

$$W=\underbrace{i^2+i^6}_{-2}+\underbrace{i^{\overset{\circ}{4}}+i^{\overset{\circ}{4}}+...+i^{\overset{\circ}{4}}}_{117}$$

$$W=-2+117=115$$

$$\therefore\ W=115$$

▸ FORMA CARTESIANA O BINÓMICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Teorema

Todo número complejo z de la forma $z=(x;\,y)$ puede escribirse como $z=x+yi$.

Demostración

Sea

$z=(x;\,y),\ x;\,y\in\mathbb{R}$

Pero

$z=(x;\,y)=(x;\,0)+(0;\,y)$

Por definición: $(x;\,0)=x$

Por teorema: $(0;\,y)=yi$

$\therefore\ \ z=(x;\,y)=x+yi$

Ejemplos

1. Represente en forma binómica o cartesiana cada uno de los siguientes números complejos dados por sus componentes.

$$z_1=(4;\,5)=4+5i$$

$$z_2=\left(\frac{1}{3};\ -\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{3}-\frac{5}{2}i$$

$$z_3=\left(\sqrt{3};\ -6\right)=\sqrt{3}-6i$$

$$z_4=(0;\,-5)=-5i$$

2. Si $z_1=3-(7-m^2)i$ y $z_2=n+2i$, ¿cuál es el mayor valor de $n-2m$, si $z_1=z_2$?

Resolución

De la igualdad de números complejos

$$z_1=z_2\ \leftrightarrow\ 3=n\ \wedge\ -(7-m^2)=2$$

$$\wedge\ m^2=9 \begin{cases} m=3 \\ m=-3 \end{cases}$$

Luego

$$n-2m=3-2(3)=-3\vee n-2m=3-2(-3)=9$$

$$\therefore\ (n-2m)_{\text{mayor}}=9$$

TIPOS DE NÚMEROS COMPLEJOS

Luego de algunas definiciones necesarias tenemos los siguientes tipos de complejos:

Complejo real o puramente real

Es aquel número complejo que carece de la parte imaginaria, es decir, su parte imaginaria es cero.

$$z=(x;\ 0)=x;\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

$z=(-2;\ 0)=-2$

Complejo imaginario puro

Es aquel número complejo que carece de la parte real, es decir, su parte real es cero. Además, su parte imaginaria siempre es diferente de cero.

$$z=(0;\ y)=yi;\ \forall\, y \in \mathbb{R}-\{0\}$$

Ejemplo

$z=(0;\ 5)=5i$

Complejo nulo

Es aquel número complejo que presenta la parte real e imaginaria igual al número cero, es decir, las dos componentes son nulas.

$$z=(0;\ 0)$$

CONJUGADO Y OPUESTO DE UN COMPLEJO

I. Dado el complejo $z=(x;\ y)=x+yi$, se define el conjugado de z denotado $\bar{z}$, tal que

$$\bar{z}=(x;\ -y)=x-yi$$

II. Dado el complejo $z=(x;\ y)=x+yi$, se define el opuesto de z denotado por z^*, tal que

$$z^*=(-x;\ -y)=-x-yi$$

Ejemplos

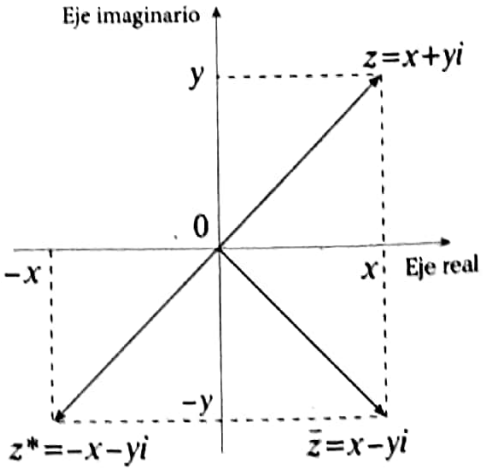
1. Sea $z=(4;\ -5)$

$$\rightarrow \begin{cases} \bar{z}=(4;\ 5) \\ z^*=(-4;\ 5) \end{cases}$$

2. Sea $w=10+12i$

$$\rightarrow \begin{cases} \bar{w}=10-12i \\ w^*=-10-12i \end{cases}$$

Representación geométrica de $z=(x;\ y)$, de su conjugado y su opuesto.



Observación

Al unir los afijos de los complejos z; z^*; $\bar{z}$ tal que $z=x+yi$, con $xy\neq 0$, estos forman siempre un triángulo rectángulo.

Propiedades

Dados $z; z_1; z_2 \in \mathbb{C}$

1. $z=\bar{z} \leftrightarrow z$ es complejo real
2. $\bar{\bar{z}}=z$
3. $\bar{z}=-z=z^* \leftrightarrow z$ es complejo imaginario puro
4. $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)$
5. $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im}(z)$
6. $\overline{z_1 \pm z_2}=\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
7. $\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1 \bar{z}_2$
8. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$; $\forall\ z_2 \neq (0;\ 0)$
9. $\overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$; $\forall\ n \in \mathbb{N}$
10. $\overline{(\sqrt[n]{z})}=\sqrt[n]{\bar{z}}$; $\forall\ n \in \mathbb{N}$

OPERACIONES EN LA FORMA BINÓMICA O CARTESIANA

Sean los números $z_1=a+bi \wedge z_2=c+di$; se definen las siguientes operaciones:

Adición de números complejos

Dados los números complejos z_1, z_2

se tiene $z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)$

$$\therefore \boxed{z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i}$$

Ejemplo

Sean $z_1=3+6i \wedge z_2=-4+7i$

$\rightarrow z_1+z_2=(3-4)+(6+7)i$

$\therefore z_1+z_2=-1+13i$

Sustracción de números complejos

Dados los complejos z_1, z_2 entonces

$$\boxed{z_1-z_2=z_1+(-z_2)}$$

Ejemplo

Sean $z_1=6+2i \wedge z_2=-3+7i$

$\rightarrow z_1-z_2=z_1+(-z_2)=(6+2i)+(3-7i)=9-5i$

$\therefore z_1-z_2=9-5i$

Multiplicación de números complejos

Dados los números complejos z_1, z_2,

se tiene $z_1 z_2=(a+bi)(c+di)$

$$=(ac+adi+bci+bdi^2)$$

$$=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

$$\therefore \boxed{z_1 z_2=(ac-bd)+(bc+ad)i}$$

Nota

Si recordamos la definición rigurosa de la multiplicación de dos complejos como par ordenado, tenemos:

$z_1 z_2=(a;\ b)(c;\ d)=(ac-bd;\ ad+bc)$

Ahora lo expresamos en forma binómica

$z_1 z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$

Es decir, llegamos al mismo resultado; por lo tanto, la definición es buena.

Ejemplos

1. Sean $z_1=3+2i \wedge z_2=2-5i$

   $\rightarrow z_1 z_2=(3+2i)(2-5i)=6-15i+4i+10$

   Luego $z_1 z_2=16-11i$

2. Realice las operaciones indicadas y halle $z=(1+i)(1+3i)(3-i)$.

Resolución

Como la multiplicación de números complejos tiene la propiedad asociativa no interesa el orden en que se empiecen a multiplicar los factores.

Luego se tiene

$$z=(1+i)\underbrace{(1+3i)(3-i)}$$

$$z=(1+i)(3-i+9i-3i^2)=\underbrace{(1+i)(6+8i)}$$

$$z=6+8i+6i+8i^2$$

$$\therefore\ z=-2+14i$$

División de números complejos

Sean los números complejos z_1, z_2. Para efectuar la división $\frac{z_1}{z_2}$ habrá que multiplicar a z_1 y z_2 por $\bar{z}_2$. Así:

Sean $z_1=a+bi\ \wedge\ z_2=c+di\ \wedge\ \bar{z}_2=c-di$

Luego

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$\rightarrow\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i}$$

Ejemplos

1. Sean $z_1=4+3i\ \wedge\ z_2=3-2i$.
   ¿Cuál es la parte real de $z_1\div z_2$?

   Resolución

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4+3i}{3-2i}$$

Multiplicando tanto a z_1 y z_2 por el conjugado de z_2, se tiene

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4+3i}{3-2i}\cdot\frac{3+2i}{3+2i}=\frac{4\cdot3+4\cdot2i+3i\cdot3+3i\cdot2i}{3^2-(2i)^2}$$

$$\rightarrow\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{12+8i+9i+6i^2}{9-4i^2}=\frac{12+17i-6}{9-(-4)}=\frac{6+17i}{13}$$

$$\rightarrow\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{6}{13}+\frac{17}{13}i$$

$$\therefore\ \mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{6}{13}$$

2. Halle el complejo z.

$$z=\left[\frac{5+3i}{2-i}\right]\left[\frac{2+i}{5-3i}\right].$$

   Resolución

   En este caso podemos ordenar en forma conveniente, entonces

$$z=\left(\frac{5+3i}{5-3i}\right)\left(\frac{2+i}{2-i}\right)$$

$$=\left(\frac{(5+3i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)}\right)\left(\frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\right)$$

$$=\left(\frac{16+30i}{34}\right)\left(\frac{3+4i}{5}\right)$$

$$=\left(\frac{8+15i}{17}\right)\left(\frac{3+4i}{5}\right)=\frac{-36+77i}{85}$$

$$\therefore\ z=-\frac{36}{85}+\frac{77}{85}i$$

3. Efectúe $W=\frac{i}{(1-3i)(i-3)}$.

   Resolución

   Efectuando en el denominador, tenemos

$$W=\frac{i}{i-3-3i^2+9i}=\frac{i}{10i}=\frac{1}{10}$$

$$\therefore\ W=\frac{1}{10}$$

Potenciación

La potenciación en forma binómica tiene muchas limitaciones, por ello se utiliza cuando las potencias son pequeñas.

Ejemplos

1. Efectúe
   a. $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$
   b. $(1+i)^4=[(1+i)^2]^2=(2i)^2=-4$
   c. $(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$
   d. $(1-i)^4=[(1-i)^2]^2=(-2i)^2=-4$

Observación

$(1+i)^4=(1-i)^4=-4$

2. Calcule la parte real de W.

$$W=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^9$$

Resolución

Efectuando por separado

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i;$$

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-\frac{2i}{2}=-i$$

Reemplazando tenemos

$$W=(i)^5+(-i)^9=i-i=0$$

$\rightarrow W=0 \rightarrow \operatorname{Re}(W)=0$

3. Calcule el complejo

$$z=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{360}.$$

Resolución

Podemos escribir $z=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]^{360}$

$$\rightarrow z=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{360}\cdot(1-i)^{360}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{360}\cdot\left[(1-i)^2\right]^{180}$$

$$\rightarrow z=\frac{1}{2^{180}}\cdot(-2i)^{180}=\frac{1}{\cancel{2^{180}}}\cdot\cancel{2^{180}}\cdot(-i)^{180}$$

$$\rightarrow z=(-i)^{180}=i^{180}=i^{\overset{0}{4}}=1$$

Resultados importantes

$(1+i)^2=2i$; $(1-i)^2=-2i$

$(1+i)^3=2i(1+i)$; $(1-i)^3=-2i(1-i)$

$(1+i)^4=-4$; $(1-i)^4=-4$

$\boxed{\frac{1+i}{1-i}=i}$; $\boxed{\frac{1-i}{1+i}=-i}$

Radicación en $\mathbb{C}$

En la forma binómica, solo estudiaremos la raíz cuadrada; en la forma general, la estudiaremos más adelante.

Definición

La raíz cuadrada de un número complejo z es un número complejo w tal que $w^2=z$.

Sobre la base de la raíz cuadrada de números reales positivos, probaremos que la raíz cuadrada de un número complejo siempre existe.

Teorema

Dado $z\in\mathbb{C}$; $\exists\, w\in\mathbb{C}$, tal que $w^2=z$.
Es decir, w es la raíz cuadrada de z.

Demostración

Dado $z=x+yi$; $z\neq 0$ debemos hallar $w=a+bi$, tal que $w^2=z$.

Esta última condición plantea la igualdad $(a+bi)^2=x+yi$.

Efectuando y ordenando el primer miembro: $a^2-b^2+2abi=x+yi$

Igualando las partes reales e imaginarias se tiene el sistema $\begin{cases} a^2-b^2=x \\ 2ab=y \end{cases}$

Reemplazando $b=\dfrac{y}{2a}$ en la primera ecuación:

$$a^2-\frac{y^2}{4a^2}=x.$$

Lo que se convierte en $4a^4-4xa^2-y^2=0$

Resolviendo para a^2 se tiene:

$$a^2=\frac{x\pm\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

Pero $a^2\geq 0$, entonces se debe tomar

$$a^2=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2} \qquad \text{(I)}$$

En forma análoga se obtiene

$$b^2=\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2} \qquad \text{(II)}$$

Buscamos los valores de a y b

$$a=\pm\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}} \wedge b=\pm\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}$$

Pero $2ab=y$, entonces se tendrá lo siguiente:

Si $y>0 \rightarrow a\wedge b$ tienen el mismo signo.

Si $y<0 \rightarrow a\wedge b$ tienen signos diferentes.

Por lo tanto

$$\boxed{w=\pm\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}+(*)\sqrt{\frac{-x\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\,i\right)}$$

donde (*) es el signo de y.

Ejemplos

1. Halle la raíz cuadrada de $z=6-8i$.

Resolución

Aplicando la fórmula anterior

$$\sqrt{z}=\sqrt{6-8i}=\pm\left(\sqrt{\frac{6+\sqrt{6^2+8^2}}{2}}-\sqrt{\frac{-6+\sqrt{6^2+8^2}}{2}}\,i\right)$$

$$\rightarrow \sqrt{6-8i}=\pm\left(2\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)=\pm\sqrt{2}(2-i)$$

$$\therefore \sqrt{6-8i}=\pm\sqrt{2}(2-i)$$

Otro método

> **Recuerde**
>
> $$\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}=\pm\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)$$

$$\sqrt{z}=\sqrt{6-8i}=\sqrt{2}\left(\sqrt{3-4i}\right)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\underbrace{3}_{4+(-1)}-2\sqrt{\underbrace{-4}_{4(-1)}}}$$

$$\rightarrow \sqrt{z}=\sqrt{2}\left\{\pm\left(\sqrt{4}-\sqrt{-1}\right)\right\}=\pm\sqrt{2}(2-i)$$

2. Calcule $\sqrt{5+12i}$.

Resolución

Sea $x+yi$ la raíz cuadrada que se busca

$$\sqrt{5+12i}=x+yi;\ x,\ y\in\mathbb{R}$$

Elevando al cuadrado

$$5+12i=x^2+(yi)^2+2xyi$$

$$\rightarrow\ 5+12i=x^2-y^2+2xyi$$

Por igualdad de números complejos:

$$\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ 2xy=12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=5 \\ xy=6 \end{cases}$$

De donde se tiene

$$x=3;\ y=2 \ \rightarrow\ x+yi=3+2i$$

$$\vee$$

$$x=-3;\ y=-2 \ \rightarrow\ x+y=-3-2i$$

$$\therefore\ \sqrt{5+12i}=\pm(3+2i)$$

Otro método

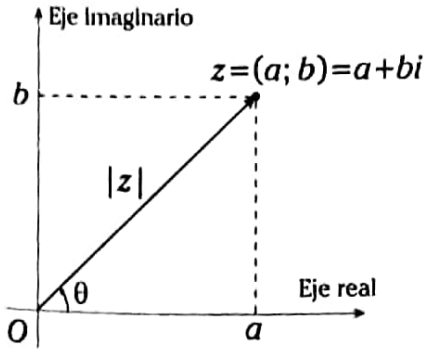
(Transformación de radicales dobles a simples)

$$\sqrt{5+12i}=\sqrt{\underbrace{5}_{9+(-4)}+2\underbrace{\sqrt{-36}}_{9(-4)}}$$

$$\rightarrow\ \sqrt{5+12i}=\pm\left(\sqrt{9}+\sqrt{-4}\right)=\pm(3+2i)\ \pm(3+2i)$$

MÓDULO O VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Dado $z=a+bi$, el módulo o valor absoluto de z es un número real no negativo denotado por $|z|$, tal que $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.



Geométricamente, el módulo de z nos representa la magnitud del radio vector $\overrightarrow{oz}$, es decir, la distancia del polo (0; 0) al afijo $(a; b)$.

Ejemplo

Halle los módulos de los siguientes complejos

a. $z_1=5+4i$

b. $z_2=1-i$

c. $z_3=-5$

d. $z_4=-6i$

e. $z_5=-3-4i$

Resolución

a. $|z_1|=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$

b. $|z_2|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

c. $|z_3|=\sqrt{(-5)^2+0^2}=5$

d. $|z_4|=\sqrt{0^2+(-6)^2}=6$

e. $|z_5|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$

▸▸ Nota

$\forall a; b \in \mathbb{R}$

$z=a \ \rightarrow\ |z|=|a|$

$z=bi \ \rightarrow\ |z|=|b|$

Propiedades

De la definición de módulo se desprenden las siguientes propiedades: sean $z; z_1; z_2 \in \mathbb{C}$, entonces

1. $|z|\geq 0;\ |z|=0 \ \leftrightarrow\ z=(0;0)$
2. $|z|=|\bar{z}|=|z^*|$
3. $|z|^2=z\cdot\bar{z}$
4. $|\mathrm{Re}(z)|\leq|z|;\ |\mathrm{Im}(z)|\leq|z|$
5. $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$
6. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|};\ \forall z_2\neq(0;0)$

7. $|z^n|=|z|^n;\ \forall\, n\in\mathbb{N}$
8. $|\sqrt[n]{z}|=\sqrt[n]{|z|};\ \ \forall n\in\mathbb{N};\ n\geq 2$
9. $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$
10. $||z_1|-|z_2||\leq|z_1-z_2|$

Demostraremos algunas de las propiedades.

Propiedad N.° 5

$$|z_1z_2|^2=(z_1z_2)(\overline{z_1z_2})$$

$$\rightarrow\ |z_1z_2|^2=(z_1\bar{z}_1)(z_2\cdot\bar{z}_2)=|z_1|^2|z_2|^2$$

Quitando exponentes se tiene

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$$

Propiedad N.° 7

$$z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot z\ldots z}_{n\text{ veces}}$$

Tomando módulo

$$|z^n|\ =\ |z\cdot z\cdot z\ldots z|$$

y usando la propiedad N.° 5

$$|z^n|=|z|\ |z|\ |z|\ldots|z|;\ n\text{ veces}$$

$$\therefore\ \ |z^n|=|z|^n$$

Propiedad N.° 9

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$

$$\rightarrow\ |z_1+z_2|^2=|z_1|^2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+|z_2|^2$$

Pero

$$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\ \wedge\ \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\leq|z_1+\bar{z}_2|$$

Entonces

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2\leq$$

$$|z_1|^2+2|z_1||\bar{z}_2|+|z_2|^2=(|z_1|+|z_2|)^2\ .$$

Luego

$$|z_1+z_2|^2\leq(|z_1|+|z_2|)^2$$

Quitando exponentes se tiene

$$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$$

Ejemplos

1. Sea $z=\dfrac{(3+2i)(4-i)}{(3+4i)}$.

   Calcule el módulo de z.

   Resolución

   Utilizando las propiedades

$$|z|=\frac{|3+2i||4-i|}{|3+4i|}=\frac{\sqrt{3^2+2^2}\cdot\sqrt{4^2+1^2}}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$\rightarrow\ |z|=\frac{\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{221}}{5}$$

$$\therefore\ \ |z|=\frac{\sqrt{221}}{5}$$

2. Sea $z=\dfrac{(5+7i)^{10}}{(7+5i)^8}$.

   ¿Cuál es el módulo de z?

   Resolución

   Utilizando las propiedades de módulo

$$|z|=\frac{|5+7i|^{10}}{|7-5i|^8},$$

se observa que $|5+7i|=|7-5i|=\sqrt{7^2+5^2}$.

Luego

$$|z|=\frac{\sqrt{7^2+5^2}^{10}}{\sqrt{7^2+5^2}^{8}}=\sqrt{7^2+5^2}^{\,2}=49+25$$

$$\therefore\ \ |z|=74$$

3. Sea $w=\sqrt{7-i}$. Señale su módulo.

Resolución

Por propiedad

$$|w|=\sqrt{|7-i|}=\sqrt{\sqrt{7^2+1^2}}=\sqrt[4]{50}$$

$$\therefore\ |w|=\sqrt[4]{50}$$

4. Sea $z=\dfrac{\sqrt{3-4i}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^7}$, indique su módulo.

Resolución

Utilizando las propiedades de módulo

$$|z|=\frac{|\sqrt{3-4i}|}{\left|\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^7\right|}$$

- $|\sqrt{3-4i}|=\sqrt{|3-4i|}=\sqrt{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{\sqrt{25}}=\sqrt{5}$
- $\left|\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^7\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|^7=\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)^7$

$$=\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\right)^7=\sqrt{1}^7=1$$

Luego $|z|=\dfrac{\sqrt{5}}{1}=\sqrt{5}$.

5. Sean z, w números complejos tales que

$|z-1|=3;\ |w+1|=2.$

Calcule el mayor valor de $|z+w|$.

Resolución

$$|z+w|=|(z-1)+(w+1)|$$

Utilizando la desigualdad triangular

$$|z+w|\le|z-1|+|w+1|=3+2=5$$

Luego $|z+w|\le 5$

$\therefore\ |z+w|_{\text{máximo}}=5$

6. Sean dos números complejos z, w tales que

$|z|=2;\ |w|=3$ y $z\overline{w}+\overline{z}w=4$

Calcule $|z+w|$.

Resolución

Sabemos que

$$|k|^2=k\cdot\overline{k};\ \forall\, k\in\mathbb{C}$$

En el problema

$$|z+w|^2=(z+w)(\overline{z+w})$$

$$\rightarrow\ |z+w|^2=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})$$

$$\rightarrow\ |z+w|^2=z\cdot\overline{z}+z\cdot\overline{w}+w\cdot\overline{z}+w\cdot\overline{w}$$

$$\rightarrow\ |z+w|^2=|z|^2+\underbrace{z\overline{w}+w\overline{z}}+|w|^2$$

Luego, usando los datos

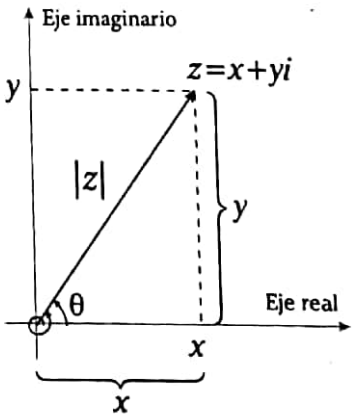
$$|z+w|^2=2^2+3^2+4=4+9+4=17$$

$$\therefore\ |z+w|=\sqrt{17}$$

▸ FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea $z=a+bi$ un número complejo diferente del complejo nulo.

Entonces $|z|\neq 0$



Del gráfico: $x=|z|\cos\theta$; $y=|z|\operatorname{sen}\theta$

Donde $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

Entonces $z=x+yi=|z|\cos\theta+|z|\operatorname{sen}\theta i$

Por lo tanto

$$\boxed{z=|z|(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)}$$

Esta es la representación trigonométrica o polar del complejo z, donde al ángulo θ se le denomina el argumento de z denotado por $\operatorname{Arg}(z)$; es decir,

$$\boxed{\operatorname{Arg}(z)=\theta}$$

Se recomienda expresar θ en radianes.

Se observa que θ puede tomar infinitos valores como

$$\theta_1=\theta;\ \theta_2=\theta+2\pi;\ \theta_3=\theta+4\pi$$

Para evitar este problema definimos el argumento principal de un número complejo.

De todos los valores de θ elegimos aquel que se encuentra en el intervalo $[0; 2\pi\rangle$; es decir, $0\leq\theta<2\pi$. A dicho θ se le denomina **argumento principal**, cuya notación es

$$\boxed{\operatorname{Arg}(z)=\theta}$$

Conociendo el argumento principal de z denotado por $\operatorname{Arg}(z)$, podemos generar otros cuya notación es

$$\boxed{\arg(z)=\operatorname{Arg}(z)+2K\pi}$$

$K=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \ldots$

Nota

1. Al argumento de z, $\operatorname{Arg}(z)$, también se le denomina amplitud.
2. El argumento es el ángulo generado por el radio vector al girar en sentido antihorario desde el eje real positivo hacia un punto cualquiera del radio vector.
3. Se denomina $\operatorname{cis}\alpha$ a la abreviatura de $\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$.

Ejemplo

Halle el argumento principal, el módulo y exprese en su forma polar cada uno de los números complejos:

a. $z_1=\sqrt{2}+\sqrt{6}i$

b. $z_2=-2+2i$

c. $z_3=4-3i$

d. $z_4=-1-i$

e. $z_5=2+5i$

Resolución

Es recomendable tratarlo gráficamente

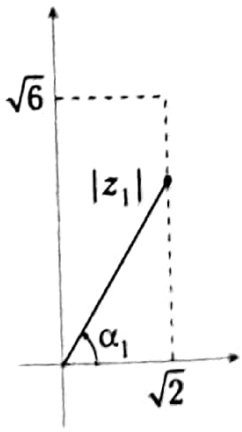
a. $z_1=\sqrt{2}+\sqrt{6}i$

- $|z_1|=\sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{6}^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
- $\tan\alpha_1=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}\ \rightarrow\ \alpha_1=\dfrac{\pi}{3}$

módulo $|z_1|=2\sqrt{2}$

argumento: $\alpha_1=\dfrac{\pi}{3}$

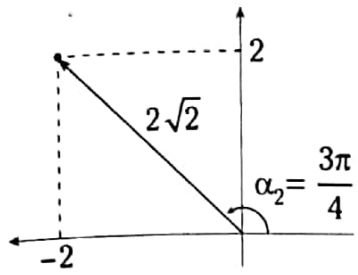
$$\therefore\ z_1=2\sqrt{2}\left\{\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right\}$$



b. $z_2=-2+2i$

Del gráfico: $|z_2|=2\sqrt{2}$ y $\alpha_2=\dfrac{3\pi}{4}$

$$\therefore\ z_2=2\sqrt{2}\left\{\cos\frac{3\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right\}$$



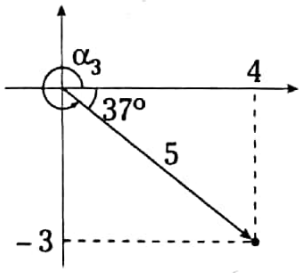
Nota

Para calcular el argumento principal de z, se debe observar en qué cuadrante se encuentra el afijo de z y luego calculamos dicho argumento a partir de $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

c. $z_3 = 4 - 3i$

- $|z_3| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
- $\alpha_3 + 37° = 360° \rightarrow \alpha_3 = 323°$

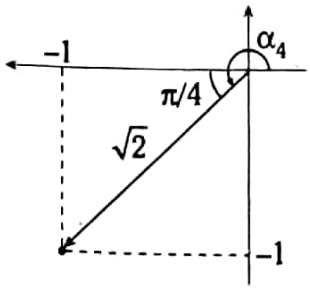
$\therefore\ z_3 = 5\text{cis}323°$



d. $z_4 = -1 - i$

- $|z_4| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\alpha_4 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$\therefore\ z_4 = \sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{5\pi}{4}$

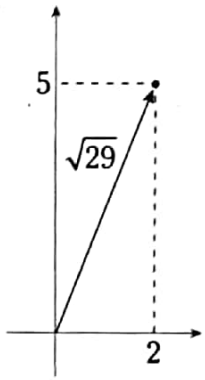


e. $z_5 = 2 + 5i$

- $|z_5| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$
- $\tan\alpha_5 = \frac{5}{2}$ (no es notable)

$\rightarrow\ \alpha_5 = \arctan\frac{5}{2}$

$\therefore\ z_5 = \sqrt{29}\text{cis}\left[\arctan\frac{5}{2}\right]$



Nota

También se puede definir el argumento principal en el intervalo $\langle -\pi; \pi]$, es decir, $-\pi < \theta \leq \pi$; por ello no debe ser extraño si lo consideramos en algunos problemas.

Teorema

Dados los números complejos no nulos

$z = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$

$w = |w|(\cos\alpha + i\text{sen}\alpha)$

se verifican

1. $zw = |z|\,|w|(\cos(\theta+\alpha) + i\text{sen}(\theta+\alpha))$
2. $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\theta-\alpha) + i\,\text{sen}(\theta-\alpha))$

Demostración

1. $zw=|z|\cdot|w|(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)$

$zw=|z|\,|w|\,[(\cos\theta\cos\alpha-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha)+i(\cos\theta\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\theta\cos\alpha)]$

$zw=|z|\,|w|\,[\cos(\theta+\alpha)+i\operatorname{sen}(\theta+\alpha)]$

2. $\dfrac{z}{w}=\dfrac{|z|}{|w|}\cdot\dfrac{\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}{\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha}$

$\dfrac{z}{w}=\dfrac{|z|}{|w|}\cdot\dfrac{(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)(\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha)}{(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha)}$

$\dfrac{z}{w}=\dfrac{|z|}{|w|}\left[\dfrac{(\cos\theta\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha\cos\theta)}{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}+\dfrac{i\operatorname{sen}\theta\cos\alpha-i^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}\right]$

$\dfrac{z}{w}=\dfrac{|z|}{|w|}[(\cos\theta\cos\alpha+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha)+i(\operatorname{sen}\theta\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cos\theta)]$

$\dfrac{z}{w}=\dfrac{|z|}{|w|}[\cos(\theta-\alpha)+i\operatorname{sen}(\theta-\alpha)]$

Conclusión

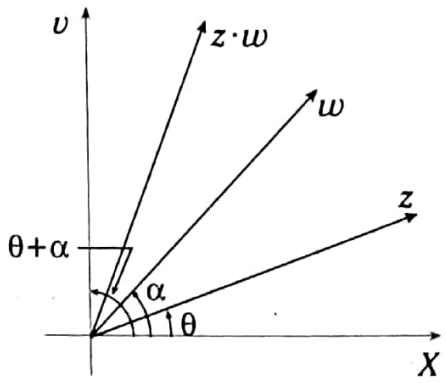
1. Para multiplicar complejos en la forma polar, se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

$$\arg(z\cdot w)=\arg(z)+\arg(w)$$

2. Para dividir complejos en la forma polar, se dividen los módulos y se restan los argumentos.

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right)=\arg(z)-\arg(w)$$

Gráficamente para (1)



Ejemplo

Dados $z=-3+\sqrt{3}i$; $w=1+i$,

halle $z\cdot w$; $\dfrac{z}{w}$ y represéntelos gráficamente.

Resolución

$$|z|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$\arg(z)=\frac{5\pi}{6}$$

Entonces

$$z=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\,\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$$

También

$$|w|=\sqrt{2}\ ;\ \arg(w)=\frac{\pi}{4}$$

Entonces

$$w=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Como nos piden el producto y el cociente de z; w, hallaremos los argumentos:

$$\arg(z\cdot w)=\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{13\pi}{12}$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right)=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$$

Luego

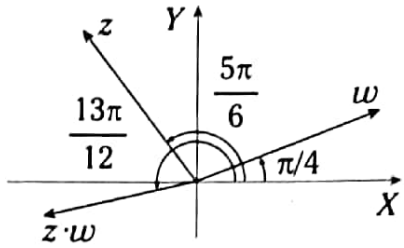
$$z\cdot w=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\,\text{sen}\frac{13\pi}{12}\right)$$

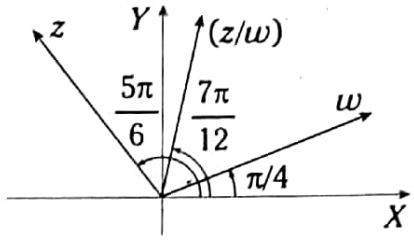
$$\rightarrow\ z\cdot w=2\sqrt{6}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\,\text{sen}\frac{13\pi}{12}\right)$$

$$\frac{z}{w}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\,\text{sen}\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\rightarrow\ \frac{z}{w}=\sqrt{6}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\,\text{sen}\frac{7\pi}{12}\right)$$

Graficando los argumentos de $z\cdot w$ y $\dfrac{z}{w}$





Teorema de De Moivre

Dados

$z=|z|(\cos\theta+i\,\text{sen}\theta)$;

$z\neq(0;0)\wedge n\in\mathbb{N}$

se tiene

$z^n=|z|^n(\cos n\theta+i\,\text{sen}\,n\theta)$

Corolario

$\arg(z^n)=n\arg(z);\ n\in\mathbb{Z}$

Ejemplos

1. Halle el argumento de $z=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^3}{2i}\cdot\dfrac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}+i)^2}$.

Resolución

$$\arg(z)=\arg\left(\frac{(1+\sqrt{3}i)^3}{2i}\right)+\arg\left(\frac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}+i)^2}\right)$$

$$\arg(z)=3\arg(1+\sqrt{3}i)-\arg(2i)+$$
$$+5\arg(1+i)-2\arg(\sqrt{3}+i)$$

$$\arg(z)=3\left(\frac{\pi}{3}\right)-\left(\frac{\pi}{2}\right)+5\left(\frac{\pi}{4}\right)-2\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{17\pi}{12}$$

$$\therefore\ \arg(z)=\frac{17\pi}{12}$$

2. Demuestre que
$\text{sen}2\theta=2\text{sen}\theta\cos\theta \wedge \cos2\theta=\cos^2\theta-\text{sen}^2\theta$.

Resolución

Sabemos que

$$(\cos\theta+i\text{sen}\theta)^2=\cos2\theta+i\text{sen}2\theta$$

(por Teorema de De Moivre)

Efectuando en el primer miembro

$$\underbrace{\cos^2\theta}-\text{sen}^2\theta+\underbrace{2\text{sen}\theta\cos\theta i}=\underbrace{\cos2\theta}+\underbrace{i\text{sen}2\theta}$$

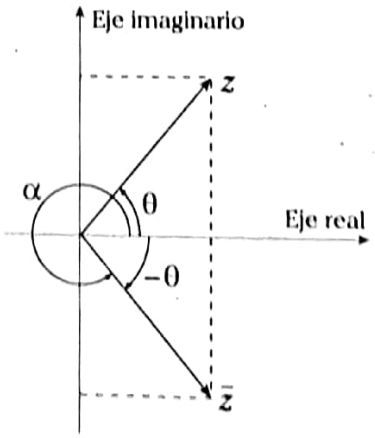
Igualando las partes real e imaginaria tenemos

$$\cos2\theta=\cos^2\theta-\text{sen}^2\theta$$
$$\text{sen}2\theta=2\text{sen}\theta\cos\theta$$

3. Sea $z=|z|(\cos\theta+i\text{sen}\theta)$.
Halle el argumento de su conjugada.

Resolución

Representando z geométricamente



Del gráfico: $\alpha=2\pi-\theta \rightarrow \arg(\bar{z})=2\pi-\theta$

También podemos considerar $(-\theta)$

Entonces $\arg(\bar{z})=-\theta$

4. Halle el complejo z.

$$z=(1+\sqrt{3}i)^{30}+(1-\sqrt{3}i)^{30}$$

Resolución

Como

$$1+\sqrt{3}i=2(\cos60°+i\,\text{sen}\,60°)$$
$$1-\sqrt{3}i=2(\cos(-60°)+i\,\text{sen}(-60°))$$
$$\rightarrow\ 1-\sqrt{3}i=2(\cos60°-i\text{sen}60°)$$

Luego

$$z=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)\right]^{30}+\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)\right]^{30}$$

$$z=\left[2^{30}\left(\cos30\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\,30\frac{\pi}{3}\right)\right]+$$
$$+\left[2^{30}\left(\cos30\frac{\pi}{3}-i\,\text{sen}\,30\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$z=2^{30}(\cos10\pi+i\text{sen}10\pi)+2^{30}(\cos10\pi-i\text{sen}10\pi)$$
$$z=2^{30}(2\cos10\pi)$$
$$z=2^{30}\cdot2^{1}\cdot\cos10\pi$$
$$\therefore\ z=2^{31}\cdot1=2^{31}$$

FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

Teorema de Euler

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\text{sen}\theta$$

Donde e es la base del logaritmo neperiano y θ es argumento en radianes; $i=(0;1)$

La demostración la realizaremos en el siguiente tomo, ya que aún no hemos desarrollado los conceptos teóricos suficientes para su comprobación. Entonces tenemos una nueva representación para el complejo z.

$$z=|z|(\cos\theta+i\text{sen}\theta)=|z|e^{i\theta}$$

$$\boxed{\therefore\ z=|z|e^{i\theta}} \qquad (*)$$

Corolario

Conociendo el complejo $z=|z|e^{i\theta}$ podemos hallar la representación exponencial de su conjugado solo reemplazando θ por $(-\theta)$.

$$\bar{z}=|z|e^{i(-\theta)}$$

Ejemplos

1. Represente en forma exponencial al complejo $z=4+4\sqrt{3}i$.

Resolución

$$z=4+4\sqrt{3}i=8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)=8e^{i\pi/3}$$

$$\therefore\ z=8e^{\frac{i\pi}{3}}$$

2. Sabiendo que $z=x+yi$, halle el módulo y el argumento de e^z.

Resolución

$$e^z=e^{x+yi}=e^x\cdot e^{yi}=e^x(\cos y+i\,\text{sen}y)$$

$$\therefore\ |e^z|=e^x;\ \arg(e^z)=y$$

Nótese que $e^x>0;\ \forall\, x\in\mathbb{R}$

3. Calcule el valor de i^i; $i=\sqrt{-1}$.

Resolución

Partimos expresando en forma polar el complejo

$$i=0+i=(1)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

Luego $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}=e^{\frac{i\pi}{2}}$

Nos piden $i^i=\left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^i=e^{\frac{\pi}{2}i^2}=e^{-\frac{\pi}{2}}$

$$\therefore\ i^i=e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Nota

Del teorema de Euler se tiene

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\,\text{sen}\theta \qquad \text{(I)}$$

$$e^{i(-\theta)}=\cos\theta-i\,\text{sen}\theta \qquad \text{(II)}$$

Al sumar (I) y (II) se obtiene

$$e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$$

de donde $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ (*)

Al restar (I) − (II) se obtiene

$$\text{sen}\,\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \qquad (**)$$

Si en dichas fórmulas reemplazamos θ por z, obtenemos algo más general

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};\quad z\in\mathbb{C}$$

$$\text{sen}\,z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i};\quad z\in\mathbb{C}$$

REPRESENTACIÓN CIS

Es usada para representar en forma abreviada a un complejo en su forma polar. Así

$$z=|z|(\cos\theta+i\,\text{sen}\theta)=|z|\,\text{cis}\theta$$

Ejemplos

- $z_1=2(\cos 12°+i\,\text{sen}12°)=2\text{cis}12°$
- $z_2=2(\cos(\theta+2k\pi)+i\,\text{sen}(\theta+2k\pi))=2\text{cis}(\theta+2k\pi)$

REPRESENTACIÓN FASORIAL

Para esta representación es necesario que el complejo esté expresado en forma polar.

Si $z=|z|(\cos\theta+i\,\text{sen}\theta)$, su representación fasorial es

$$z=|z|\angle\theta$$

Esta representación es usada especialmente en circuitos eléctricos.

Ejemplos

- $z_1=4(\cos 18°+i\operatorname{sen}18°)=4\underline{|18°}$
- $z_2=5\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)=4\underline{|45°}$
- $z_3=16(\cos 5°-i\operatorname{sen}5°)=16\underline{|-5°}$

Teorema

Sean los números complejos

$$z=|z|e^{i\theta};\ w=|w|e^{i\alpha}.$$

En ellos se cumple:

Forma exponencial

$$z\cdot w=|z|\,|w|e^{i(\theta+\alpha)}$$

Forma polar

$$z\cdot w=|z|\,|w|(\cos(\theta+\alpha)+i\operatorname{sen}(\theta+\alpha))$$

Representación CIS

$$z\cdot w=|z|\,|w|\operatorname{cis}(\theta+\alpha)$$

Representación fasorial

$$z\cdot w=|z|\,|w|\underline{|(\theta+\alpha)}$$

De manera análoga:

Forma exponencial

$$\frac{z}{w}=\frac{|z|}{|w|}e^{i(\theta-\alpha)}$$

Forma polar

$$\frac{z}{w}=\frac{|z|}{|w|}(\cos(\theta-\alpha)+i\operatorname{sen}(\theta-\alpha))$$

Representación CIS

$$\frac{z}{w}=\frac{|z|}{|w|}\operatorname{cis}(\theta-\alpha)$$

Forma fasorial

$$\frac{z}{w}=\frac{|z|}{|w|}\underline{|(\theta-\alpha)}$$

Ejercicios

1. Halle el complejo z.

$$z=\frac{\sqrt{2}(\cos 13°+i\operatorname{sen}13°)[2\sqrt{2}(\cos 67°+i\operatorname{sen}67°)]}{4[\cos 16°+i\operatorname{sen}16°][\cos 19°+i\operatorname{sen}19°]}$$

Resolución

Representando fasorialmente

$$z=\frac{\cancel{\sqrt{2}}\,\underline{|13°}\cdot 2\cancel{\sqrt{2}}\,\underline{|67°}}{\cancel{4}\,\underline{|16°}\cdot\underline{|19°}}=\frac{\underline{|13°+67°}}{\underline{|16°+19°}}=\frac{\underline{|80°}}{\underline{|35°}}=\underline{|45°}$$

Luego

$$z=\cos 45°+i\operatorname{sen}45°=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

2. Exprese la forma polar de

$$z=\frac{(1+i)^5(\sqrt{3}+i)}{(3+4i)^3}.$$

Resolución

Necesitamos su módulo y su argumento:

Módulo

$$|z|=\frac{|1+i|^5|\sqrt{3}+i|}{|3+4i|^3}=\frac{\sqrt{2}^5\cdot 2}{5^3}=\frac{8\sqrt{2}}{125}$$

Argumento

$$\operatorname{Arg}(z)=\operatorname{Arg}(1+i)^5+\operatorname{Arg}(\sqrt{3}+i)-\operatorname{Arg}(3+4i)^3$$

$$\operatorname{Arg}(z)=5\operatorname{Arg}(1+i)+\operatorname{Arg}(\sqrt{3}+i)-3\operatorname{Arg}(3+4i)$$

$$\operatorname{Arg}(z)=5\cdot 45°+30°-3(53°)=96°$$

$$\therefore\ z=\frac{8\sqrt{2}}{125}\cdot\operatorname{cis}96°=\frac{8\sqrt{2}}{125}\underline{|96°}$$

Teorema de De Moivre

Sea el número complejo

$z=|z|e^{i\theta}$.

En él se cumple

Forma exponencial

$z^n=|z|^n e^{in\theta}$

Forma polar

$z^n=|z|^n(\cos n\theta+i\operatorname{sen} n\theta)$

Representación CIS

$z^n=|z|^n\operatorname{cis}(n\theta)$

Forma fasorial

$z^n=|z|^n\underline{|n\theta}$

$\forall\, n\in\mathbb{Z}$

RAÍZ *n*-ÉSIMA. RAÍCES DE LA UNIDAD REAL

El problema de obtener una raíz n-ésima de cualquier número real o complejo se resuelve satisfactoriamente con la teoría de números complejos.

Definición

Dados $z\in\mathbb{C}$ y $n\in\mathbb{N}-\{1\}$, se llama raíz n-ésima de z a un número $w\in\mathbb{C}$, tal que $w^n=z$.

Teorema

Para todo $z\in\mathbb{C}$ y todo $n\in\mathbb{N}-\{1\}$ existen n raíces (n-ésimas) de z.

Demostración

Sea $z=|z|e^{i\theta}=|z|(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$

Deseamos calcular

$w=|w|e^{i\alpha}=|w|(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)$, tal que $w^n=z$

Es decir

$[|w|e^{i\alpha}]^n=|z|e^{i\theta}\ \rightarrow\ |w|^n e^{in\alpha}=|z|e^{i\theta}$

Equivalentemente

$|w|^n(\cos n\alpha+i\operatorname{sen} n\alpha)=|z|(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$

Igualando partes real e imaginaria

$|w|^n=|z|\ \wedge\ [\cos n\alpha=\cos\theta\ \wedge\ \operatorname{sen} n\alpha=\operatorname{sen}\theta]$

De donde obtenemos

$|w|=\sqrt[n]{|z|}\ \wedge\ n\alpha=\theta+2k\pi\ \rightarrow\ \alpha=\dfrac{\theta+2k\pi}{n};\ k\in\mathbb{Z}$

Luego, las raíces n-ésimas son

$$w_k=\sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$\rightarrow\ w_k=\sqrt[n]{|z|}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \ldots$

Estas raíces no son todas distintas, pues

$w_n=w_0;\ w_{n+1}=w_1;\ \ldots;\ w_{n+j}=w_j$

Es decir, $w_{n+j}=w_j\ \ldots\ \forall j=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$

Luego, las raíces n-ésimas distintas son

$w_0;\ w_1;\ w_2;\ \ldots;\ w_{n-1}$

Por ello, cuando se resuelve un problema de raíz n-ésima es suficiente tomar los valores de

$k=0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\ (n-1)$

Ejemplos

1. Calcule la raíz cuadrada de -9.

Resolución

Sea $z=-9$, cuya forma polar es $9\operatorname{cis}\pi$.

Luego

$$\sqrt{z}=\sqrt{9}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi+2k\pi}{2}\right)=3\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$$

donde $k=0\ \vee\ k=1$

- Si $k=0$; $\sqrt{z}=3\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{2}=3(0+i)=3i$
- Si $k=1$; $\sqrt{z}=3\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi\right)=3\operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$

$\rightarrow\ \sqrt{z}=3(0+-i)=-3i$

$\therefore\ \sqrt{-9}=3i\ \vee\ \sqrt{-9}=-3i$

2. Halle las tres raíces cúbicas de $8i$.

Resolución

Sea $z=8i=0+8i=8\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\rightarrow \quad z^{1/3}=\sqrt[3]{8}\cdot\text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)=2\text{cis}\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right)$$

donde $k=0;\ 1;\ 2$

Si $k=0;\ z_0=2\text{cis}\frac{\pi}{6}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}+i$

$$\rightarrow \quad z_0=\sqrt{3}+i$$

Si $k=1;\ z_1=2\text{cis}\frac{\pi}{6}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$$\rightarrow \quad z_1=-\sqrt{3}+i$$

Si $k=2;\ z_2=2\text{cis}3\frac{\pi}{2}=2(-i)=-2i$

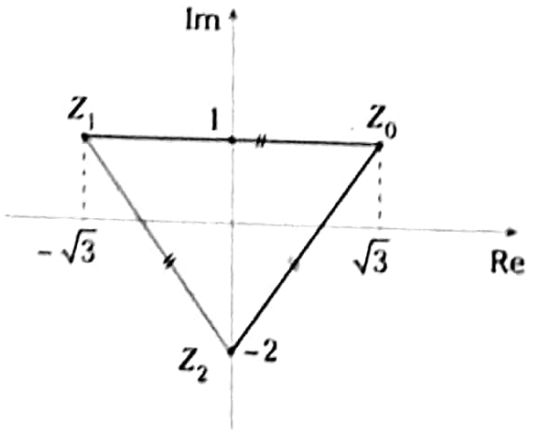
$$\rightarrow \quad z_2=-2i$$

Por lo tanto, las tres raíces cúbicas de $8i$ son:

$\sqrt{3}+i;\ -\sqrt{3}+i;\ -2i.$

Nota

Esta es la representación geométrica de las tres raíces cúbicas de $8i$.



3. Halle las tres raíces cúbicas de $z=1+i$.

Resolución

$$z=1+i \begin{cases} \text{Arg}(z)=\frac{\pi}{4} \\ |z|=\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad z=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Luego, las raíces cúbicas de $z=1+i$ son

$$w_k=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right]$$

$k=0;\ 1;\ 2$

Para $k=0$

$$w_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\rightarrow \quad w_0=\sqrt[6]{2}(\cos 15°+i\,\text{sen}15°)$$

$$\rightarrow \quad w_0=\sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$$

Para $k=1$

$$w_1=\sqrt[6]{2}[\cos(15°+120°)+i\,\text{sen}(15°+120°)]$$

$$\rightarrow \quad w_1=\sqrt[6]{2}(\cos 135°+i\,\text{sen}135°)$$

$$\rightarrow \quad w_1=\sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

Para $k=2$

$$w_2=\sqrt[6]{2}[\cos(15°+240°)+i\,\text{sen}(15°+240°)]$$

$$\rightarrow \quad w_2=\sqrt[6]{2}(\cos 255°+i\,\text{sen}255°)$$

$$\rightarrow \quad w_2=\sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}i\right)$$

Por lo tanto, las tres raíces cúbicas son

$$\sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right);$$

$$\sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right);$$

$$\sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}i\right).$$

4. Halle las raíces cuartas de 1.

Resolución

Sea $z=1 \rightarrow z=\text{cis}0°=\text{cis}(2k\pi)$

Luego

$$\sqrt[4]{z}=\text{cis}\left(\frac{2k\pi}{4}\right)=\text{cis}\left(\frac{k\pi}{2}\right);\ k=0;\ 1;\ 2;\ 3$$

Si $k=0 \rightarrow \sqrt[4]{z}=\text{cis}0°=1+0=1$

Si $k=1 \rightarrow \sqrt[4]{z}=\text{cis}\frac{\pi}{2}=0+i=i$

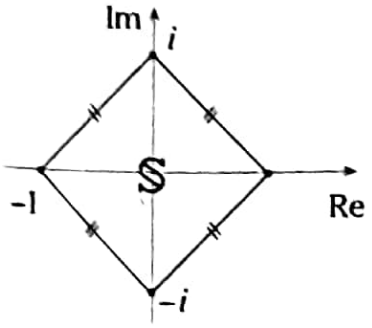
Si $k=2 \rightarrow \sqrt[4]{z}=\text{cis}\frac{2\pi}{2}=\cos\pi=-1+0i=-1$

Si $k=3 \rightarrow \sqrt[4]{z}=\text{cis}\frac{3\pi}{2}=(0+-i)=-i$

$\therefore\ \sqrt[4]{1}\in\{1; i; -1; -i\}$

Nota

Esta es la representación geométrica de las raíces cuartas de 1.



$$\mathbb{S}=(\sqrt{2})^2\,u^2=2\,u^2$$

Raíces cúbicas de la unidad real

Sea el complejo $z=1$.

Como se desea calcular la raíz cúbica, entonces expresamos el complejo en forma polar

$$z=1=1+0i=\cos0°+i\text{sen}0°$$

Luego, la raíz cúbica es

$$z_k=\cos\left(\frac{0°+2k\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{0°+2k\pi}{3}\right)$$

$$\rightarrow\ z_k=\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$$

Donde

$k=0;\ 1;\ 2$

Para $k=0;\ z_0=\cos0°+i\text{sen}0°=1$

Para $k=1;\ z_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Para $k=2;\ z_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Conclusión

Las raíces cúbicas de la unidad real son

$$1;\ \underbrace{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}_{\text{conjugados}}$$

Pero si asumimos por w al número

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

las raíces cúbicas de 1 son 1, w, w^2, es decir

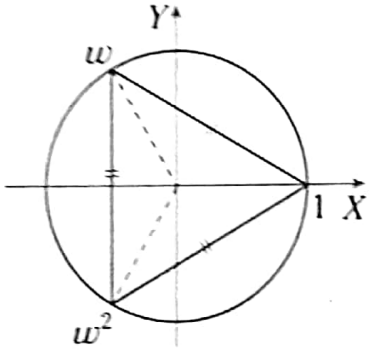
$$\sqrt[3]{1}=\begin{cases}1\\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=w\\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=w^2\end{cases}$$

Nota

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Interpretación geométrica

Se observa que las tres raíces cúbicas de la unidad tienen el mismo módulo; por lo tanto, sus afijos estarán en el borde de una circunferencia de radio igual al módulo. En este caso el módulo es igual a la unidad.



En el gráfico se observa que los afijos de $1; w; w^2$ son los vértices de un triángulo equilátero.

Propiedades de las raíces cúbicas de la unidad

- Sabemos que w es una raíz cúbica de unidad, entonces se cumple $w^3=1$.

  Luego podemos afirmar

  $$\boxed{w^{3k}=1 \vee w^{\pm 3k}=1;\ \forall k \in \mathbb{N}}$$

  Entonces

  $$\boxed{w^{3k+r}=w^r;\ r \in \mathbb{Z}}$$

  Luego

  $$w^{3k+1}=w;\ w^{3k+2}=w^2$$

- Si sumamos las tres raíces cúbicas $1; w; w^2$, tenemos

  $$1+w+w^2=1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=0$$

  $\rightarrow\ 1+w+w^2=0$

Conclusión

$\forall k; r \in \mathbb{Z}$

I. $w^3=1$

II. $w^{3k}=1; w^{3k+1}=w; w^{3k+2}=w^2$

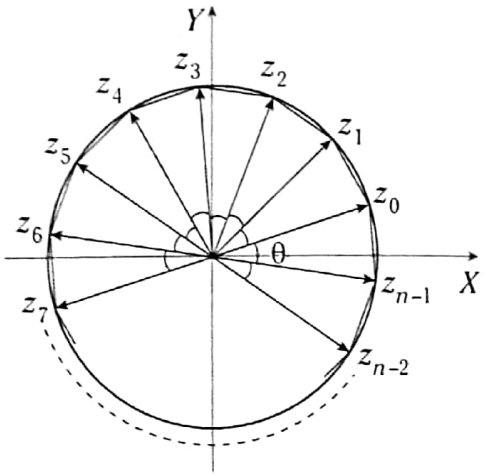
III. $w^{3k+r}=w^r$

IV. $1+w+w^2=0$

Teorema

Los afijos de las raíces n-ésimas de un número complejo son los vértices de un polígono regular de n lados.

Sean $z_0; z_1; z_2; z_3; ...; z_{n-1}$ las n-raíces (n-ésimas) de z.



Del gráfico se observa:

$$\theta=\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Luego, el área del polígono regular de n lados es

$$S=\frac{n|z_0|^2}{2}\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\ \text{u}^2$$

Donde z_0 es una de las raíces (n-esimal) de z.

También se cumple:

I. $z_0^n=z_1^n=z_2^n=...=z_{n-1}^n=z$

II. $z_0+z_1+z_2+...+z_{n-1}=0$

Importante

Las raíces n-ésimas de la unidad tienen propiedades importantes que merecen especial atención.

Si w_1; w son las raíces n-ésimas de la unidad, entonces $w_1 w$ es también raíz n-ésima de la unidad; en particular, w; w^2; w^3; ... son raíces enésimas de la unidad.

Si $w^{n-1} \neq 1$, se dice que w es **una raíz primitiva** de la unidad.

$$w_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{n}$$

Existen otras raíces primitivas, las cuales son

$$w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{2k\pi}{n}$$

$k < n$ y k es coprimo con n.

Ejemplo

Las raíces cuadradas de la unidad real son 1; -1, donde -1 es la raíz primitiva, y las raíces cúbicas de la unidad real son 1; w; w^2.

Así

$$w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2};\ w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

donde w; w^2 son raíces primitivas.

Ejercicio para el lector

Pruebe que i; $-i$ son las raíces cuartas primitivas de la unidad real.

Ejemplos

1. Dado $z=2$, halle

   a. $(z^{1/6})^3$

   b. $(z^3)^{1/6}$

Resolución

a. $z=2=2(\text{cis}0°)$

$$\rightarrow\ z^{1/6} = \sqrt[6]{2}\,\text{cis}\left(\frac{0° + 2k\pi}{6}\right)$$

$$\rightarrow\ z^{1/6} = \sqrt[6]{2}\,\text{cis}\frac{k\pi}{3};\quad k=0;1;2;\ldots;5$$

Para $k=0$; $z_0 = \sqrt[6]{2}$

Para $k=1$; $z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Para $k=2$; $z_2 = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Para $k=3$; $z_3 = -\sqrt[6]{2}$

Para $k=4$; $z_4 = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Para $k=5$; $z_5 = \sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Como se desea calcular $(z^{1/6})^3$, elevamos al cubo cada una de las raíces:

$$z_0^3 = \sqrt{2}\ ;\quad z_1^3 = -\sqrt{2}$$

$$z_2^3 = \sqrt{2}\ ;\quad z_3^3 = -\sqrt{2}$$

$$z_4^3 = \sqrt{2}\ ;\quad z_5^3 = -\sqrt{2}$$

Observamos que se repiten los valores, los cuales deben ser considerados una sola vez.

$$\therefore\ (z^{1/6})^3 = +\sqrt{2}\ \vee\ (z^{1/6})^3 = -\sqrt{2}$$

b. $z=2=2\text{cis}0° \rightarrow z^3=8=8\text{cis}0°$

$$\rightarrow\ (z^3)^{1/6} = \sqrt[6]{8}\,\text{cis}\left(\frac{0° + 2k\pi}{6}\right)$$

$$\rightarrow\ (z^3)^{1/6} = \sqrt{2}\,\text{cis}\frac{k\pi}{3};\quad k=0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 5$$

Para

$k=0;\ z_0=\sqrt{2}$

$k=1;\ z_1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$k=2;\ z_2=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$k=3;\ z_3=-\sqrt{2}$

$k=4;\ z_4=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$k=5;\ z_5=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$\boxed{\therefore\ \left(z^{1/6}\right)^3 \neq \left(z^3\right)^{1/6}}$$

2. Calcule el valor numérico del polinomio

$P_{(x)}=2x^{351}+3x^{102}-5x^4-5x^2+3$

cuando $x_0=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Resolución

Se observa que x representa a la raíz cúbica de la unidad real, que estará cumpliendo que $x_0^3=1 \wedge 1+x_0+x_0^2=0$

$$P_{(x)}=2\left(x^3\right)^{117}+3\left(x^3\right)^{34}-5\left(x^3\right)\cdot x-5x^2+3$$

Luego

$$P_{(x_0)}=2\left(x_0^3\right)^{117}+3\left(x_0\right)^{34}-5\left(x_0^3\right)x_0-5x_0^2+3$$

$\rightarrow\ P_{(x_0)}=2\cdot 1^{117}+3\cdot 1^{34}-5\cdot 1\cdot x_0-5x_0^2+3$

$\rightarrow\ P_{(x_0)}=2+3-5\underbrace{\left(\cancel{x_0+x_0^2}\right)}_{-1}+3=2+3+5+3$

$\therefore\ P_{(x_0)}=13$

Leonhard Euler

Nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza, y murió el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia. Fue un respetado matemático y físico, y es considerado el principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes de todos los tiempos.

El matrimonio Euler estaba fuertemente ligado al calvinismo. El padre, Paul Euler, era pastor y la madre, Marguerite Brucker, era hija de otro pastor. Además del primogénito, la pareja tuvo dos hijas llamadas Anna Maria y Maria Magdalena. Al poco tiempo del nacimiento de Leonhard, la familia Euler viaja a Riehen, ciudad en la que se instalan y donde el joven Euler pasa su infancia. En aquella localidad, los Euler entablan amistad con los Bernoulli, famosa familia de matemáticos, de donde destaca Johann, considerado el mejor matemático europeo y que ejercería gran influencia en el joven Leonhard.

Posteriormente, fue enviado de regreso a Basilea, a la casa de su abuela materna, pues daría inicio a sus estudios. Su padre tenía intenciones de que su hijo siguiera sus pasos y estudiara teología, así que cuando Leonarhd cumplió 13 años, lo matriculó en la Universidad de Basilea. Precisamente, una de sus clases sería dictada por Johann Bernoulli, quien se percató rápidamente del gran talento de Leonhard para las matemáticas. Gracias a él, Paul comprendió que su hijo estaba destinado a ser un gran matemático.

En 1723 Leonhard obtuvo el título de maestro de filosofía, y tres años después se graduó de la universidad. Por aquella época, Euler se dedicó a reconstruir trabajos de grandes matemáticos como Varignon, Descartes, Newton, Galileo, entre otros; además, ganó el segundo puesto cuando participó en un concurso que la Academia de las Ciencias francesa estaba promoviendo, en donde se solicitaba a los concursantes que encontraran la mejor forma de ubicar el mástil en un buque. El primer lugar fue para Pierre Bouguer, el padre de la arquitectura naval. Sin embargo, Euler consiguió ganar ese premio hasta en doce ocasiones.

Por aquella época, los hijos de Johann Bernoulli, Daniel y Nicolás, se encontraban trabajando en la Academia de Ciencias de San Petersburgo, creada por el zar Pedro I, y que tenía por objeto mejorar la calidad educativa de Rusia e igualar su nivel intelectual con el de otros países de Europa Central. Por ello, la Academia implementó una serie de mejoras que incluía la presencia de eruditos extranjeros que pudieran proveer los conocimientos necesarios para sus estudiantes.

En julio de 1727, Nicolás murió de apendicitis, por ello Daniel recomendó a Leonhard para que ocupara el puesto de su hermano en el departamento de fisiología. Sin embargo, la zarina Catalina I, quien se convirtió en la principal benefactora al continuar con el legado que fundó su marido, murió el mismo día de la llegada de Euler. Esto resultaría un problema, pues el poder quedó en manos

de la nobleza, que eligió como nuevo zar un niño de 12 años, Pedro II. La nobleza sospechaba de los científicos extranjeros, lo que motivó un recorte del presupuesto de la Academia, entre otras dificultades para Euler y sus colegas.

Las cosas mejoraron tras la muerte de Pedro II, acaecida tres años después de la asunción de su reinado, y Euler fue ascendiendo en la Academia, hasta que en 1731 se convirtió en profesor de física. Dos años después, Daniel Bernoulli renunció a su cargo y Euler lo sucedió como director del Departamento de Matemática.

En 1734 Euler contrajo matrimonio con Katharina Gsell, hija de un pintor de la Academia, con quien tuvo trece hijos, de los que sobrevivieron solo cinco. Al año siguiente de su matrimonio, Euler sufrió de una fiebre que casi le cuesta la vida, y tres años después quedó parcialmente ciego del ojo derecho. Euler hacía responsable de este hecho al trabajo de cartografía que realizaba en la Academia.

Para 1741, debido a los acontecimientos políticos en Rusia, Euler decidió viajar a Alemania tras aceptar un cargo en la Academia de Berlín que le fue otorgado por Federico II el Grande, rey de Prusia. En aquella ciudad permaneció durante veinticinco años, tiempo más que suficiente para escribir 380 artículos y dos de sus principales obras: *Introductio in analysin infinitorum* (1748), un texto sobre las funciones matemáticas, e *Institutiones calculi differentialis* (1755), que versaba sobre el cálculo diferencial. Además, se le solicitó ser el tutor de la princesa de Anhalt-Dessau, la sobrina de Federico, quien anhelaba ser instruida por un gran maestro.

Euler escribió un notable conjunto de cartas –o lecciones– sobre filosofía natural, física y matemática, así como una visión de su personalidad y creencia religiosa para la princesa. Estas cartas serían recopiladas en un volumen titulado *Cartas de Euler sobre distintos temas de filosofía natural dirigidas a una princesa alemana*. Este libro se convirtió en la más leída de sus obras, y fue publicado en toda Europa, incluso llegó a Estados Unidos. Estas cartas son un modelo de enseñanza clara e interesante, y es notable la habilidad de Euler para comunicar cuestiones científicas a una audiencia menos calificada, además de que pudiera encontrar el tiempo para un trabajo elemental tan minucioso como este, en medio de todos sus demás intereses literarios.

En Alemania, el problema ocular de Euler empeoró, incluso su ojo sano, el izquierdo, sufrió de cataratas. Pero a pesar de ello, Euler no dejó de trabajar, pues su productividad intelectual continuó con su gran capacidad de cálculo mental y su memoria fotográfica.

Sin embargo, pese a las múltiples contribuciones que hizo a la Academia, Euler fue obligado a dejar Berlín. Aparentemente, Federico no estaba conforme con él, pues lo consideraba una persona poco sofisticada en comparación con Voltaire, uno de los filósofos que gozaba de una buena posición en el círculo del rey.

Como la situación en Rusia había mejorado tras el ascenso de Catalina la Grande, en 1766 Euler acepta la invitación de volver a la Academia de San Petersburgo. Los últimos años de su vida los pasó ciego, pero siguió trabajando al lado de su hijo mayor, a quien le dictaba los trabajos. Lamentablemente, cinco años después de su regreso, un incendio consumió su casa y dos años después su esposa fallece. Euler contrajo nuevas nupcias luego de tres años, pero el 18 de septiembre de 1783, a los 76 años, falleció. Fue enterrado junto a su primera esposa en el Cementerio Luterano, y posteriormente sus restos fueron llevados al Monasterio de Alejandro Nevski.

Fuente:

http://es.wikipedia.org/wiki/Euler

http://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/euler.htm

Problemas RESUELTOS

Problema 1

Sean los números complejos

$z_1=(4;-2)$; $z_2=(5;3)$.

¿Cuál es el complejo que representa a $2z_1+3z_2$?

Resolución

$$2z_1+3z_2=2(4;-2)+3(5;3)$$
$$=(8;-4)+(15;9)$$
$$=(8+15;-4+9)=(23;5)$$

$\therefore\ 2z_1+3z_2=(23;5)$

Problema 2

Al multiplicar z_1 y z_2 se obtiene otro complejo de la forma $(2x-1;3-y)$, donde $z_1=(3;1)$; $z_2=(-1;4)$. ¿Cuál es el valor de xy?

Resolución

De la información:

$$z_1\cdot z_2=(2x-1;3-y)$$
$$\rightarrow\ (3;1)\cdot(-1;4)=(2x-1;3-y)$$

Aplicando la definición de multiplicación de complejos en pares ordenados

$$(3;1)(-1;4)=\big(3(-1)-1\cdot 4;\ 1(-1)+3\cdot 4\big)$$
$$=(-3-4;-1+12)=(-7;11)$$

Luego, por igualdad de números complejos

$$(-7;11)=(2x-1;3-y)$$

$-7=2x-1\ \rightarrow\ x=-3$

$11=3-y\ \rightarrow\ y=-8$

$\therefore\ xy=24$

Problema 3

Si se cumple que

$x(2+3i)+i^2=3-yi\ /\ x;y\in\mathbb{R}\ \wedge\ i=\sqrt{-1}$,

calcule el valor de $x-y$.

Resolución

Efectuando

$$2x+3xi+(-1)=3-yi$$

Separando la parte real de la parte imaginaria

$$2x-1+3xi=3-yi$$

Por igualdad de números complejos

$2x-1=3\ \rightarrow\ x=2$

$3x=-y\ \rightarrow\ y=-3(2)=-6$

$\therefore\ x-y=2-(-6)=8$

Problema 4

¿Cuál es el complejo w que verifica la igualdad $2iw+\sqrt{3}=i^3$?

Resolución

$2iw=-\sqrt{3}+i^3$, pero $i^3=-i$

$$\rightarrow\ 2iw=-\sqrt{3}-i\ \rightarrow\ w=\frac{-\sqrt{3}-i}{2i}$$

Multiplicando y dividiendo por i

$$w=\frac{-(\sqrt{3}+i)i}{2i(i)}=\frac{-(\sqrt{3}+i)i}{-2}$$

$$w=\frac{(\sqrt{3}+i)i}{2}=\frac{\sqrt{3}i+i^2}{2}=\frac{\sqrt{3}i-1}{2}$$

$$\therefore\ w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Problema 5

Sea el complejo $z=1+i$.

Calcule el valor de z^{12}.

Resolución

Del dato:

$$z=1+i$$

Realizando la sentencia solicitada

$$z^{12}=(1+i)^{12}$$
$$\rightarrow\ z^{12}=\left[(1+i)^2\right]^6$$
$$\rightarrow\ z^{12}=\left[1+2i+i^2\right]^6;\ i^2=-1$$
$$\rightarrow\ z^{12}=(2i)^6=2^6i^6=64(-1)=-64$$
$$\therefore\ z^{12}=-64$$

Problema 6

Calcule el valor más simple de

$$N=\frac{(1+i)^2(1+3i)}{i-3},\ \text{donde } i=(0;\ 1).$$

Resolución

Nota

$$(1+i)^2=2i$$

En la expresión, si multiplicamos por (i) al numerador y denominador tenemos

$$N=\frac{(1+i)^2(1+3i)}{i-3}=\frac{2\cancel{i}(1+3i)(i)}{(i-3)\cancel{i}}=\frac{2(i-3)}{i-3}=2$$

$$\therefore\ N=2$$

Problema 7

Halle el complejo Z.

$$Z=\frac{(a^2+ab+a)i-a-b-1}{(a+b+1)i};\ a+b\neq-1$$

Resolución

Agrupando la parte real y la parte imaginaria

$$z=\frac{a(a+b+1)i-(a+b+1)}{(a+b+1)i}$$

Simplificando tenemos

$$z=\frac{ai-1}{i}=\frac{(ai-1)i}{i^2}=\frac{ai^2-i}{-1}=i+a$$

$$\therefore\ z=a+i$$

Problema 8

Efectúe y simplifique

$$W=\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1+i}}}}}$$

Resolución

Recuerde $\dfrac{1-i}{1+i}=-i$.

Entonces

$$W=\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1+i}}}}}\begin{array}{l}\rightarrow -i\\ \rightarrow -i\\ \rightarrow -i\\ \rightarrow -i\\ \rightarrow -i\end{array}$$

$$\therefore\ W=-i$$

Problema 9

Si z es un complejo no nulo que verifica la siguiente ecuación $iz+\bar{z}=0$, calcule el valor de $\mathrm{Re}(z)\div\mathrm{Im}(z)$.

Resolución

Sea $z=x+yi$ el número complejo buscado.

En la ecuación

$$i(x+yi)+\overline{x+yi}=0$$
$$xi+yi^2+x-yi=0$$
$$xi-y+x-yi=0$$
$$(x-y)+(x-y)i=0$$

Por la igualdad de complejos

$x-y=0 \rightarrow x=y$

De aquí $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)\neq 0$

$\therefore \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)}=1$

Problema 10

Dados los números complejos

$z=(3+2i)(2-i)$;

$w=\dfrac{(3+2i)}{2+\frac{1}{i}}$,

calcule $\mathrm{Im}[z-5w]$.

Resolución

> **Sabemos que**
>
> $\mathrm{Im}(A\pm B)=\mathrm{Im}(A)\pm\mathrm{Im}(B)$
>
> $\forall A, B\in\mathbb{C}$

Lo pedido es equivalente a

$\mathrm{Im}(z-5w)=\mathrm{Im}(z)-5\mathrm{Im}(w)$

- $z=(3+2i)(2-i)=6-3i+4i-2i^2$

$\rightarrow z=6+i-2(-1)=8+i$

$\rightarrow \mathrm{Im}(z)=1$

- $w=\dfrac{3+2i}{2+\frac{1}{i}}=\dfrac{3+2i}{2-i}$.

> **Recuerde**
>
> $\dfrac{1}{i}=-i$

$\rightarrow w=\dfrac{3+2i}{2-i}\cdot\dfrac{2+i}{2+i}=\dfrac{6+3i+4i-2i^2}{2^2-i^2}$

$\rightarrow w=\dfrac{6+7i-2(-1)}{4-(-1)}=\dfrac{8+7i}{5}=\dfrac{8}{5}+\dfrac{7i}{5}$

$\rightarrow \mathrm{Im}(w)=\dfrac{7}{5}$

Luego

$\mathrm{Im}(z)-5\mathrm{Im}(w)=1-5\left(\dfrac{7}{5}\right)=-6$

Problema 11

Sea $z=\dfrac{2+ai}{b+4i}$ un número complejo real no nulo.

¿Cuál es el valor de ab?

Resolución

Por la información, sea $z=k$; $k\in\mathbb{R}$

$\rightarrow \dfrac{2+ai}{b+4i}=k$, k real no nulo

$\rightarrow 2+ai=bk+4ki$

Igualando complejos

$2=bk$ (I)

$a=4k$ (II)

Como $k\neq 0$, se pueden dividir las ecuaciones miembro a miembro

$\dfrac{2}{a}=\dfrac{b\cancel{k}}{4\cancel{k}} \rightarrow a\cdot b=2\cdot 4$

$\therefore ab=8$

Problema 12

¿Cuántos valores reales de a permiten que el complejo $\dfrac{a+2i}{2-ai}$ sea un complejo imaginario puro?

Resolución

Sea $\frac{a+2i}{2-ai}=ki$, tal que $k \in \mathbb{R}$; k no nulo

$$a+2i=2ki-aki^2=2ki+ak$$

Por la igualdad de complejos

$$a=ak \rightarrow a=0 \vee k=1$$
$$2=2k \rightarrow k=1$$

Si $k=1$, entonces a es cualquier real.
Por lo tanto, existen infinitos valores para a.

Otro método

$$\frac{a+2i}{2-ai}=\frac{(a+2i)i}{(2-ai)i}=\frac{\cancel{(a+2i)}i}{\cancel{2i+a}}=i$$

Por lo tanto, a puede ser cualquier número real, inclusive cero.

Problema 13

Dados los números complejos z y w

$$z=\frac{1+ai}{a+i};\ w=\frac{a+3i}{1-ai}$$

si $z+w=ki$, tal que $k \in \mathbb{R}$, ¿cuál es el valor de k?

Resolución

De $z+w=ki$

$$\frac{1+ai}{a+i}+\frac{a+3i}{1-ai}=ki$$

En la segunda fracción, multiplicando y dividiendo por

$$\frac{1+ai}{a+i}+\frac{(a+3i)i}{(1-ai)i}=ki$$

$$\frac{1+ai}{a+i}+\frac{ai-3}{i+a}=\frac{2ai-2}{a+i}=\frac{2(ai-1)}{a+i}\cdot\frac{i}{i}$$

$$\frac{2\cancel{(ai-1)}i}{\cancel{(ai-1)}}=2i=ki$$

$\therefore\ k=2$

Problema 14

Si $\sqrt{3+2i}=x+yi$, tal que x; $y \in \mathbb{R}$, calcule el valor de $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$.

Resolución

De $\sqrt{3+2i}=x+yi$

Elevando al cuadrado

$$3+2i=x^2+2xyi+(yi)^2=x^2-y^2+2xyi$$

De la igualdad de números complejos

$$3=x^2-y^2 \qquad \text{(I)}$$
$$2=2xy \qquad \text{(II)}$$

Dividiendo las ecuaciones miembro a miembro

$$\frac{3}{\cancel{2}}=\frac{x^2-y^2}{\cancel{2}xy} \rightarrow \frac{x^2}{xy}-\frac{y^2}{xy}=3$$

$$\therefore\ \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=3$$

Problema 15

Si $z=\frac{(1+2i)(1-\sqrt{3}i)}{2(2-i)}$, ¿cuál es el módulo de z?

Resolución

Aplicando la propiedad

$$\left|\frac{x\cdot y}{z}\right|=\frac{|x||y|}{|z|} \quad \forall\ x;\ y;\ z \in \mathbb{C} \wedge z \neq 0$$

En el problema

$$|z|=\frac{|1+2i||1-\sqrt{3}i|}{|2||2-i|}$$

$$\rightarrow |z|=\frac{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}{2\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{4}}{2\cdot\sqrt{5}}=1$$

$$\therefore\ |z|=1$$

Problema 16

Si $x=5+3i$; $i=\sqrt{-1}$, calcule el valor de M.

$$M=\text{Re}\left(\frac{x^3-1}{x^2+x+1}\right)+\text{Im}\left(\frac{x^3+1}{x^2-x+1}\right)$$

Resolución

Recordando los productos notables

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1) \rightarrow \frac{x^3-1}{x^2+x+1}=x-1$$

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1) \rightarrow \frac{x^3+1}{x^2-x+1}=x+1$$

Luego, lo que se busca es:

$$M=\text{Re}(x-1)+\text{Im}(x+1)$$

Reemplazando $x=5+3i$ se tiene:

$$M=\text{Re}(5+3i-1)+\text{Im}(5+3i+1)$$

$$\rightarrow M=\text{Re}(4+3i)+\text{Im}(6+3i)$$

$$\therefore M=\text{Re}(x-1)+\text{Im}(x+1)=4+3=7$$

Problema 17

Si se cumple que

$2\text{Re}(z)+3\text{Im}(z)=34$;

$2\text{Im}(z)-5\text{Re}(z)=-28$,

calcule el valor real positivo de S.

$$S=\sqrt{\frac{z\cdot\bar{z}}{10}-1}.$$

Resolución

Sea $z=x+yi$; además $x, y \in \mathbb{R}$.

Luego las ecuaciones quedan

$$\begin{cases} 2x+3y=34 & \text{(I)} \\ 2y-5x=-28 & \text{(II)} \end{cases}$$

Para eliminar y

$$\text{(I)}\times 2 \rightarrow 4x+6y=68$$

$$\text{(II)}\times(-3) \rightarrow -6y+15x=84$$

Luego, sumando las ecuaciones

$$19x=152 \rightarrow x=8$$

En (I)

$$2(8)+3y=34 \rightarrow y=6$$

De donde

$$z=8+6i$$

Entonces

$$S=\sqrt{\frac{(8+6i)(8-6i)}{10}-1}=\sqrt{\frac{8^2+6^2}{10}-1}$$

$$\therefore S=\sqrt{\frac{10^2}{10}-1}=\sqrt{10-1}=3$$

Problema 18

Calcule un número complejo que al ser multiplicado por $(\sqrt{3}i+1)^4$ dé como resultado otro número complejo de módulo 16 y argumento 180°.

Resolución

Sea z el número complejo buscado.

Por dato

$$z\cdot(\sqrt{3}i+1)^4=16\text{cis}180^\circ$$

Recordando

$$\sqrt{3}i+1=1+\sqrt{3}i=2\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)=2e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$16\text{cis}180^\circ=16\text{cis}\pi=16e^{\pi i}$$

Luego

$$z\cdot\left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^4=16e^{\pi i}$$

$$z\cdot\cancel{16}e^{\frac{4\pi}{3}i}=\cancel{16}e^{\pi i} \rightarrow z=e^{\pi i-\frac{4\pi}{3}i}$$

$$\therefore z=e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

Problema 19

Si z es un número complejo definido por

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$; $n\in\mathbb{Z}$, señale $\text{Im}(z)$.

Resolución

Recordando $\frac{1+i}{1-i}=i=\text{cis}\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}i}$

Luego

$$z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^n=e^{\frac{n\pi}{2}i}=\text{cis}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\ \text{Im}(z)=\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Problema 20

Si k es un entero no negativo, calcule el complejo z.

$$z=\left[\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right]^{4k+6}$$

Resolución

Dato: $k\in\mathbb{Z}_0^+$

Entonces

$$z=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4k+6}=\left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{2k+3}=\left(\frac{2i}{2}\right)^{2k+3}=i^{2k+3}$$

$$\rightarrow\ z=\left(i^2\right)^{k+1}\cdot i=(-1)^{k+1}i$$

Por lo tanto, el equivalente de la expresión es

$$z=(-1)^{k+1}i.$$

Problema 21

Encuentre un valor de

$$\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[5]{i}}}}.$$

Resolución

Partimos calculando un valor de $\sqrt[5]{i}$. Para ello, sabemos que $i^5=i$; entonces, un valor de $\sqrt[5]{i}=i$, pues $i^5=i$. Además $(1+i)^2=2i$.

Sustituyendo en la expresión

$$\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[5]{i}}}}=\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+i}}}$$

$$=\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{2i}}}=\sqrt{2\sqrt{i-(1+i)}}$$

$$=\sqrt{2\sqrt{-1}}=\sqrt{2i}=1+i$$

Por lo tanto, un valor es $1+i$.

Problema 22

Halle los números complejos z que satisfacen

$$\left|\frac{1+z}{1-z}\right|=1.$$

Resolución

Sea $z=a+bi$; reemplazando en la igualdad

$$\left|\frac{1+a+bi}{1-a-bi}\right|=1$$

$$\rightarrow\ |1+a+bi|=|1-a-bi|$$

$$\rightarrow\ \sqrt{(1+a)^2+b^2}=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}$$

$$\rightarrow\ (1+a)^2+b^2=(1-a)^2+b^2$$

$$\rightarrow\ 1+2a+a^2=1-2a+a^2$$

$$\rightarrow\ 4a=0\ \leftrightarrow\ a=0$$

Luego, $z=a+bi=0+bi=bi$

Por lo tanto, los números complejos que satisfacen son todos los imaginarios puros y el nulo.

Problema 23

Calcule los valores de x; y reales que verifican la siguiente igualdad de complejos:

$$\frac{xi}{1+yi}=\frac{3x+4i}{x+3y}$$

Resolución

Efectuando tenemos

$$(xi)(x+3y)=(1+yi)(3x+4i)$$

Aplicando la propiedad distributiva

$$0+(x^2+3xy)i=(3x-4y)+(4+3xy)i$$

$$\rightarrow 3x-4y=0 \ \wedge \ x^2+3xy=4+3xy$$

$$\rightarrow 3x=4y \ \wedge \ x^2=4$$

De $x^2=4$ se obtiene $x=\pm 2$

Reemplazando los valores de x en $(3x=4y)$ se obtiene $y=\pm 3/2$.

$$\therefore \ x=\pm 2 \ \wedge \ y=\pm 3/2$$

Problema 24

Si $A=\dfrac{\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{a}{3i}\right)(i+3+a)}{\left(-1+\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{3i}\right)+\dfrac{a^2}{9}}$, donde $i=\sqrt{-1}$,

calcule A^4+1.

Resolución

Se observa la unidad imaginaria en el denominador; por ello utilizamos la equivalencia

$$\frac{1}{i}=-i \qquad \text{(I)}$$

Entonces

$$A=\frac{\left(-i+\dfrac{1}{3}+\dfrac{a}{3}i\right)(i+3+a)}{-\dfrac{8}{9}-\dfrac{2}{3}i+\dfrac{a^2}{9}}$$

$$A=\frac{\dfrac{i}{3}(a-3-i)(a+3+i)}{\dfrac{1}{9}(a^2-8-6i)}$$

Efectuando en el numerador

$$A=\frac{3i\left((a^2-8)-6i\right)}{(a^2-8)-6i}=3i$$

$$\therefore \ A^4+1=(3i)^4+1=82$$

Problema 25

Halle z, tal que

a. Sea conjugado con su cuadrado.
b. Sea conjugado con su inversa.

Resolución

a. De la condición del problema: $z^2=\bar{z}$

Sea $z=a+bi \rightarrow (a+bi)^2=a-bi$

$$\rightarrow (a^2-b^2)+2abi=a-bi$$

$$\underbrace{a^2-b^2=a}_{\text{(I)}} \ \wedge \ \underbrace{2ab=b}_{\text{(II)}}$$

De (II) se obtiene $b=0 \ \wedge \ a=-\dfrac{1}{2}$

Para $b=0$ en (I)

$$a^2=a \ \leftrightarrow \ a(a-1)=0 \ \leftrightarrow \ a=0 \ \vee \ a=1$$

Luego

$$z_1=0+0i=0 \ \wedge \ z_2=1+0i=1$$

Para $a=-\dfrac{1}{2}$ en (I)

$$\frac{1}{4}-b^2=-\frac{1}{2} \rightarrow b^2=\frac{3}{4} \leftrightarrow b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego

$$z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \ \wedge \ z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Por lo tanto, existen cuatro números complejos que verifican la igualdad, y ellos son

$$z_1=0;\ z_2=1$$

$$z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\quad z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

b. Condición del problema

$$\bar{z}=\frac{1}{z} \qquad \text{(I)}$$

Si $\bar{z}=\frac{1}{z} \rightarrow z\cdot\bar{z}=1$

$\leftrightarrow |z|^2=1 \leftrightarrow |z|=1$

Por lo tanto, dicha condición se verifica $\forall\, z \in \mathbb{C}$ de módulo igual a la unidad.

Problema 26

Halle el valor de w si

$$w=\frac{\operatorname{Im}\left(\frac{w_1}{w_1+w_2}\right)+\operatorname{Im}\left(\frac{w_2}{w_1+w_2}\right)}{\operatorname{Re}\left(\frac{w_1}{w_1+w_2}\right)+\operatorname{Re}\left(\frac{w_2}{w_1+w_2}\right)}$$

$\forall\, w_1 \neq -w_2;\ w_1,\ w_2 \in \mathbb{C}$

Resolución

Este problema se resuelve con el siguiente análisis:

Sea

$$z_1=a+bi \ \wedge\ z_2=c+di$$

$$\rightarrow z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$$

Luego

$$\operatorname{Re}(z_1+z_2)=a+c=\operatorname{Re}(z_1)+\operatorname{Re}(z_2)$$

$$\operatorname{Im}(z_1+z_2)=b+d=\operatorname{Im}(z_1)+\operatorname{Im}(z_2)$$

En el problema

$$\underbrace{\frac{w_1+w_2}{w_1+w_2}}=\frac{w_1}{w_1+w_2}+\frac{w_2}{w_1+w_2}$$

$$1+0i=\frac{w_1}{w_1+w_2}+\frac{w_2}{w_1+w_2}$$

Entonces

$$\operatorname{Re}\left(\frac{w_1}{w_1+w_2}\right)+\operatorname{Re}\left(\frac{w_2}{w_1+w_2}\right)=1$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{w_1}{w_1+w_2}\right)+\operatorname{Im}\left(\frac{w_1}{w_1+w_2}\right)=0$$

$\therefore\ w=0$

Problema 27

Simplifique el complejo

$$z=\left[\left[\left(\frac{3+i}{2-i}\right)^{i}\right]^{2}\right]^{i^3}.$$

Resolución

Efectuando la potencia de potencia tenemos

$$z=\left(\frac{3+i}{2-i}\right)^{2i^4}=\left(\frac{3+i}{2-i}\right)^{2}$$

$$\rightarrow z=\left[\frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\right]^2=\left(\frac{5+5i}{5}\right)^2=(1+i)^2=2i$$

$\therefore\ z=2i$

Problema 28

Calcule $\operatorname{Re}\left(e^{iz^n}\right)$ si $z=\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi \ \wedge\ n\in\mathbb{Z}$.

Resolución

Por la fórmula de De Moivre

$$z^n=\cos n\phi+i\operatorname{sen} n\phi$$

Luego,

$$e^{iz^n}=e^{i(\cos n\phi+i\operatorname{sen} n\phi)}=e^{i(\cos n\phi-\operatorname{sen} n\phi)}$$

$$e^{iz^n}=e^{-\operatorname{sen} n\phi}\cdot e^{i\cos n\phi}$$

$$e^{iz^n}=e^{-\operatorname{sen} n\phi}[\cos(\cos n\phi)+i\operatorname{sen}(\cos n\phi)]$$

$$\therefore\ \operatorname{Re}\left(e^{iz^n}\right)=e^{-\operatorname{sen} n\phi}[\cos(\cos n\phi)]$$

Problema 29

Sea $z=i$; halle los complejos siguientes:

a. $\left(z^{1/2}\right)^3$

b. $\left(z^3\right)^{1/2}$

Resolución

a. Al complejo z lo representamos en forma exponencial

$$|z|=1 \ \wedge \ \operatorname{Arg}(z)=\frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow z=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Luego $z^{\frac{1}{2}}=e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)}$,

donde $k=0;\ 1$.

Para $k=0$; $z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}$

Para $k=1$; $z_2=e^{i\frac{5\pi}{4}}$

Luego $z_1^3=e^{i\frac{3\pi}{4}}$; $z_2^3=e^{i\frac{15\pi}{4}}=e^{i\frac{7\pi}{4}}$

b. Como $z=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

entonces $z^3=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^3=e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Luego

$$\left(z^3\right)^{1/2}=e^{\frac{i\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)}{2}}$$

donde $k=0;\ 1$

Para $k=0$: $z_1=e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Para $k=1$: $z_2=e^{i\frac{7\pi}{2}}$

Problema 30

Determine aquel número n entero positivo múltiplo de cuatro que verifica la igualdad

$$i+2i^2+3i^3+4i^4+\ldots+ni^n=64-64i,$$

tal que $i=(0;\ 1)$.

Resolución

De la condición

$$\underbrace{i+2i^3+3i^3+4i^4+\ldots+ni^n}_{m}=64(1-i)$$

$$\rightarrow \ m=i+2i^2+3i^3+4i^4+\ldots+ni^n \qquad \text{(I)}$$

Multiplicando por i

$$im=i^2+2i^3+3i^4+4i^5+\ldots+ni^{n+1} \qquad \text{(II)}$$

Luego (I) – (II)

$$(1-i)m=\underbrace{\cancel{i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^n}}_{0}-ni^{n+1}$$

Como $n=\overset{\circ}{4}$

tenemos

$$(1-i)m=-ni \ \rightarrow \ m=\frac{-ni}{1-i}$$

Reemplazando el valor de m en la condición

$$\frac{-ni}{1-i}=64(1-i) \ \rightarrow \ -ni=64(1-i)^2$$

$$\rightarrow \ -ni=64(-2i) \ \rightarrow \ -ni=-128i$$

$$\therefore \ n=128$$

Problema 31

Los números complejos z y w tienen argumentos que varían de 0 a 2π radianes y además verifican las relaciones

$$|w|=|z|;\ z+\bar{z}=\sqrt{2};\ iz=\bar{z},$$

$$\arg(z)-\arg(w)=\frac{5\pi}{3}.$$

Calcule $E=\operatorname{Im}(z)+\operatorname{Re}(w)$.

Resolución

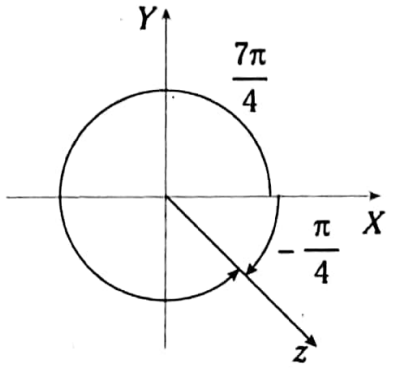
Sea $z=|z|e^{i\theta} \rightarrow \bar{z}=|z|e^{-i\theta}$

Reemplazando en $iz=\bar{z}$ se tiene

$$i|z|e^{i\theta}=|z|e^{-i\theta}\ ;\ |z|\neq 0$$

$$\rightarrow\ e^{-2i\theta}=e^{i\frac{\pi}{2}} \leftrightarrow -2\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow\ \theta=-\frac{\pi}{4}$$



Pero $\theta \in [0; 2\pi\rangle$

$$\rightarrow\ \theta=\frac{7\pi}{4}$$

$$\therefore\ \arg(z)=\frac{7\pi}{4}$$

Luego calculamos el módulo de z a partir de $z+\bar{z}=\sqrt{2}$. Así tenemos

$$|z|\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\sqrt{2}$$

$$|z|\left(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta+\cos(-\theta)+i\operatorname{sen}(-\theta)\right)=\sqrt{2}$$

$$|z|2\cos\theta=\sqrt{2}$$

Ahora reemplazamos el valor de θ

$$2|z|\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

$$\rightarrow\ 2|z|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2} \rightarrow |z|=1$$

Luego

$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Entonces se concluye que $|w|=1$, ya que $|z|=|w|$.

Cálculo de arg(w)

Dato: $\arg(z)-\arg(w)=\frac{5\pi}{3}$

Reemplazando el valor de arg(z)

$$\arg(w)=\frac{7\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}=\frac{\pi}{12}$$

$$\rightarrow\ w=|w|e^{i\frac{\pi}{12}}=e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\rightarrow\ w=\cos\frac{\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}i$$

$$\therefore\ E=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Problema 32

Halle el mayor número de dos cifras que verifica

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n=\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2};\ i=\sqrt{-1}$$

Resolución

Expresándolo en forma polar a las bases

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\ \ \forall\ k\in\mathbb{Z}$$

Entonces

$$\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)^n=\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$$

$$=\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)+i\,\text{sen}\left(n\frac{\pi}{6}\right)=\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$$

$$=\text{cis}\left(n\frac{\pi}{6}\right)=\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$$

$$\rightarrow\ n\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ \leftrightarrow\ n=2+12k$$

$$\therefore\ n_{\text{mayor}}=98$$

Problema 33

Sabiendo que z_1 y z_2 representan un número real y un imaginario puro, respectivamente, donde

$$z_1=\frac{a+b+2i}{a-b-3i}=k\ ;\ \ z_2=\frac{a+(b+8)i}{a-bi}=mi\ ,$$

calcule $a-b$.

Resolución

Efectuando tenemos

1. $z_1=(a+b)+2i=(a-b)k-3ki$

2. $z_2=a+(b+8)i=bm+ami$

De las igualdades se tiene

$$\text{De 1}\begin{cases} a+b=(a-b)k & \text{(I)}\\ 3k=-2 & \text{(II)}\end{cases}$$

$$\text{De 2}\begin{cases} a=bm & \text{(III)}\\ (b+8)=am & \text{(IV)}\end{cases}$$

De (II)

$$k=-\frac{2}{3}$$

En (I)

$$(a+b)=-\frac{2}{3}(a-b)$$

$$\leftrightarrow\ b=-5a \qquad \text{(V)}$$

De (II) y (IV)

$$\frac{a}{b+8}=\frac{b}{a};\ m\neq 0 \qquad \text{(VI)}$$

$$\frac{a}{-5a+8}=\frac{-5a}{a}\ \leftrightarrow\ a\neq 0\ \wedge\ a=\frac{5}{3}$$

$$\rightarrow\ b=-\frac{25}{3}$$

$$\therefore\ a-b=\frac{30}{3}=10$$

Nótese que si $a=0$ entonces z_2 no resulta ser imaginario puro

$\therefore\ a\neq 0$

Problema 34

Halle el argumento principal del complejo z, donde

$$z=\frac{\left[1-i+\cfrac{1}{1+i+\cfrac{1}{1-i+\cfrac{1}{1+i+\cfrac{1}{\vdots}}}}\right]}{\left[1+i+\cfrac{1}{1-i+\cfrac{1}{1+i+\cfrac{1}{1-i+\cfrac{1}{\vdots}}}}\right]}$$

Resolución

Hacemos $z=z_1\div z_2$, en la que

$$z_1=1-i+\frac{1}{z_2} \qquad \text{(I)}$$

$$z_2=1+i+\frac{1}{z_1} \qquad \text{(II)}$$

En (I)

$$z_1-\frac{1}{z_2}=1-i \leftrightarrow \frac{z_1z_2-1}{z_2}=1-i \qquad \text{(III)}$$

En (II)

$$z_2-\frac{1}{z_1}=1+i \leftrightarrow \frac{z_1z_2-1}{z_1}=1+i \qquad \text{(IV)}$$

De (III) ÷ (IV)

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-i}{1+i}=-i \rightarrow z=\frac{z_1}{z_2}=-i$$

$$\therefore \quad \arg(z)=\frac{3\pi}{2}$$

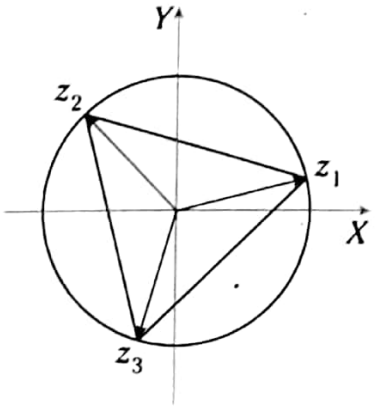
Problema 35

Si z_1; z_2; z_3 son tales que sus afijos forman un triángulo equilátero y además son las raíces cúbicas de un número complejo, calcule

$$E=\frac{z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{z_1^2+z_2^2+z_3^2}.$$

Resolución

Como los afijos de z_1; z_2; z_3 al ser unidos forman un triángulo equilátero y tienen el mismo módulo, entonces se encuentran en el borde de una circunferencia de radio igual al módulo, como se indica en la figura.



De la figura se deduce que

$$z_1+z_2+z_3=0 \text{ (ver la radicación de complejos)}$$

$$\rightarrow \quad z_1^2+z_2^2+z_3^2=-2(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)$$

$$\therefore \quad E=-\frac{1}{2}$$

Problema 36

Halle el área del polígono regular formado al unir los afijos de las raíces cuartas del complejo

$$z=\sqrt{72-2\sqrt{3}}+\sqrt{72+2\sqrt{3}}i;\ i=\sqrt{-1}$$

Resolución

Sean z_1; z_2; z_3; z_4 las raíces cuartas de z, entonces

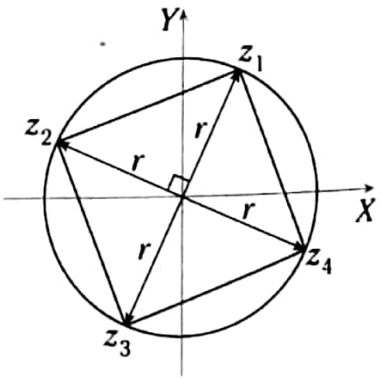
$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=\sqrt[4]{|z|}$$

Pero

$$|z|=\sqrt{\sqrt{72-2\sqrt{3}}^2+\sqrt{72+2\sqrt{3}}^2}=12$$

$$\rightarrow \quad |z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=\sqrt[4]{12}$$

Además los afijos de z_1; z_2; z_3; z_4 se encuentran en la circunferencia de centro $C=(0;0) \wedge r=\sqrt[4]{12}$.



Del gráfico, el diámetro del cuadrado es $2r=2\sqrt[4]{12}$.

Por geometría, el área del cuadrado es

$$S_T=\left(\frac{2r}{\sqrt{2}}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt[4]{12}}{\sqrt{2}}\right)^2=4\sqrt{3}\ u^2$$

Problema 37

Si ϕ es una raíz séptima compleja de la unidad real, calcule el valor de M.

$M=\phi^6+\phi^{14}+\phi^{22}+\phi^{30}+\ldots$ 48 sumandos

Resolución

Como ϕ es la raíz séptima de la unidad, entonces se tiene que $\phi^7=1;\ \phi\neq 1$

$\rightarrow\ \phi^7-1=0$

$\rightarrow\ (\phi-1)(\phi^6+\phi^5+\phi^4+\phi^3+\phi^2+\phi+1)=0$

Pero $\phi\neq 1$

$\rightarrow\ \phi^6+\phi^5+\phi^4+\phi^3+\phi^2+\phi+1=0$

Entonces

$$M=\underbrace{\phi^6+1+\phi+\phi^2+\phi^3+\phi^4+\phi^5}_{0}+$$

$$+\underbrace{\phi^6+1+\phi+\phi^2+\phi^3+\phi^4+\phi^5}_{0}+$$

$$\underbrace{+\phi^6+1+\phi+\phi^2+\phi^3+\phi^4+\phi^5}_{0}-\phi^5=-\phi^5$$

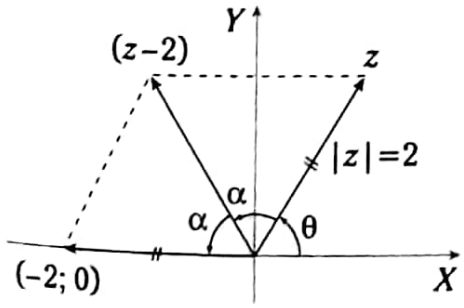
$\therefore\ M=-\phi^5$

Problema 38

Dado el complejo z de módulo 2 y argumento $\theta\in\langle 0;\pi\rangle$, halle el argumento principal de $z-2$.

Resolución

Se trata de un problema geométrico, por ello lo ubicamos en el plano gausseano



Se observa

$$\text{Arg}(z-2)=\theta+\alpha$$

Además

$$2\alpha+\theta=\pi\ \rightarrow\ \alpha=\frac{\pi-\theta}{2}$$

$$\rightarrow\ \text{Arg}(z-2)=\theta+\frac{\pi-\theta}{2}=\frac{\theta+\pi}{2}$$

$$\therefore\ \text{Arg}(z-2)=\frac{\theta+\pi}{2}$$

Problema 39

Si se cumple que:

$x=a+b;$

$y=aw+bw^2;$

$z=aw^2+bw;\ ab\neq 0,$

calcule $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{ab}$, si $w^3=1$.

Resolución

De las condiciones:

$$x^2=a^2+b^2+2ab;$$

$$y^2=a^2w^2+b^2w^4+2abw^3=a^2w^2+b^2w+2ab;$$

$$z^2=a^2w^4+b^2w^2+2abw^3=a^2w+b^2w^2+2ab.$$

Entonces

$$x^2+y^2+z^2=a^2\underbrace{(1+w+w^2)}_{0}+b^2\underbrace{(1+w+w^2)}_{0}+6ab$$

$$\rightarrow\ x^2+y^2+z^2=6ab$$

$$\therefore\ \frac{x^2+y^2+z^2}{ab}=\frac{6ab}{ab}=6$$

Problema 40

Si el complejo z se define como

$$z=\frac{\sqrt{\text{sen}\,\alpha+i\sqrt{\cos\alpha}}-i\sqrt{\text{sen}\,\alpha-i\sqrt{\cos\alpha}}}{\sqrt{\text{sen}\,\alpha+i\sqrt{\cos\alpha}}+i\sqrt{\text{sen}\,\alpha-i\sqrt{\cos\alpha}}},$$

tal que $\alpha\in$ IC, halle Re(z).

Resolución

Hacemos

$$a=\sqrt{\operatorname{sen}\alpha+i\sqrt{\cos\alpha}} \rightarrow a^2=\operatorname{sen}\alpha+i\sqrt{\cos\alpha}$$

$$b=\sqrt{\operatorname{sen}\alpha-i\sqrt{\cos\alpha}} \rightarrow b^2=\operatorname{sen}\alpha-i\sqrt{\cos\alpha}$$

Además $\cos\alpha>0$; $\operatorname{sen}\alpha>0$

Reemplazando en z tenemos

$$z=\frac{a-bi}{a+bi}=\frac{(a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{(a^2-b^2)-2abi}{a^2+b^2}$$

Pero $a^2-b^2=2\sqrt{\cos\alpha}i$; $a^2+b^2=2\operatorname{sen}\alpha$

$$ab=\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos\alpha}$$

Regresando a las variables originales

$$z=\frac{\left[2\sqrt{\cos\alpha}-2\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos\alpha}\right]i}{2\operatorname{sen}\alpha}$$

$$z=\frac{\left[\sqrt{\cos\alpha}-\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos\alpha}\right]i}{\operatorname{sen}\alpha}$$

El complejo z es imaginario puro

$\therefore\ \operatorname{Re}(z)=0$

Problema 41

Siendo z un complejo cuyo argumento es θ que verifica

$\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2+\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2=1$, donde $\bar{z}$ es el conjugado de z,

calcule $H=\tan\theta+\cot\theta$; además $\theta\in\left\langle\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Resolución

Sea $z=|z|e^{i\theta} \rightarrow \bar{z}=|z|e^{-i\theta}$

Reemplazando en la condición

$$\left[\frac{|z|e^{i\theta}}{|z|e^{-i\theta}}\right]^2+\left[\frac{|z|e^{-i\theta}}{|z|e^{i\theta}}\right]^2=1$$

$\rightarrow\ e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}=1$

Expresando en forma polar

$$\cos4\theta+i\operatorname{sen}4\theta+\cos4\theta-i\operatorname{sen}4\theta=1$$

$\rightarrow\ 2\cos4\theta=1$

$$\cos4\theta=\frac{1}{2}$$

$$4\theta=60^\circ \ \vee\ 4\theta=300^\circ$$

$$\theta=15^\circ \ \vee\ \theta=75^\circ$$

Pero $\theta\in\left\langle\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$

Entonces nos quedamos con $\theta=75^\circ$

Luego $H=\cot\theta+\tan\theta=\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=4$

$\therefore\ H=4$

Problema 42

Dado $z=-1+\sqrt{3}i$, halle w,

tal que $|z+w|=|z|=|w|$

Resolución

$|z|=|-1+\sqrt{3}i|=2$

Luego, en la condición

$$|z+w|^2=4;\ |z|=|w|=2$$

$$(z+w)(\overline{z+w})=4$$

$$(z+w)(\bar{z}+\bar{w})=4$$

Efectuando

$$z\cdot\bar{z}+z\cdot\bar{w}+w\cdot\bar{z}+w\cdot\bar{w}=4$$

$$|z|^2+z\cdot\bar{w}+w\cdot\bar{z}+|w|^2=4$$

$\rightarrow\ z\cdot\bar{w}+w\cdot\bar{z}+4=0$

Multiplicando por wz

$$z^2|w|^2+w^2|z|^2+4wz=0;$$

pero $|z|^2=|w|^2=4$

$\rightarrow\ w^2+zw+z^2=0$

$$w=\frac{-z\pm\sqrt{3}iz}{2}=\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)z$$

Reemplazando el valor de z

$$w=\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1+\sqrt{3}i)$$

$$w(+)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1+\sqrt{3}i)=-1-\sqrt{3}i$$

$$w(-)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1+\sqrt{3}i)=2$$

Problema 43

Halle la forma cartesiana del siguiente complejo

$$W=\frac{(\cos 12°+i\,\text{sen}\,12°)^4\left[\sqrt{2}(\cos 8°+i\,\text{sen}\,8°)\right]^{11}}{(\cos 6°+i\,\text{sen}\,6°)^{11}(\text{sen}\,80°+i\cos 80°)}.$$

Resolución

- $(\cos 12°+i\text{sen}12°)^4=\cos 48°+i\text{sen}48°$
- $\left[\sqrt{2}(\cos 8°+i\,\text{sen}\,8°)\right]^{11}=\sqrt{2}^{11}(\cos 88°+i\,\text{sen}\,88°)$
- $(\cos 6°+i\text{sen}6°)^{11}=\cos 66°+i\text{sen}66°$
- $\text{sen}80°+i\cos 80°=\cos 10°+i\text{sen}10°$

Luego tenemos

$$W=\frac{\text{cis}\,48°\cdot\sqrt{2}^{11}\,\text{cis}\,88°}{\text{cis}\,66°\cdot\text{cis}\,10°}=\frac{\sqrt{2}^{11}\cdot\text{cis}\,136°}{\text{cis}\,76°}$$

$$=32\sqrt{2}\cdot\text{cis}\,60°$$

$$=32\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16\sqrt{2}(1+\sqrt{3}i)$$

$$\therefore\ W=16\sqrt{2}(1+\sqrt{3}i)$$

Problema 44

Simplifique y represente fasorialmente

$$H=\left(\frac{1+\text{sen}\,\theta+i\cos\theta}{1+\text{sen}\,\theta-i\cos\theta}\right)^n;\ \forall\, n\in\mathbb{Z}.$$

Además $i=(0;1)$.

Resolución

Recordando la división de complejos, multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$H=\left[\left(\frac{1+\text{sen}\,\theta+i\cos\theta}{1+\text{sen}\,\theta-i\cos\theta}\right)\left(\frac{1+\text{sen}\,\theta+i\cos\theta}{1+\text{sen}\,\theta+i\cos\theta}\right)\right]^n$$

$$H=\left[\frac{(1+\text{sen}\,\theta)^2+2i(1+\text{sen}\,\theta)\cos\theta+i^2\cos^2\theta}{(1+\text{sen}\,\theta)^2-i^2\cos^2\theta}\right]^n$$

$$H=\left[\frac{2\,\text{sen}\,\theta(1+\text{sen}\,\theta)+2i(1+\text{sen}\,\theta)\cos\theta}{2(1+\text{sen}\,\theta)}\right]^n$$

$$H=\left[\frac{2(1+\text{sen}\,\theta)(\text{sen}\,\theta+i\cos\theta)}{2(1+\text{sen}\,\theta)}\right]^n$$

$$\rightarrow\ \forall\ \text{sen}\theta\neq-1:\ H=(\text{sen}\theta+i\cos\theta)^n$$

$$\rightarrow\ H=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)^n$$

$$\rightarrow\ H=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\,\text{sen}\,n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\therefore\ H=\text{cis}\left[n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$$

Problema 45

Halle el valor más simple de

$$A=\underbrace{(1+w)^2(1+w^2)^2(1+w^4)^4(1+w^5)^5(1+w^6)^6(1+w^8)^8\ldots}_{2n\ \text{paréntesis}}$$

Además $w^3=1$.

Resolución

Como

$$w^3=1\ \rightarrow\ \begin{cases}1+w+w^2=0\\ w^{3k+r}=w^r\\ 1+w=-w^2\\ 1+w^2=-w\end{cases}$$

Reemplazando obtenemos

$$A=\underbrace{(1+w^2)^2(-w)^3(1+w)^4(1+w^2)^5(1+w)^6(1+w^2)^7\ldots}_{2n \text{ paréntesis}}$$

$$\rightarrow\ A=(-w^2)^2(-w)^3(-w^2)^4(-w)^5(-w^2)^6(-w)^7\ldots$$

$$\rightarrow\ A=w^4(-w^3)(w^8)(-w^5)(w^{12})(-w^7)\ldots$$

Agrupando convenientemente

$$A=\underline{w(-1)}\,\underline{(w^2)(-w^2)}\,\underline{(1)(-w)}\ldots$$

se tiene

$$A=\underbrace{(-w)(-w)(-w)\ldots}_{n \text{ veces}}=(-w)^n$$

$$\therefore\ A=(-w)^n$$

Problema 46

Si $w\neq\pm1$ es una raíz n-ésima de la unidad, calcule $S=w+w^3+w^5+\ldots+w^{2n-1}$.

Resolución

Multiplicando el complejo por w obtenemos

$$w\cdot S=w^2+w^4+w^6+\ldots+w^{2n}$$

Entonces

$$(1+w)S=w+w^2+w^3+w^4+\ldots+w^{2n}$$

$$(1+w)S=w(1+w+w^2+w^3+\ldots+w^{2n-1})$$

$$(1+w)S=w\left(\frac{1-w^{2n}}{1-w}\right)$$

Pero $w^n=1\ \rightarrow\ w^{2n}=1$

Reemplazando se obtiene $S=0$.

Problema 47

Exprese cada ecuación en términos de los complejos conjugados.

a. $3x+2y=5$

b. $x^2+y^2=16$

Considere $z=x+yi$

Resolución

a. Como $z=x+yi\ \rightarrow\ \bar{z}=x-yi$

De donde $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$; $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

Reemplazando en $3x+2y=5$

$$3\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)+2\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)=5$$

Efectuando se tiene

$$(3i+2)z+(3i-2)\bar{z}=10i$$

b. De (a) $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$; $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

Reemplazando en $x^2+y^2=16$

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2=16$$

Simplificando se tiene $z\cdot\bar{z}=16$

Otro método

De la condición

$$x^2+y^2=16 \qquad (*)$$

Factorizando

$$(x+yi)(x-yi)=16$$

Como $z=x+yi\ \wedge\ \bar{z}=x-yi$,

luego: $z\cdot\bar{z}=16$

Problema 48

Dada una familia de números complejos que cumple

$$4(z-3)(\bar{z}-3)=|z|^2+15,$$

seleccione aquel que tenga mayor argumento principal e indique su módulo, tal que z se encuentre en el primer cuadrante.

Resolución

$$4(z-3)(\bar{z}-3)=|z|^2+15$$

$$\rightarrow 4(z-3)\overline{(z-3)}=|z|^2+15$$

$$\rightarrow 4|z-3|^2=|z|^2+15$$

Luego, haciendo $z=x+yi$

$$4|x+yi-3|^2=|x+yi|^2+15$$

$$\rightarrow 4\left[(x-3)^2+y^2\right]=x^2+y^2+15$$

Efectuando operaciones

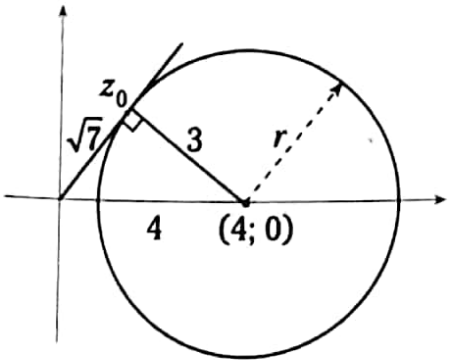
$$x^2+y^2-8x+7=0$$

Completando cuadrados

$$x^2-8x+16+y^2=9$$

$$\rightarrow (x-4)^2+y^2=3^2$$

Se observa que tenemos una circunferencia de centro $\mathscr{C}_0=(4;\,0)$ y radio $r=3$.



Del gráfico se observa que z_0 es el complejo que tiene mayor argumento en el primer cuadrante.

$\therefore\ |z|=\sqrt{7}$

Problema 49

Represente gráficamente el conjunto de valores de z, tal que $\left|\dfrac{z-2}{z+2}\right|\leq 3$.

Resolución

Sea $z=x+yi$.

Reemplazando en el dato

$$\left|\frac{x-2+yi}{x+2+yi}\right|\leq 3$$

$$\rightarrow |(x-2)+yi|\leq 3|(x+2)+yi|$$

$$\rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}\leq 3\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

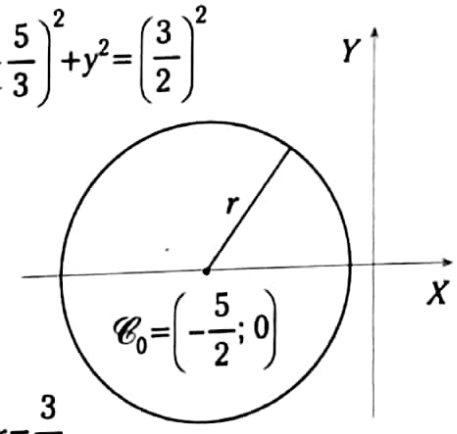
$$\rightarrow (x-2)^2+y^2\leq 9\left[(x+2)^2+y^2\right]$$

Efectuando operaciones y completando cuadrados

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+y^2\geq\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Graficando se tiene

$$\left(x+\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$$



$$r=\frac{3}{2}$$

Test 12

1. Sea el número complejo
$z=(13-5i)+(15i-4)-(-6-2i)$.
Calcule el valor de $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)$.

A) 27 B) 12 C) 17
D) 19 E) 37

2. Calcule la parte imaginaria del complejo z.

$$z=(4-i)\left\{(-1+5i)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}i\right)\right\}$$

A) $\frac{7}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{11}{12}$
D) $\frac{55}{3}$ E) $\frac{58}{3}$

3. Sean $z_1=1-2i$; $z_2=-2+i$.
Indique el número complejo que resulte de $(z_1+z_2)^{-2}$.

A) $-\frac{i}{2}$ B) $\frac{i}{2}$ C) $2i$
D) $-2i$ E) $\frac{3}{4}i$

4. Halle el número complejo z, tal que
$2z+(5-3i)=\bar{z}-(6i-2)$.

A) $3+i$
B) $-3-i$
C) $5-2i$
D) $3-i$
E) $-3+i$

5. Calcule el módulo del número complejo

$$z=\frac{(1+3i)^5(3-4i)}{(3-i)^3}.$$

A) $5\sqrt{10}$ B) $10\sqrt{5}$ C) 50
D) $\sqrt{50}$ E) 15

6. Indique cuál es el argumento principal del número complejo z, tal que

$$z=\frac{1-\sqrt{3}i}{(4+3i)^5}.$$

A) 45° B) 37° C) 115°
D) 35° E) 112°

7. Exprese en su forma polar el número complejo

$$z=\frac{(1+i)^2(\sqrt{3}-i)}{\sqrt{3}+i}.$$

A) 2cis15°
B) 2cis25°
C) 2cis99°
D) 2cis17°
E) 2cis30°

8. ¿Cuál es la relación entre x e y reales, tales que el número complejo $z=\frac{2x-5i}{7+yi}$ es un imaginario puro?

A) $y=\frac{14}{5x}$ B) $y=6x$ C) $y=\frac{14}{5}x$
D) $y=x$ E) $y=-7x$

9. ¿Cuál es el módulo del número complejo z de mayor argumento principal, tal que $|z-4i|\leq 1$?

A) 5 B) $\sqrt{17}$ C) $\sqrt{15}$
D) $\sqrt{12}$ E) $\sqrt{5}$

10. ¿Cuál es el módulo del número complejo z, tal que

$$z=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{\left(1+\sqrt{3}i\right)}?$$

A) $\frac{\pi}{3}$

B) $\sqrt[3]{e}$

C) $\sqrt[3]{e}^{\pi}$

D) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

E) $e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{4}}$

11. ¿Cuál es el argumento principal del número complejo z tal que $z=\left(1-\sqrt{3}i\right)^{i}$?

A) $\ln 4$

B) $2\ln 2$

C) $\ln 2$

D) e^{2}

E) e^{-2}

12. Sea z un número complejo tal que $z\neq 1$. ¿Cuál es el valor mínimo de $|z+1|+|z-3|$?

A) 2 B) 3 C) 1

D) $\sqrt{2}$ E) 4

Claves

1 A	3 A	5 C	7 E	9 B	11 C
2 E	4 B	6 C	8 C	10 E	12 A

Problemas PROPUESTOS

Nivel I

1. Efectúe algebraica y gráficamente las operaciones indicadas.

   I. $(4+6i)+(3-2i)$

   II. $(5-3i)-(-3+i)$

   III. $(-2+2i)-(-2-i)$

   IV. $(4-3i)+(-6-9i)$

   Donde: $i=\sqrt{-1}$

2. Escriba los siguientes números complejos en forma polar.

   I. $4+4i$

   II. $3-\sqrt[3]{3}i$

   III. $-12-12i$

   IV. $\sqrt{3}i$

   V. $12-5i$

   VI. $-4i$

3. Escriba los siguientes números complejos en forma cartesiana.

   I. $\sqrt{2}(\cos 45°+i\operatorname{sen}45°)$

   II. $12(\cos 135°-i\operatorname{sen}135°)$

   III. $4(\cos 180°+i\operatorname{sen}180°)$

   IV. $5\sqrt{3}\,\underline{|210°}$

   V. $18\operatorname{cis}75°$

4. Efectúe las operaciones indicadas, expresando los resultados en forma binómica.

   I. $[16(\cos 15°+i\operatorname{sen}15°)][2(\cos 75°+i\operatorname{sen}75°)]$

   II. $4\operatorname{cis}(13°)\operatorname{cis}(27°)2\operatorname{cis}(20°)$

   III. $5\underline{|16°}\cdot 2\underline{|19°}\cdot\underline{|25°}$

   IV. $\dfrac{12(\cos 16°+i\operatorname{sen}16°)}{3(\cos 44°+i\operatorname{sen}44°)[2(\cos 62°+i\operatorname{sen}62°)]}$

5. Halle algebraica y gráficamente el producto y cociente de los siguientes números complejos.

   I. $(-2+2\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}-2i)$

   II. $\dfrac{4-4i}{\sqrt{3}-i}$

6. Halle las potencias indicadas de los números complejos siguientes, expresando los resultados en forma cartesiana.

   I. $2(\cos 15°+i\operatorname{sen}15°)^6$

   II. $[4(\cos 20°+i\operatorname{sen}20°)]^3$

   III. $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}i\right)^{10}$

7. Halle todas las raíces indicadas en cada caso.

   I. $(\cos 135°+i\operatorname{sen}135°)^{1/2}$

   II. $[32(\cos 200°+i\operatorname{sen}200°)]^{1/5}$

   III. $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$

   IV. $\sqrt[5]{2-2\sqrt{3}i}$

8. Calcule los números complejos siguientes:

   I. $(1+2i)^6$

   II. $(2+i)^7+(2-i)^7$

9. Sean los números complejos
   $z_1=(2;3)$, $z_2=(-3;5)$, $z_3=(-1;2)$.
   Calcule $2z_1+3z_2-z_3$ y dé como respuesta la segunda componente del resultado.

   A) 7 B) 6 C) 13
   D) 21 E) 19

10. Sean los números complejos
    $z_1=(5;-2)$, $z_2=(3;4)$.
    Sume las componentes del resultado de $z_1\cdot z_2$.

    A) 20 B) 35 C) 37
    D) 17 E) 29

11. Al representar geométricamente los números complejos

$z_1=(\sqrt{2}; -3)$ $\quad z_2=(-4; -1)$

$z_3=(-2; 3)$ $\quad z_4=(4; 5)$

los afijos de z_1, z_2, z_3, z_4, en ese orden, se encuentran ubicados respectivamente en los cuadrantes:

A) III-IV-I-II
B) I-II-IV-III
C) IV-III-II-I
D) II-I-IV-III
E) III-II-I-IV

12. Si z_1 y z_2 son complejos iguales, donde $z_1=(3-2x; 7)$, $z_2=(9; 4y-5)$, calcule el valor de $2x+3y$.

A) 3 B) 15 C) -3
D) 7 E) 9

13. Halle el equivalente de $(1+i)^{50}$.

A) $-2^{25}i$ B) $2^{25}i$ C) $2^{50}i$
D) -2^{50} E) $-2^{50}i$

14. Simplifique e indique el equivalente de

$$\frac{i^{375}+i^{421}+2i^{793}}{i^{662}+2i^{276}}.$$

A) i B) $4i$ C) $-2i$
D) $-4i$ E) $(1+i)^2$

15. El número complejo $z=\dfrac{3+5i}{2+xi}$ representa a un número complejo real, cuyo equivalente es $z=m$. Calcule el valor de m.

A) $\dfrac{10}{3}$ B) $\dfrac{15}{2}$ C) $\dfrac{2}{3}$
D) $\dfrac{3}{2}$ E) 60

16. Si el número complejo $w=\dfrac{5-2i}{x+yi}$ representa a un número imaginario puro, ¿cuál es el valor de $2y-5x$?

A) 1 B) 0 C) -1
D) 3 E) $\dfrac{2}{5}$

17. Sean los números complejos

$z_1=-2+3i$, $z_2=5-i$.

¿Cuál es el módulo del número complejo $2z_1+3z_2+1+2i$?

A) $\sqrt{13}$ B) 13 C) 15
D) $\sqrt{17}$ E) $\sqrt{168}$

18. ¿Cuál es el módulo del número complejo $\sqrt{3-\sqrt{-16}}$?

A) $\sqrt{17}$ B) 5 C) $\sqrt{5}$
D) 7 E) 3

19. ¿Cuál es el módulo del número complejo z, tal que $z=\dfrac{(45+3i)(\sqrt{3}+i)^3}{\sqrt{i}+2\sqrt{2}\,(1+15i)}$?

A) $\sqrt{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$
D) $8\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

20. Exprese $z=\sqrt{2}+\sqrt{6}i$ en su forma polar.

A) $2\sqrt{2}\text{cis}\dfrac{\pi}{3}$ B) $\sqrt{8}\text{cis}\dfrac{\pi}{6}$ C) $4\text{cis}\dfrac{\pi}{3}$
D) $6\text{cis}\dfrac{\pi}{3}$ E) $\sqrt{12}\text{cis}\dfrac{\pi}{3}$

Nivel II

21. Halle el argumento del número complejo $z=1+3i$.

A) $\frac{3\pi}{5}$ B) $\frac{5\pi}{6}$ C) arctan3

D) $\arctan\frac{1}{3}$ E) $\frac{\pi}{12}$

22. Halle el argumento del número complejo z tal que $z=(3+4i)^3$.

A) $\frac{53\pi}{60}$ B) $\frac{37\pi}{60}$ C) $\frac{53\pi}{180}$

D) $\frac{37\pi}{180}$ E) $\frac{57\pi}{60}$

23. ¿Cuál de los siguientes no es argumento de $z=1+i$?

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{5\pi}{4}$ C) $\frac{9\pi}{4}$

D) $\frac{17\pi}{4}$ E) $\frac{25\pi}{4}$

24. ¿Cuál es el argumento del número complejo z, tal que $z=\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$?

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{5\pi}{6}$ C) $\frac{5\pi}{12}$

D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{5}$

25. Sea z un número complejo de argumento θ tal que $|z|=1 \wedge \theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$. ¿Cuál es el argumento de $z+1$?

A) 2θ B) $\frac{\pi}{2}-\theta$ C) $\frac{\theta}{2}$

D) $\frac{\pi-\theta}{2}$ E) $\frac{\pi}{4}+\theta$

26. Calcule el área de la región formada por los números complejos z tales que $1<|z|<\sqrt{3}$.

A) $8\pi\ u^2$ B) $2\pi\ u^2$ C) $(\sqrt{3}-1)\pi\ u^2$

D) $4\pi\ u^2$ E) $3\pi\ u^2$

27. Sea z un número complejo de argumento α. ¿Cuál es el equivalente de $z^n-(\bar{z})^n$?

A) $|z|^n i\cos n\alpha$

B) $|z|^n i\operatorname{cis} n\alpha$

C) $2|z|^n i\cos n\alpha$

D) $2|z|^n i\operatorname{sen} n\alpha$

E) $2|z| i\operatorname{sen}\frac{n}{2}\alpha$

28. Dada la desigualdad

$|z\cdot\bar{z}-3|\leq 2,\ z\in\mathbb{C}$,

¿Cuál es el mayor valor del módulo de z?

A) 5 B) $\sqrt{5}$ C) 1

D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{11}$

29. Dada la igualdad $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$, además $\{x; y\}\in\mathbb{R}$. Halle los valores de x e y.

A) $x=1; y=4$

B) $x=-1; y=4$

C) $x=-\frac{4}{11}; y=\frac{5}{11}$

D) $x=\frac{11}{4}; y=\frac{11}{5}$

E) $x=\frac{4}{11}; y=\frac{5}{11}$

30. Si $i=(0;1)$, calcule el valor de E.

$$E=\frac{x^4+4}{(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)};\ i=\sqrt{-1}$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) −1 E) 3

31. Sean los números complejos $z_1=a+bi$; $z_2=c+di$, donde $\{a;b;c;d\}\in\mathbb{R}$. ¿Cuál debe ser la condición para que el cociente $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ sea imaginario puro.

A) $bc=ad$
B) $ac+bd=0$
C) $a+b=c+d$
D) $ab=cd$
E) $bd=ac$

32. Calcule el valor de $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, donde n es un entero positivo.

A) −2 B) $2i^n$ C) $-2i^{n+1}$
D) $-2i$ E) $2i^{n+1}$

33. Indique lo que obtiene luego de efectuar

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{30}}{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{30}}.$$

A) 1 B) −1 C) i
D) $-i$ E) $\frac{1}{2}$

34. Sea $W=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; simplifique T.

$$T=\frac{(a+b)(a+bw)(a+w^2b)}{(aw^2+bw)(bw^2+aw)}$$

A) $\frac{a}{b}$ B) $a-b$ C) $\frac{a+b}{a-b}$
D) a^3-b^3 E) $a+b$

35. Si $\sqrt{a+bi}=\pm(\alpha+\beta i)$, ¿a qué es igual $\sqrt{-a-bi}$?

A) $\alpha-\beta i$
B) $\alpha+\beta i$
C) $-\beta+\alpha i$
D) $\beta-\alpha i$
E) $\pm(-\beta+\alpha i)$

36. Si $x+yi=(s+ti)^n$; $n\in\mathbb{Z}\ \wedge\ \{x;y;s;t\}\in\mathbb{R}$, calcule el valor de $\frac{(s^2+t^2)^n}{x^2+y^2}$.

A) 1 B) 0 C) n
D) 3 E) 2

37. Si z y z' son dos números complejos; $u=\sqrt{z\cdot z'}$, calcule el valor de K.

$$K=\frac{\left|\frac{z+z'}{2}-u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|}{|z|+|z'|}$$

A) 4 B) 1 C) 16
D) 2 E) 8

38. Si como resultado de efectuar una cantidad finita de operaciones racionales (sumar, restar, multiplicar y dividir) con los números x_1; x_2; x_3; ...; x_n resulta el número u, calcule el valor de efectuar las mismas operaciones con los números conjugados $\bar{x}_1$; $\bar{x}_2$; $\bar{x}_3$; ...; $\bar{x}_n$.

Observación: u^* es opuesto de u.

A) $\bar{u}$ B) u^* C) u
D) $u\cdot\bar{u}$ E) $\bar{u}\cdot u^*$

39. Si $\phi(a+1)=a\phi(a)$; $\phi(1)=1$, determine el equivalente de $P=i^{\phi(1)}+i^{\phi(2)}+i^{\phi(3)}+\ldots+i^{\phi(n+12)}$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

A) $n+7+i$ B) $n+7-2i$ C) $n+5-2i$
D) $n+6+2i$ E) $n+8-2i$

40. Halle el equivalente de
$\phi=i+2i^2+5i^5+8i^8+\ldots+(3n-1)i^{3n-1}$,
siendo $i=\sqrt{-1} \wedge n=\overset{\circ}{4}$.

A) $\frac{1}{2}(n+1)i$

B) $\frac{1}{2}(n-1)i$

C) $\frac{1}{2}[(2-3n)+3ni]$

D) $\frac{1}{2}[3n+(2-3n)i]$

E) $\frac{1}{2}[-3n+(3n-2)i]$

41. Sabiendo que
$\alpha=\cos 12°-i\operatorname{sen}12°$,
calcule el valor de $M=\alpha^{15}+\frac{1}{\alpha^{15}}$.

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) -2 E) $-\frac{1}{2}$

42. Calcule un valor de M.

$$M=\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i\sqrt[11]{1-\sqrt{2\sqrt[9]{i}}}}}}$$

A) $-i$ B) i C) $1-i$
D) 1 E) $1+i$

43. Si $|z+w|=|z-w|$; $\forall\, z; w \in \mathbb{C}$, halle $\operatorname{Re}(z\overline{w})$.

A) 1 B) 0 C) -1
D) 2 E) -2

44. Si w es una raíz n-ésima de 1, además $(w \neq 1)$, calcule la suma
$S=1+4w+9w^2+\ldots+n^2w^{n-1}$.

A) $\frac{-n}{(w-1)^2}$

B) $\frac{n^2(1-w)}{2n(1+w)}$

C) $\frac{2n+n^2(1-w)}{(1-w)^2}$

D) $\frac{-2n-n^2+n^2w}{(1-w)^2}$

E) $\frac{n+(1-w)n^2}{w}$

45. Si $w \neq 1$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad y $h \in \mathbb{N}$, además h y n son coprimos, calcule
$S=1+w^h+w^{2h}+w^{3h}+\ldots+w^{(n-1)h}$.

A) 1 B) 0 C) w^h
D) w^{nh} E) w^{h+1}

46. Determine el valor de verdad en cada una de las siguientes proposiciones respecto al número complejo

$z=(1-\sqrt{3})^8(1-\sqrt{2})^3 e^{\frac{\pi}{4}} e^{5+\frac{\pi}{3}i}$.

I. $|z|=(1-\sqrt{3})^8(1-\sqrt{2})^3$

II. Su argumento principal es $\frac{4\pi}{3}$.

III. Su argumento es $\frac{7\pi}{12}$.

IV. Su argumento es $\frac{16\pi}{3}$.

A) FVFF B) VVFF C) FFVV
D) VVVV E) FFFV

47. El módulo del cuadrado del producto de un número complejo z por su conjugado es 16 y $|z|$ coincide con el radio de la circunferencia con centro en el origen. Sabiendo que una de sus raíces de orden cuatro de un número complejo w se encuentra sobre esta y además una de sus raíces tiene como argumento el valor de $\frac{\pi}{12}$ radianes. Indique el valor principal de la raíz de orden 3 de dicho número complejo w.

A) $\sqrt[3]{16}$ B) $\sqrt[3]{16}\text{cis}\frac{\pi}{3}$ C) $\sqrt[3]{16}\text{cis}\frac{\pi}{6}$
D) $\sqrt[3]{16}\text{cis}\frac{\pi}{9}$ E) $\sqrt[3]{16}\text{cis}\pi$

48. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que cumple $|z+z_0| \leq a$, donde $z_0=(a; a)$; $a \in \mathbb{R}^+$.
Calcule el argumento de z cuya distancia a la recta vertical que pasa por $x=-3a$ sea mínima.

A) $\left(\frac{33}{2}\right)^\circ$ B) $\left(\frac{37}{2}\right)^\circ$ C) $45°$
D) $\left(\frac{127}{2}\right)^\circ$ E) $\left(\frac{413}{2}\right)^\circ$

49. Si α y β dos raíces cúbicas de $(-i)$ diferentes de i, calcule el valor de la expresión L.

$$L=\frac{(i+\alpha)^{123}(i+\beta)^{234}+(\alpha+\beta)^{345}}{\alpha+\beta-i}$$

A) i B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) $\frac{1}{2}i$ E) $-\frac{1}{2}i$

50. Dado un número complejo z, tal que
$\text{Re}(z) \neq \text{Im}(z) \wedge \arg(z) \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$,
calcule el resultado de efectuar

$$T=\frac{2z^2+|z|^2}{z^2+2|z|^2}$$

sabiendo que es un número imaginario puro.

A) i B) $-i$ C) $2i$
D) $-2i$ E) $A \vee B$

51. Reduzca el siguiente número complejo

$$z=\frac{\sqrt{3+2a}+\sqrt{3-2a}\,i}{\sqrt{3+2a}-\sqrt{3-2a}\,i}-\frac{\sqrt{3-2a}+\sqrt{3+2a}\,i}{\sqrt{3-2a}-\sqrt{3+2a}\,i};$$

además $\frac{-3}{a} \leq a \leq \frac{3}{2}$.

A) $\frac{2a}{3}$ B) $-\frac{2a}{3}$ C) $\frac{a}{3}$
D) $\frac{4a}{3}$ E) $-\frac{4a}{3}$

52. Halle el argumento del número complejo $z=i^{-w}$, siendo w una raíz cúbica no real de la unidad.

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{4}$
D) $\frac{3\pi}{2}$ E) π

53. Una de las raíces de orden 4 de un número complejo de módulo 16 tiene argumento igual a $\frac{7\pi}{12}$. Indique la raíz correspondiente al mayor argumento positivo.

A) $2\text{cis}\left(\frac{19\pi}{12}\right)$ B) $2\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ C) $2\text{cis}\left(\frac{13\pi}{2}\right)$
D) $2\text{cis}\left(\frac{17\pi}{12}\right)$ E) $4\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

54. Dados los números complejos z que cumplen $|z+3|=2$; $0<\arg(z)<2\pi$,
seleccione el que tenga mayor y menor argumento y dé como respuesta la suma de sus partes imaginarias.

A) 4 B) 0 C) -2
D) 2 E) -4

55. Si se sabe que:

$$J=\left[\frac{1+\sqrt[n]{1}}{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right]^{np};\ k=1;2;\ldots$$

Calcule $|J|$.

A) 1 B) $\left|\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\right|$ C) $\left|\cos\frac{k\pi}{n}\right|$
D) np E) 2

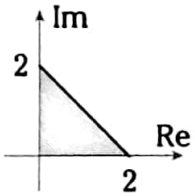
56. Dada la función compleja

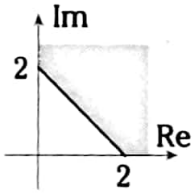
$$f_{(x+yi)}=\frac{x+i}{1-yi};\quad x;y\in\mathbb{R},$$

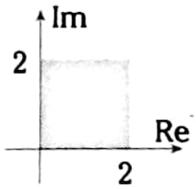
calcule el valor de $f_{(\sqrt{i})}$. Además $i^2=-1$.

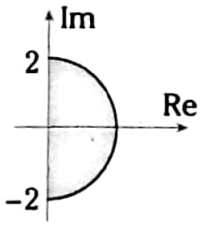
A) i B) -1 C) 0
D) $e^{\pi/2}$ E) $3i$

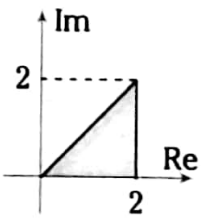
57. Esboce la gráfica de
$H=\{z\in\mathbb{C}/|\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)|\leq 2\ \wedge\ 0\leq\arg(z)\leq\pi/2\}$.

A)


B)


C)


D)


E)


58. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\forall z\neq 0;\left|\frac{z}{|z|}-1\right|\leq|\arg(z)|$

II. $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$;
$\forall\ z_1;z_2\in\mathbb{C}$

III. $\left|e^{ix^2}\right|=1;\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

A) FFV B) VVV C) VFV
D) FVV E) VVF

59. Un número complejo z y su conjugado $\bar{z}$ son tales que $z\cdot\bar{z}+2z=12+4i$.

Además, $\arg(z)\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$. Calcule $|z|$.

A) $2\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{5}$
D) $3\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{5}$

60. Indique el lugar geométrico para $z_1;z_2;z\in\mathbb{C}$, tal que

$$\arg\left\{\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right\}=0$$

Además, z_1 y z_2 son constantes complejas.

A) circunferencia
B) elipse
C) hipérbola
D) recta
E) parábola

61. Si los números complejos $z_1;z_2;z_3;z_4$ son los vértices del cuadrilátero $ABCD$, dicho cuadrilátero es un paralelogramo si

A) $z_1+z_2+z_3+z_4=0$
B) $z_1+z_2=z_3+z_4$
C) $z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2=0$
D) $z_1-z_2+z_3-z_4=0$
E) $z_1^3+z_2^3+z_3^3+z_4^3=0$

62. Simplifique la expresión k.

$$k=\frac{(\cos\theta_1;\operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2;\operatorname{sen}\theta_2)\ldots(\cos\theta_n;\operatorname{sen}\theta_n)}{\left[\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n);\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)\right]}$$

A) 0 B) 1 C) -1
D) $\cos^n\theta_n+\operatorname{sen}^n\theta_n i$ E) i

63. Dados $p; m\in\mathbb{R}$, reduzca la expresión S.

$$S=e^{2mi\arctan\left(\frac{1}{p}\right)}\cdot\left\{\frac{pi+1}{pi-1}\right\}^m$$

A) 0 B) -1 C) 1
D) m E) pm

64. Demuestre que:

I. $\operatorname{Re}(z_1z_2)=\operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2)-\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)$

II. $\operatorname{Im}(z_1z_2)=\operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)+\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Re}(z_2)$,

tal que $z_1; z_2\in\mathbb{C}$.

65. Si los puntos P_1 y P_2 son los afijos de $z_1; z_2\in\mathbb{C}$, tal que $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$, entonces es cierto que

A) (z_1/z_2) es un imaginario puro.
B) $z_1\cdot z_2$ es un imaginario puro.
C) $z_1\cdot z_2$ es un complejo real.
D) $m\measuredangle P_1OP_2=\frac{\pi}{2}$.
E) $A\vee D$

66. Calcule el área del polígono con vértices en $2+3i$; $3+i$; $-2-4i$; $-4-i$; $-1+2i$.

A) $50\,u^2$ B) $\frac{51}{2}u^2$ C) $45\,u^2$
D) $\frac{47}{2}u^2$ E) $\frac{49}{2}u^2$

67. Si sabemos que

$$\gamma_{(z)}\cdot\gamma_{(1-z)}=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z},$$

donde z es un número complejo, calcule el equivalente de $e^{\gamma^2(1/2)i}$.

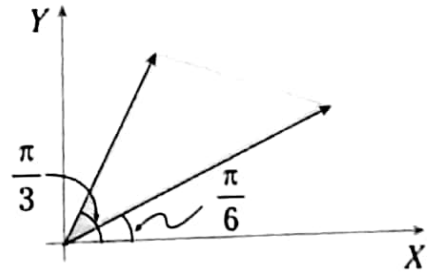
A) 0 B) -1 C) i
D) $-i$ E) 1

68. Halle el valor de P.

$$P=\left(1+\frac{1}{(2i)^2}\right)\left(1+\frac{1}{(3i)^2}\right)\left(1+\frac{1}{(4i)^2}\right)\ldots;\ i=\sqrt{-1},$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{8}$ E) 2

69. Halle el lugar geométrico de los puntos que representan a los números complejos
a. cuyos módulos son iguales a uno.
b. cuyos argumentos pertenecen al intervalo $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$.



70. Sean z_1 y z_2 dos números complejos ubicados en el primer cuadrante del plano de Gauss, tales que
$\tan(\arg(z_1))=1/5$; $\tan(\arg(z_2))=1/239$.
Según esto, calcule $4\arg(z_1)-\arg(z_2)$.

A) 0 B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{2}$
D) π E) $\frac{3\pi}{4}$

CLAVES
Problemas propuestos

NIVEL I

1 *	5 *	9 E	13 B	17 B
2 *	6 *	10 C	14 E	18 C
3 *	7 *	11 C	15 D	19 D
4 *	8 *	12 A	16 B	20 A

NIVEL II

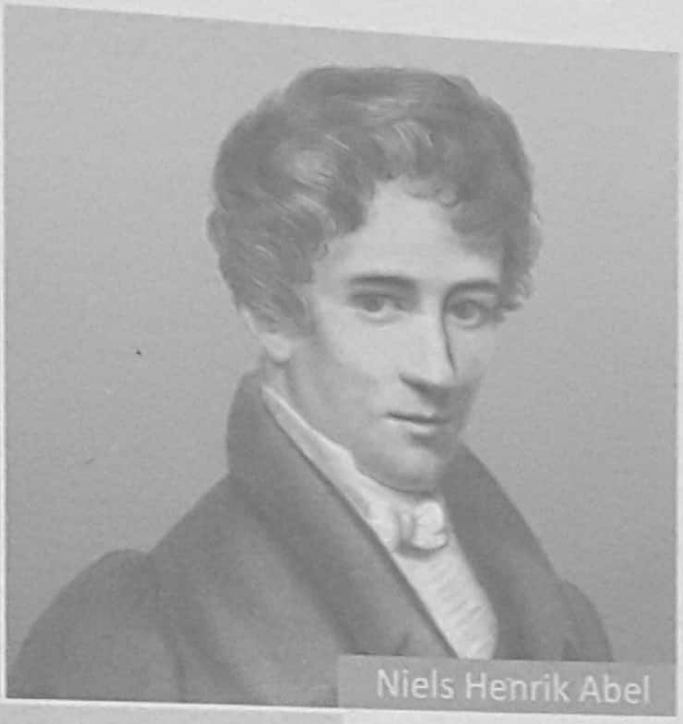
21 C	31 B	41 D	51 D	61 D
22 A	32 C	42 E	52 C	62 B
23 B	33 A	43 B	53 A	63 C
24 A	34 E	44 D	54 B	64 *
25 C	35 E	45 B	55 A	65 E
26 B	36 A	46 A	56 A	66 D
27 D	37 B	47 D	57 A	67 B
28 B	38 A	48 E	58 B	68 B
29 C	39 D	49 C	59 A	69 *
30 B	40 D	50 E	60 D	70 B

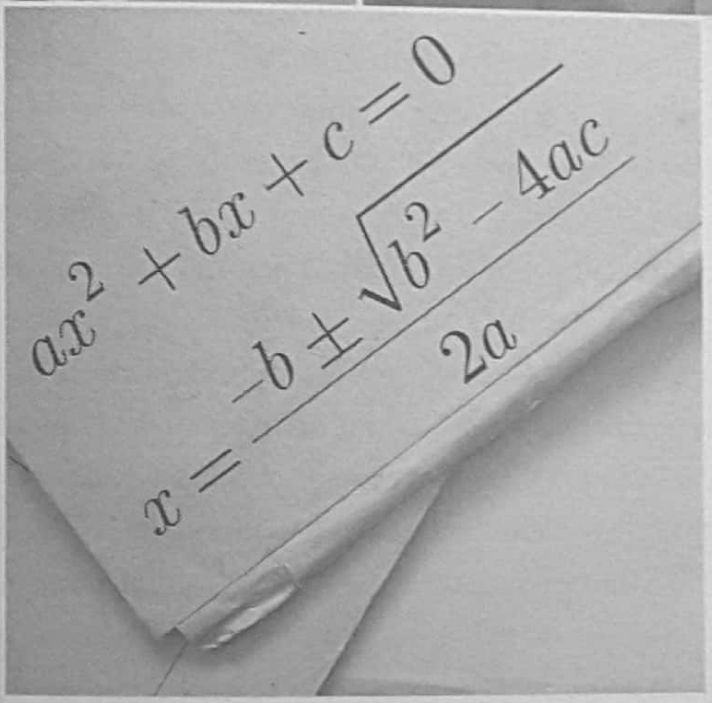
Nota: Las claves con * son demostraciones.

Capítulo

XIII

Tartaglia


Niels Henrik Abel



Ecuaciones algebraicas

CAPÍTULO XIII

ECUACIONES ALGEBRAICAS

Objetivos

- Conocer la teoría y la clasificación de las ecuaciones algebraicas.
- Resolver ecuaciones polinomiales y otras ecuaciones transformables a polinomiales.
- Interpretar el teorema fundamental del álgebra y otros teoremas aplicados a las ecuaciones polinomiales.

Introducción

Hace cinco mil años, en el país de los sumerios, cerca del Golfo Pérsico, se dieron las primeras dificultades matemáticas que necesitaban ser interpretadas bajo ciertas igualdades. Esto dio inicio a las primeras relaciones que posteriormente los matemáticos llamarían teoría de ecuaciones. Con el afán de resolver las ecuaciones se han creado nuevas teorías, nuevos conceptos, nuevos conjuntos numéricos. Los primeros en descubrir el método de resolución de las ecuaciones de primer y segundo grado fueron los matemáticos sumerios y babilonios (3000 a.n.e); luego Diofanto (329-410 d.n.e), fundador del Álgebra; los hindúes y, finalmente, los árabes (siglo IX).

La ecuación de tercer grado hizo posible que Cardano y Tartaglia inventaran los números complejos en el siglo XVI. Ludovico Ferrari (1522-1565), discípulo de Cardano, encontró el método general de la resolución de la ecuación de cuarto grado. Posteriormente, René Descartes, sabio y filósofo francés, inventor de la geometría analítica, descubre otra forma de resolver la ecuación cuártica.

Como es lógico, los matemáticos trataron de resolver las ecuaciones de grado superior a cuatro (quinto grado, sexto grado y en general de grado n). Este estudio tenía un interés doble, ya que hubiera constituido un gran logro encontrar un método general de resolución para todas las ecuaciones de una incógnita, cualquiera sea su grado. Tras muchos intentos, se llegó a la conclusión de que las ecuaciones de quinto grado o superior a cinco eran imposibles de resolver usando solamente cálculos algebraicos. Paolo Ruffini, un médico italiano, había tratado de demostrarlo en 1798, en su *Teoría general de las ecuaciones*, pero la demostración resultó incompleta. Al cabo de unos años, en 1824, el célebre joven matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829) descubrió el teorema que lleva su nombre: teorema de Abel, y dice: "Es imposible resolver algebraicamente (por radicales) las ecuaciones generales de grado superior a cuatro"; es decir, no existe una fórmula general que resuelva todas las ecuaciones de grado cinco, de grado seis, etc.

Para ecuaciones de grados superiores a cuatro, el teorema especifica que cualquier ecuación no puede resolverse por radicales, pero hay ecuaciones particulares en las que sí se puede. Así, el teorema de Sauch-Ruffini dice que hay algunas ecuaciones de quinto grado cuya solución no puede ser expresada de ese modo, como por ejemplo la ecuación $x^5 - x + 1 = 0$. Sin embargo, algunas otras ecuaciones de quinto grado pueden ser resueltas mediante radicales, por ejemplo $x^5 - x^4 - x + 1 = 0$.

El criterio preciso que separa aquellas ecuaciones que pueden ser resueltas mediante radicales de aquellas que no, fue dado por Évariste Galois (1811-1832), fundador de la teoría de grupos, y es parte de la teoría de Galois: "Una ecuación polinómica puede ser resuelta mediante radicales si y solo si su grupo de Galois es un grupo resoluble". En el análisis moderno, la razón por que las ecuaciones polinomiales de segundo, tercero o cuarto grado pueden ser resueltas siempre mediante radicales, pero las ecuaciones de grado superior no, es simplemente por el hecho algebraico de que los grupos simétricos S2, S3 y S4 son grupos resolubles, mientras que Sn no es resoluble para $n \geq 5$.

Si una ecuación polinomial tiene coeficientes reales o complejos y permitimos soluciones complejas, entonces cualquier ecuación polinomial tiene soluciones; esto lo garantiza el teorema fundamental del álgebra. Aunque estas soluciones no siempre pueden ser calculadas exactamente con un número finito de operaciones aritméticas, pueden ser aproximadas mediante un cantidad de iteraciones convenientes, usando algunos métodos numéricos: método de Newton-Raphson o el método de Laguerre, y de ese modo no son diferentes de las soluciones de las ecuaciones polinómiales de segundo, tercero y cuarto grado.

TEORÍA DE ECUACIONES

DEFINICIÓN DE UNA ECUACIÓN

Una ecuación es una función proposicional o enunciado abierto (depende al menos de una variable) que puede ser verdadero o falso.

Por ejemplo, si $f_{(x)}=5x+6$ entonces $f_{(x)}=1$ es una ecuación.

La veracidad o falsedad de la ecuación dependerá de los valores que se le atribuyan a la variable (incógnita) x.

En otras palabras, una ecuación es la igualdad de dos expresiones matemáticas donde existe por lo menos una variable.

Ejemplos

1. $6x+3^x=4^{\log x}$
2. $\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x-1}{x}=x$
3. $\dfrac{x}{\sqrt{2}+\dfrac{x}{\sqrt{2}+x}}=\sqrt{x}+1$
4. $x^5+49x-1=0$

Solución de una ecuación

Es aquel valor que toma la incógnita y convierte la ecuación en una igualdad, es decir, convierte la ecuación en una proposición verdadera.

Luego, si en la ecuación $P_{(x)}=0$ el valor x_0 es una solución, entonces x_0 verifica la ecuación, es decir, $P_{(x_0)}=0$.

Ejemplos

1. Sea la ecuación $3^{\sqrt{x}-1}=\dfrac{x}{3}+6$.

$x=4 \rightarrow 3^{\sqrt{4}-1}=\dfrac{4}{3}+6$ (Falso)

$x=9 \rightarrow 3^{\sqrt{9}-1}=\dfrac{9}{3}+6$ (Verdadero)

Entonces, $x=9$ es una solución.

2. Sea la ecuación $x^3+3x+4=0$.

$x=0 \rightarrow 0^3+3(0)+4=0$ (Falso)

$x=1 \rightarrow 1^3+3(1)+4=0$ (Falso)

$x=-1 \rightarrow (-1)^3+3(-1)+4=0$ (Verdadero)

Entonces, $x=-1$ es una solución.

Conjunto solución de una ecuación

Es el conjunto denotado por CS que agrupa a todas las soluciones de la ecuación en discusión. El CS de una ecuación es la recolección de todas las soluciones de la ecuación. Si la ecuación no presenta solución, entonces el CS es el conjunto vacío: ϕ.

Ejemplos

1. $(3x-1)(x+1)(6x+5)=0$

Esta ecuación se verificará solo si

$x=\dfrac{1}{3} \vee x=-1 \vee x=-\dfrac{5}{6}$

Entonces, $CS=\left\{\dfrac{1}{3};\ -1;\ -\dfrac{5}{6}\right\}$

2. $\dfrac{6}{x-2}=0$

Esta ecuación no admite algún valor para x, que la verifique.

$\therefore\ CS=\phi$

Tenga en cuenta

Resolver una ecuación significa hallar el conjunto solución, es decir, hallar todas las soluciones de la ecuación. Por ejemplo, si queremos resolver la ecuación $x^2-4=0$ procedemos así:

$x^2-4=0 \rightarrow (x+2)(x-2)=0$

$\rightarrow x+2=0 \vee x-2=0$

$\rightarrow x=-2 \vee x=2$

$\therefore\ CS=\{-2;\ 2\}$

CLASES DE ECUACIONES

Por su estructura

Depende del tipo de expresión o expresiones matemáticas que definen a las ecuaciones. Pueden ser algebraicas o trascendentes.

Ecuaciones algebraicas

Si las expresiones que definen a la ecuación son algebraicas, pueden ser:

Polinomiales: $3x^5-5x+7=0$

Fraccionarias: $\dfrac{2x-1}{5-3x}+x=x^2+1$

Irracionales: $\sqrt[3]{3-x}+x^2+1=\sqrt{2x-1}$

Ecuaciones no algebraicas o trascendentes

Si al menos una expresión es no algebraica o trascendente, pueden ser:

Exponenciales: $3^{x-1}=3x+2$

Trigonométricas: $5\operatorname{sen}\left(\dfrac{3x}{\pi}\right)=\cos x$

Logarítmicas: $3x\log_{\pi}\left(\dfrac{x}{5}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

Por su conjunto solución

Ecuación compatible

Es toda ecuación que al menos tiene una solución.

- Si el número de soluciones es finito, se llama compatible determinada.

$$(5x-1)(2x+3)=0 \;\rightarrow\; CS=\left\{\frac{1}{5};\ -\frac{3}{2}\right\}$$

- Si el número de soluciones es infinito, se llama compatible indeterminada.

$$(7x-\sqrt{\pi})^0=1 \;\rightarrow\; CS=\{1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$$

Ecuación incompatible

Es aquella ecuación que no tiene solución, es decir, su conjunto solución no tiene elementos: $CS=\phi$. Se llama también ecuación absurda o inconsistente.

$$\frac{5}{x-2}+2x=4+\frac{5}{x-2}$$

Nunca se verifica, pues no existe algún valor de x que verifique la ecuación.

Ecuaciones equivalentes

Dos o más ecuaciones son equivalentes si están en una misma incógnita y tienen el mismo conjunto solución.

Ejemplos

1. $4^{x^2-x+1}=8^x \;\rightarrow\; CS=\left\{2;\ \frac{1}{2}\right\}$
2. $(x-1)(x+1)-5x=-(3+x^2) \;\rightarrow\; CS=\left\{2;\ \frac{1}{2}\right\}$
3. $(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \;\rightarrow\; CS=\left\{2;\ \frac{1}{2}\right\}$
4. $(x-2)(2x-1)=0 \;\rightarrow\; CS=\left\{2;\ \frac{1}{2}\right\}$

Las ecuaciones anteriores son equivalentes, puesto que tienen el mismo conjunto solución.

ECUACIÓN POLINOMIAL

DEFINICIÓN

Es aquella ecuación compatible determinada que presenta la siguiente forma general:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0;\ a_0\neq 0$$

Donde $a_0;\ a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n$ son los coeficientes y la incógnita es x.

El grado del polinomio determina el grado de la ecuación, así:

- $\sqrt{2}x+1=0$ (ecuación lineal o de primer grado)
- $5x^2-3x+7=0$ (ecuación cuadrática o de segundo grado)
- $16x^3-5x+2=0$ (ecuación cúbica o de tercer grado)

Raíz de un polinomio

Sea $P_{(x)}$ un polinomio no constante, diremos que α es una raíz del polinomio $P_{(x)}$ si y solo si $P_{(\alpha)}=0$.

Ejemplos

1. Sea $P_{(x)}=x^3-5x+4$.
   Vemos que $P_{(1)}=0$, entonces 1 es una raíz del polinomio $P_{(x)}$.
2. $P_{(x)}=x^3+3x^2-2x-6$, para $x=\sqrt{2}$ se obtiene $P_{(\sqrt{2})}=0$; entonces $\sqrt{2}$ es una raíz del polinomio.

Teorema del factor

α es una raíz del polinomio $P_{(x)}$ si y solo si $(x-\alpha)$ es un factor. Es decir, toda raíz α de un polinomio $P_{(x)}$ genera un factor y viceversa.

Demostración

- Por el algoritmo de la división existen $Q_{(x)}$ y $R_{(x)}$, tales que
  $$P_{(x)}=(x-\alpha)Q_{(x)}+R_{(x)}.$$
  Como $(x-\alpha)$ es lineal, entonces $R_{(x)}$ es constante; de donde
  $$P_{(x)}=(x-\alpha)Q_{(x)}+R.$$
  Evaluando en $x=\alpha$ tenemos $P_{(\alpha)}=0\cdot \cancel{q_{(\alpha)}}^{0}+R$.
  Como α es raíz de $P_{(x)}$: $0=0+R \rightarrow R=0$
  de donde $P_{(x)}=(x-\alpha)Q_{(x)}$
  Así, $(x-\alpha)$ es un factor de $P_{(x)}$.
- Como $(x-\alpha)$ es factor, entonces
  $$P_{(x)}=(x-\alpha)Q_{(x)}$$
  Evaluando en $x=\alpha$, tenemos $P_{(\alpha)}=0$
  Así, α es una raíz de $P_{(\alpha)}$.

Ejemplo

En el polinomio $P_{(x)}=x^3-1$, $x=1$ es una raíz de $P_{(x)}$. Luego $(x-1)$ es un factor de $P_{(x)}$. En consecuencia $P_{(x)}=(x-1)\cdot q_{(x)}$, donde $q_{(x)}$ es otro polinomio.

Multiplicidad de una raíz

Sea $P_{(x)}$ un polinomio no constante y $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de $P_{(x)}$. Diremos que α es de multiplicidad k si y solo si $(x-\alpha)^k$ es un factor de $P_{(x)}$ tal que $(x-\alpha)^{k+1}$ no es factor de $P_{(x)}$. Es decir,

$$P_{(x)}=(x-\alpha)^k\cdot q_{(x)},\ \text{con } q_{(\alpha)}\neq 0$$

Ejemplo

Dado el polinomio $P_{(x)}=(2x-1)^3(5x+3)(x+2)^4$, se observa que:

- $P_{\left(\frac{1}{2}\right)}=0 \rightarrow \frac{1}{2}$ es una raíz de multiplicidad 3.
- $P_{\left(-\frac{3}{5}\right)}=0 \rightarrow -\frac{3}{5}$ es una raíz simple.
- $P_{(-2)}=0 \rightarrow$ es una raíz de multiplicidad 4.

Raíz de una ecuación polinomial

El número α es una raíz de la ecuación polinomial $P_{(x)}=0$ si α es solución de dicha ecuación; es decir, $P_{(\alpha)}=0$.

Ejemplo

Dada la ecuación polinomial

$$P_{(x)}=(x-2)^3(3x+1)(x+2)^2=0$$

Se observa que:

- La ecuación es de sexto grado, entonces tiene 6 raíces x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6.
- La raíz $x=2$ se repite tres veces, luego 2 es una raíz triple; es decir, $x_1=x_2=x_3=2$.
- La raíz $x_4=-\frac{1}{3}$ es simple (no se repite).
- La raíz $x=-2$ se repite dos veces, luego -2 es una raíz doble; es decir, $x_5=x_6=-2$.
- Su conjunto solución es $CS=\left\{2;\ -\frac{1}{3};\ -2\right\}$.

Finalmente concluimos:

$$\begin{pmatrix}\text{Número de}\\ \text{raíces de } P_{(x)}\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}\text{Número de}\\ \text{soluciones } P_{(x)}=0\end{pmatrix}$$

Tenga en cuenta

- A las soluciones de una ecuación polinomial también se les llama raíces.
- Si una raíz α es de multiplicidad k, significa que α se repite k veces.
- La cantidad de soluciones de una ecuación polinomial $P_{(x)}=0$ es igual a la cantidad de elementos de su conjunto solución.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Todo polinomio $P_{(x)}$ de grado $n \geq 1$, de coeficientes complejos, admite al menos una raíz que generalmente es compleja.

Corolario

Todo polinomio $P_{(x)}$ de grado $n \geq 1$, de coeficientes complejos, tiene exactamente n raíces contadas cada una con su respectiva multiplicidad.

Ejemplos

1. El polinomio $P_{(x)}=4x^5-5x+1$ tiene 5 raíces por ser de grado cinco. En consecuencia, la ecuación polinomial $4x^5-5x+1=0$ también tiene 5 raíces.
2. El polinomio $Q_{(x)}=2x^7+2x^3+4$ tiene 7 raíces por ser de grado siete. En consecuencia, la ecuación polinomial $2x^7+2x^3+4=0$ también tiene 7 raíces.

Del corolario se concluye que toda ecuación polinomial $P_{(x)}=0$ de grado $n \geq 1$ tiene solución (a lo más n soluciones), por lo tanto, será una ecuación compatible determinada.

A continuación estudiaremos algunas ecuaciones polinomiales.

ECUACIONES LINEALES

Llamadas también ecuaciones polinomiales de primer grado, cuya forma general es

$$Ax+B=0;\ A\neq 0$$

Para resolver una ecuación lineal $Ax+B=0; A\neq 0$, procederemos así:

Sumamos $(-B)$ a cada miembro:

$$Ax+\underbrace{B+(-B)}_{0}=0+(-B) \rightarrow Ax+0=-B$$

$$\rightarrow Ax=-B;\ A\neq 0\ [\text{existe } A^{-1}]$$

$$\rightarrow A^{-1}Ax=A^{-1}(-B) \rightarrow x=-\frac{B}{A} \rightarrow CS=\left\{-\frac{B}{A}\right\}.$$

Ejemplos

1. Resuelva la ecuación lineal.

$$\frac{3x-1}{2}+\frac{x-1}{3}+\frac{x}{5}=1.$$

Resolución

Para eliminar los denominadores multiplicamos toda la ecuación por el MCM(2; 3; 5)=30.

Así:

$$15(3x-1)+10(x-1)+6x=30$$

$$\rightarrow 45x-15+10x-10+6x=30$$

$$\rightarrow 61x-25=30 \rightarrow 61x=55$$

$$\rightarrow x=\frac{55}{61} \rightarrow CS=\left\{\frac{55}{61}\right\}$$

2. Resuelva la ecuación en x

$$\frac{x-m}{n+p+q+r}+\frac{x-n-p}{q+r+m}+\frac{x-q-r}{m+n+p}=3,$$

con $m; n; p; q; r$ reales positivos.

Resolución

Como $3=1+1+1$, pasamos a restar 1 a cada fracción:

$$\frac{x-m}{n+p+q+r}-1+\frac{x-n-p}{q+r+m}-1+\frac{x-r-q}{m+n+p}-1=0$$

$$\rightarrow \frac{x-m-n-p-q-r}{n+p+q+r}+\frac{x-n-p-q-r-m}{q+r+m}+\frac{x-r-q-m-n-p}{m+n+p}=0$$

Factorizamos $x-m-n-p-q-r$

$$(x-m-n-p-q-r)\underbrace{\left(\frac{1}{n+p+q+r}+\frac{1}{q+r+m}+\frac{1}{m+n+p}\right)}_{\neq 0}=0$$

$\rightarrow x-m-n-p-q-r=0$

$\rightarrow x=m+n+p+q+r$

$\therefore$ CS$=\{m+n+p+q+r\}$

3. Resuelva la ecuación lineal

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{20}+\frac{x}{30}+\frac{x}{42}=2.$$

Resolución

Factorizamos x

$$x\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}\right]=2$$

Aplicamos la propiedad $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ en cada fracción

En el problema:

$$x\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)\right]$$

$$x\left(1-\frac{1}{7}\right)=2 \rightarrow \frac{6}{7}x=2 \rightarrow x=\frac{7}{3}$$

$\rightarrow$ CS$=\left\{\frac{7}{3}\right\}$

4. Luego de resolver la ecuación en x

$$\frac{px}{qb}-\frac{qx}{pa}+\frac{q}{p}=\frac{qx}{pb}-\frac{px}{qa}+\frac{p}{q};\ p\neq\pm q$$

calcule el valor de $\frac{ab}{x}$.

Resolución

Transponemos términos y agrupamos convenientemente

$$\frac{px}{qb}-\frac{qx}{pa}-\frac{qx}{pb}+\frac{px}{qa}=\frac{p}{q}-\frac{q}{p}$$

Note que $\frac{p}{q}-\frac{q}{p}=\frac{p^2-q^2}{pq}\neq 0$,

ya que $p\neq q \wedge p\neq -q$

$$\rightarrow \frac{x}{b}\left(\cancel{\frac{p}{q}-\frac{q}{p}}\right)+\frac{x}{a}\left(\cancel{\frac{p}{q}-\frac{q}{p}}\right)=\left(\cancel{\frac{p}{q}-\frac{q}{p}}\right)$$

$$\frac{x}{b}+\frac{x}{a}=1 \rightarrow x\left[\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right]=1 \rightarrow x\left(\frac{a+b}{ab}\right)=1$$

$$\therefore \frac{ab}{x}=a+b$$

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Llamadas también ecuaciones polinomiales de segundo grado, cuya forma general es

$$\boxed{Ax^2+Bx+C=0;\ A\neq 0}$$

Para resolver una ecuación cuadrática, en muchos casos emplearemos la factorización. Si la ecuación cuadrática es de la forma:

- $Ax^2+Bx=0$, factorizamos por factor común.
- $Ax^2+C=0$, factorizamos por diferencia de cuadrados.
- $Ax^2+Bx+C=0$, factorizamos por aspa simple.

Por ejemplo, para resolver la ecuación $Ax^2+Bx+C=0$, factorizamos por aspa simple:

$$A(x-x_1)(x-x_2)=0;\ A\neq 0$$

$$\rightarrow (x-x_1=0 \ \vee\ x-x_2=0) \rightarrow x=x_1 \ \vee\ x=x_2$$

Por lo tanto, el CS$=\{x_1; x_2\}$.

A x_1; x_2 se les llama raíces de la ecuación cuadrática.

Ejemplos

1. Resuelva la ecuación $3x^2+x-10=0$.

Resolución

Factorizamos por aspa simple

$$3x^2+x-10=0$$

$$\begin{array}{ll} 3x & -5 \\ x & 2 \end{array}$$

$$\rightarrow (3x-5)(x+2)=0$$

$$\rightarrow x=\frac{5}{3} \ \vee\ x=-2$$

$$\therefore \text{CS}=\left\{\frac{5}{3};\ -2\right\}$$

2. Resuelva la ecuación $4x^2-28x+49=0$.

Resolución

El trinomio es un cuadrado perfecto:

$$(2x)^2-2(2x)\cdot 7+7^2=0$$

$$\rightarrow (2x-7)^2=0 \rightarrow x=\frac{7}{2} \text{ (solución única o raíz doble)}$$

$$\therefore \text{CS}=\left\{\frac{7}{2}\right\}$$

3. Si una raíz de la ecuación $x^2-(\alpha+1)x-5=0$ es 2, halle la otra raíz.

Resolución

Como 2 es una raíz entonces verifica la ecuación.

Luego: $2^2+(\alpha+1)\cdot 2-5=0$

$$\rightarrow 4-2\alpha-2-5=0 \rightarrow \alpha=-\frac{3}{2}$$

Luego, la ecuación dada es:

$$x^2-\left(-\frac{3}{2}+1\right)x-5=0$$

$$\rightarrow 2x^2+x-10=0$$

Factorizamos por aspa simple:

$$2x^2+x-10=0$$

$$\begin{array}{ccc} 2x & & 5 \\ x & & -2 \end{array}$$

$$\rightarrow (2x+5)(x-2)=0 \rightarrow (2x+5=0 \vee x-2=0)$$

$$\rightarrow x_1=-\frac{5}{2};\ x_2=2$$

Luego, la otra raíz es $-\frac{5}{2}$.

Teorema (fórmula general)

$$Ax^2+Bx+C=0 \leftrightarrow x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A};\ A\neq 0$$

Demostración

En $Ax^2+Bx+C=0;\ A\neq 0$

multiplicamos por $4A$ para completar cuadrados

$$4A^2x^2+4ABx+4AC=0$$

$$(2Ax)^2+2(2Ax)(B)+B^2-B^2+4AC=0$$

$$(2Ax+B)^2=B^2-4AC$$

$$\rightarrow 2Ax+B=\pm\sqrt{B^2-4AC}$$

$$\rightarrow x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

Es decir

$$x_1=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A};\ x_2=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de toda ecuación $Ax^2+Bx+C=0;\ A\neq 0$ es

$$CS=\left\{\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A};\ \frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right\}$$

Ejemplos

1. Resuelva la ecuación $3x^2-2x+1=0$.

Resolución

Como el polinomio $3x^2-2x+1$ no es factorizable en $\mathbb{Q}$, aplicamos el teorema anterior.

Reconocemos los coeficientes:

$A=3;\ B=-2$ y $C=1$.

$$\rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$\rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{6}=\frac{2\pm 2\sqrt{2}i}{6}$$

$$\rightarrow x_1=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}i;\ x_2=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i$$

$$\therefore\ CS=\left\{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}i;\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i\right\}$$

2. Resuelva la ecuación $x^2-\sqrt{2}x-5=0$.

Resolución

Tenemos

$A=1;\quad B=-\sqrt{2}$ y $C=-5$.

Usamos la fórmula general

$$x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{\sqrt{2}^2-4(-5)}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{22}}{2}$$

$$\therefore\ CS=\left\{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{22}}{2};\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{22}}{2}\right\}$$

Discriminante (Δ)

Dada la ecuación $Ax^2+Bx+C=0;\ A\neq 0$, definimos y denotamos el discriminante de la ecuación cuadrática por:

$$\Delta=B^2-4AC$$

Ejemplos

1. Halle el discriminante de la ecuación $3x^2-5x+7=0$.

   Resolución

   Identificamos los coeficientes

   $A=3,\ B=-5$ y $C=7$

   $\rightarrow\ \Delta=(-5)^2-4(3)(7)=25-84=-59$

   $\therefore\ \Delta=-59$

2. Halle el discriminante de la ecuación $2ix^2+3x-i=0;\ i=\sqrt{-1}$.

   Resolución

   Identificamos los coeficientes

   $A=2i,\ B=3$ y $C=-i$

   $\rightarrow\ \Delta=3^2-4(2i)(-i)=9+(8i^2)=9-8$

   $\therefore\ \Delta=1$

Teorema Cardano-Viète (para ecuaciones cuadráticas)

En la ecuación $Ax^2+Bx+C=0;\ A\neq 0$, de raíces x_1; x_2, se cumple:

I. Suma de raíces:

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}$$

II. Producto de raíces:

$$x_1\cdot x_2=\frac{C}{A}$$

Demostración

Sabemos que

$$x_1=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A};\ x_2=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

Luego

I. $$x_1+x_2=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}+\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

$$\rightarrow\ x_1+x_2=-\frac{2B}{2A}\ \rightarrow\ x_1+x_2=-\frac{B}{A}.$$

II. $$x_1\cdot x_2=\left(\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right)\left(\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right)$$

$$\rightarrow\ x_1\cdot x_2=\frac{(-B)^2-(B^2-4AC)}{4A^2}$$

$$\rightarrow\ x_1\cdot x_2=\frac{4AC}{4A^2}$$

$$\rightarrow\ x_1\cdot x_2=\frac{C}{A}$$

Corolario

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

Ejemplos

1. Dada la ecuación $3x^2-5x+7=0$, de raíces x_1; x_2, se tiene:

   - $x_1+x_2=-\frac{-5}{3}=\frac{5}{3}$
   - $x_1\cdot x_2=\frac{7}{3}$

2. Si x_1; x_2 son las raíces de la ecuación $3x^2+2x-4=0$, calcule el valor de $M=(x_1+5)(x_2+5)$.

   Resolución

   $M=(x_1+5)(x_2+5)$ es igual a

   $M=x_1x_2+5(x_1+x_2)+25$

   Usando el teorema se tiene

   $$x_1+x_2=-\frac{2}{3}\ \wedge\ x_1x_2=-\frac{4}{3}$$

   $$\rightarrow\ M=\frac{-4}{3}+5\left(-\frac{2}{3}\right)+25$$

   $$\therefore\ M=-\frac{14}{3}+25=\frac{61}{3}$$

3. Si r y s son las raíces de la ecuación $x^2+px+36=0$, tal que $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{5}{12}$, calcule el valor de p.

Resolución

De la ecuación: $r+s=-p$, $r\cdot s=36$

De la condición: $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{5}{12}$

$\rightarrow \frac{r+s}{r\cdot s}=\frac{5}{12} \rightarrow \frac{-p}{36}=\frac{5}{12}$

$\therefore\ p=-15$

Tenga en cuenta

Si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $Ax^2+Bx+C=0$; $A\neq 0$, entonces

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{B}{C}$$

4. Si la ecuación cuadrática

$$x^2-(p+3)x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+1=0$$

tiene conjunto solución $CS=\{\alpha;\ \alpha+1\}$, calcule el valor de p.

Resolución

Sean $x_1=\alpha+1$ y $x_2=\alpha$ las raíces

$\rightarrow x_1+x_2=p+3;\ x_1x_2=\left(\frac{p}{2}\right)^2+1.$

Además: $x_2-x_1=1$.

Reemplazamos estos resultados en la identidad de Legendre

$$(x_2+x_1)^2-(x_2-x_1)^2=4x_1x_2$$

$\rightarrow (p+3)^2-1=4\left(\frac{p^2}{4}+1\right)$

$\rightarrow \cancel{p^2}+6p+9-1=\cancel{p^2}+4$

$\rightarrow 6p=-4$

$\therefore\ p=-\frac{2}{3}$

5. Si una raíz de la ecuación es el triple de la otra raíz $x^2-(2a+4)x+a^2+8=0$, calcule el mayor valor de a.

Resolución

Sean las raíces: k; $3k$

Por el teorema de Cardano:

- $k+3k=2a+4 \rightarrow k=\frac{a}{2}+1$
- $k\cdot 3k=a^2+8 \rightarrow 3k^2=a^2+8$

$\rightarrow 3\left(\frac{a}{2}+1\right)^2=a^2+8$

$\rightarrow 3\left(\frac{a^2}{4}+a+1\right)=a^2+8$

$\rightarrow \frac{3a^2}{4}+3a+3=a^2+8$

$\rightarrow \frac{a^2}{4}-3a+5=0 \rightarrow a^2-12a+20=0$

$\rightarrow (a-10)(a-2)=0$

$\rightarrow a-10=0 \vee a-2=0$

$\rightarrow a=10\ ;\ a=2$

$\therefore\ a_{mayor}=10$

Análisis de las raíces

En la ecuación $Ax^2+Bx+C=0$; $A\neq 0$ de coeficientes reales, raíces x_1; x_2 y discriminante $\Delta=B^2-4AC$ se cumple:

I. Si $\Delta>0 \leftrightarrow x_1;\ x_2\in\mathbb{R} \wedge x_1\neq x_2$

II. Si $\Delta=0 \leftrightarrow x_1;\ x_2\in\mathbb{R} \wedge x_1=x_2$

III. Si $\Delta<0 \leftrightarrow x_1;\ x_2\notin\mathbb{R} \wedge x_1=\bar{x}_2$

Ejemplos

1. En la ecuación $2x^2-5x-1=0$, su discriminante es

   $\Delta=(-5)^2-4(-2)=33>0.$

   Entonces, las raíces x_1; x_2 son reales y diferentes.

2. En la ecuación $5x^2-2x+7=0$, la discriminante es $\Delta=(-2)^2-4(5)(7)<0$.

   Entonces, las raíces no son reales. Son complejas conjugadas.

3. Si α, β son las raíces de la ecuación

   $x^2-(\sqrt{7}-1)x+5=0,$

   calcule el valor de $|\alpha|+|\beta|$.

   Resolución

   Calculamos su discriminante

   $$\Delta=(\sqrt{7}-1)^2-4(5)<0=8-2\sqrt{7}-20=$$
   $$=-12-2\sqrt{7}<0$$

   $\rightarrow$ α, β son complejas conjugadas, es decir $\alpha=\overline{\beta}$.

   De la ecuación:

   $$\alpha\cdot\beta=5 \rightarrow \alpha\cdot\overline{\alpha}=5 \rightarrow |\alpha|^2=5$$

   $\rightarrow$ $|\alpha|=\sqrt{5}$

   Además, como $\alpha=\overline{\beta}$ $\rightarrow$ $|\alpha|=|\overline{\beta}|=|\beta|$

   $\therefore$ $|\alpha|+|\beta|=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

Formación de la ecuación cuadrática a partir de sus raíces

Sean $x=x_1$ y $x=x_2$ las raíces de la ecuación cuadrática, entonces dicha ecuación cuadrática es:

$$\boxed{x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0}$$

Prueba

Si $x=x_1$ y $x=x_2$ son las raíces de una ecuación cuadrática

$\rightarrow$ $x-x_1=0 \wedge x-x_2=0$

Multiplicamos:

$(x-x_1)(x-x_2)=0$

$\rightarrow$ $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$

es la ecuación buscada.

Ejemplos

1. Forme la ecuación cuadrática de raíces:

   a. $5; -3$

   b. $6; \dfrac{7}{2}$

   c. $3+\sqrt{3}; 3-\sqrt{3}$

   d. $4+i; 4-i$

   Resolución

   a. La ecuación es:

   $$x^2-[5+(-3)]x+(5)(-3)=0$$

   $\rightarrow$ $x^2-2x-15=0$

   b. La ecuación es:

   $$x^2-\left(6+\frac{7}{2}\right)x+6\left(\frac{7}{2}\right)=0$$

   $\rightarrow$ $x^2-\dfrac{19}{2}x+21=0$ $\rightarrow$ $2x^2-19x+42=0$

   c. La ecuación es:

   $$x^2-(3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3})x+(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})=0$$

   $\rightarrow$ $x^2-6x+3^2-3=0$ $\rightarrow$ $x^2-6x+6=0$

   d. La ecuación es:

   $$x^2-(4+i+4-i)x+(4+i)(4-i)=0$$

   $\rightarrow$ $x^2-8x+4^2+1=0$ $\rightarrow$ $x^2-8x+17=0$

2. Si $a; b$ son las raíces de la ecuación cuadrática $4x^2-2x+3=0$, halle otra ecuación cuadrática de incógnita y cuyas raíces sean $2a-1$ y $2b-1$.

Resolución

De la ecuación: $4x^2-2x+3=0 \rightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{2}{4} \\ ab=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

La ecuación buscada es

$$y^2-(2a-1+2b-1)y+(2a-1)(2b-1)=0$$

$$\rightarrow y^2-[2(a+b)-2]y+4ab-2(a+b)+1=0$$

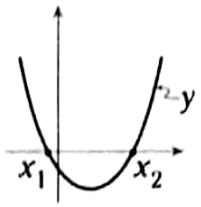
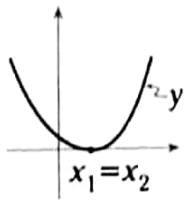
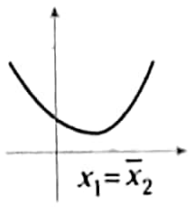
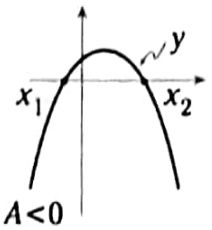
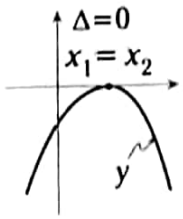
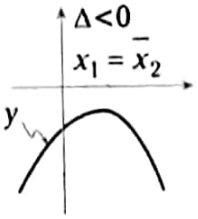
Usamos los resultados obtenidos:

$$y^2-\left[2\left(\frac{1}{2}\right)-2\right]y+4\left(\frac{3}{4}\right)-2\left(\frac{1}{2}\right)+1=0$$

Por lo tanto, la ecuación $y^2+y+3=0$.

Interpretación geométrica de $y=Ax^2+Bx+C$

Sea $y=Ax^2+Bx+C$; $A\neq 0$ un polinomio cuadrático con coeficientes reales. Su gráfica es una parábola y su comportamiento geométrico depende de su discriminante (Δ), así:

$f_{(x)}$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$A>0$			
$A<0$			

Teorema de las ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones cuadráticas $Ax^2+Bx+C=0$ y $Mx^2+Nx+P=0$ son equivalentes, es decir, tienen el mismo conjunto solución si

$$\frac{A}{M}=\frac{B}{N}=\frac{C}{P};\ MNP\neq 0$$

Demostración

Las ecuaciones $Mx^2+Nx+P=0$ y $Ax^2+Bx+C=0$ son equivalentes si $Ax^2+Bx+C=k(Mx^2+Nx+P)$, $k=\text{cte}$.

$$\rightarrow A=kM \rightarrow \frac{A}{M}=k \qquad \rightarrow B=kN \rightarrow \frac{B}{N}=k$$

$$\rightarrow C=kP \rightarrow \frac{C}{P}=k$$

De donde: $\dfrac{A}{M}=\dfrac{B}{N}=\dfrac{C}{P}=k$

Ejemplos

1. Las ecuaciones $3x^2-5x+2=0$ y $9x^2-15x+6=0$ son equivalentes ya que

$$\frac{3}{9}=\frac{-5}{-15}=\frac{2}{6}$$

2. Calcule el valor de $(n-m)$ si las ecuaciones cuadráticas

$(2m+1)x^2-(3m-1)x+2=0;$

$(n+2)x^2-(2n+1)x-1=0$

son equivalentes.

Resolución

Como son equivalentes, entonces

$$\frac{2m+1}{n+2}=\frac{-(3m-1)}{-(2n+1)}=\frac{2}{-1}$$

Luego se tiene

$$\frac{2m+1}{n+2}=-2 \rightarrow 2m+2n=-5 \qquad (\alpha)$$

$$\frac{3m-1}{2n+1}=-2 \rightarrow 3m+4n=-1 \qquad (\beta)$$

De $2(\alpha)-(\beta)$

$$4m+4n-3m-4n=-10+1$$

$$\rightarrow m=-9$$

En (α)

$$2(-9)+2n=-5$$

$$\rightarrow n=\frac{13}{2}$$

$$\therefore n-m=\frac{13}{2}+9=\frac{31}{2}$$

▸▸ Tenga en cuenta

Dos ecuaciones cuadráticas $Ax^2+Bx+C=0$ y $Mx^2-Nx+P=0$ tienen una solución común si $(CM-PA)^2=(BP-NC)(AN-BM)$

ECUACIONES CÚBICAS

Son aquellas ecuaciones polinomiales de tercer grado, cuya forma general es:

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0;\ A\neq 0$$

Por el teorema fundamental del álgebra y su corolario, la ecuación tiene 3 raíces, a las que denotaremos por x_1; x_2; x_3. Luego la podemos escribir así:

$$A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0;\ A\neq 0$$

Multiplicamos para reconstruir la ecuación

$$Ax^3-A(x_1+x_2+x_3)x^2+A(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-Ax_1x_2x_3=0.$$

Esta es otra forma de escribir la ecuación inicial:

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0.$$

Luego, si comparamos los coeficientes obtenemos el siguiente teorema.

Teorema de Cardano-Viète (para ecuaciones cúbicas)

En toda ecuación cúbica:

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0;\ A\neq 0$$

de raíces x_1, x_2; x_3, se cumple:

I. Suma de raíces:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{B}{A}$$

II. Suma de productos binarios de las raíces:

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{C}{A}$$

III. Producto de las raíces:

$$x_1x_2x_3=-\frac{D}{A}$$

Ejemplos

1. Dada la ecuación cúbica: $x^3-5x-4=0$, factorizamos el polinomio por el método de los divisores binómicos:

El polinomio $P_{(x)}=x^3-5x-4$ se anula para $x=-1$, es decir,

$P_{(-1)}=0 \rightarrow -1$ es raíz de $P_{(x)}$

$\rightarrow (x+1)$ es factor de $P_{(x)}$

$\rightarrow P_{(x)}=(x+1)Q_{(x)}$, donde $Q_{(x)}=x^2-x-4$.

($Q_{(x)}$ se halla usando la regla de Ruffini).

Luego, $(x+1)(x^2-x-4)=0$

$\rightarrow x+1=0 \vee x^2-x-4=0$

$$x_1=-1;\ x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2};\ x_3=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$$

Luego, con estos valores (raíces) encontrados se comprueba que:

$x_1+x_2+x_3=0;\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-5;$

$x_1x_2x_3=4.$

2. Si $a; b; c$ son raíces de la ecuación $x^3-2x+5=0$, halle el valor de $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}$.

Resolución

Por teorema de Cardano-Viète se tiene:

I. $a+b+c=0$

II. $ab+ac+bc=-2$

III. $abc=-5$

Si usamos las igualdades condicionales con $a+b+c=0$, tenemos:

$$a^2+b^2+c^2=-2(ab+ac+bc)=-2(-2)=4$$

$$a^3+b^3+c^3=3abc=3(-5)=-15$$

$$\therefore\ \frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}=\frac{4}{-15}=-\frac{4}{15}$$

3. Si una de las raíces de la ecuación $x^3-(2k-1)x+3k=0$ es 2, calcule el producto de las otras dos.

Resolución

Como una de las raíces es 2, entonces verifica la ecuación.

Luego:

$$2^3-(2k-1)2+3k=0 \rightarrow 8-4k+2+3k=0$$

$\rightarrow 10-k=0 \rightarrow k=10.$

Por el teorema de Cardano-Viète

$$x_1x_2x_3=-3k \rightarrow 2x_2x_3=-30$$

$\therefore\ x_2x_3=-15$

▸▸ Tenga en cuenta

En toda ecuación cúbica de la forma $x^3+px+q=0$, de raíces x_1, x_2 y x_3, se cumple que:

$$x_1+x_2+x_3=0$$

En consecuencia

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2p$$

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=3q$$

Resolución general de la ecuación cúbica

Esta solución se conoce generalmente como la fórmula de Cardano, ya que fue publicada por primera vez por él en su obra *Ars Magna*, en 1545. Cardano obtuvo la solución de Tartaglia, pero la solución original de la cúbica parece deberse originalmente a Scipío del Ferro, alrededor del año 1505.

Sea la ecuación $x^3+ax^2+bx+c=0$.

I. Buscaremos eliminar el término cuadrático haciendo el siguiente cambio de variable:

$$x=t-\frac{a}{3},$$

con lo cual se obtiene la ecuación

$$t^3+pt+q=0,$$

llamada ecuación cúbica incompleta.

II. Supongamos que la ecuación cúbica incompleta tiene una solución de la forma $y+z$. Luego, por definición de solución:

$$(y+z)^3+pt+q\equiv 0$$

$$\rightarrow\ y^3+z^3+3yz\underbrace{(y+z)}_{t}+pt+q=0$$

$$\rightarrow\ \left(y^3+z^3+q\right)+3yzt+pt=0$$

$$\rightarrow\ \left(y^3+z^3+q\right)+(3yz+p)t=0$$

La cual se verifica si

$$\begin{cases} y^3+z^3+q=0 \\ 3yz+p=0 \ \rightarrow\ yz=-\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

$$\rightarrow\ y^3+z^3=-q\ \wedge\ y^3z^3=-\frac{p^3}{27}$$

III. Conociendo la suma y el producto de y^3; z^3, se puede formar una ecuación cuadrática de raíces y^3; z^3.

Así: $r^2-\left(y^3+z^3\right)r+y^3z^3=0$,

es decir $r^2+qr-\dfrac{p^3}{27}=0$,

llamada ecuación resolvente.

$$\rightarrow\ r=\frac{-q\pm\sqrt{q^2-4\left(-\dfrac{p^3}{27}\right)}}{2}$$

Como y^3; z^3 son las raíces de esta ecuación, entonces:

$$y^3=-\left(\frac{q}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$z^3=-\left(\frac{q}{2}\right)-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

IV. Si en los resultados anteriores hacemos $\Delta=\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$, entonces tenemos:

$$t=y+z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$$

Como $x=t-\dfrac{a}{3}$, entonces la solución general de la ecuación cúbica es:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}-\frac{a}{3}$$

V. Además las raíces de $t^3+pt+q=0$, con $\Delta=\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$, son:

- $t_1=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$
- $t_2=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}\,w+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\,w^2$
- $t_3=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}\,w^2+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\,w$

Donde $w=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Ejemplos

1. Resuelva la ecuación $x^3-15x-126=0$.

Resolución

I. Sea $x=y+z$ la solución de la ecuación; luego se tiene:

$$(y+z)^3-15x-126=0$$

$$\rightarrow y^3+z^3+3yz\underbrace{(y+z)}_{x}-15x-126=0$$

$$\rightarrow (y^3+z^3-126)+(3yz-15)x=0$$

Se cumple cuando $y^3+z^3=126 \wedge yz=5$

$$\rightarrow y^3+z^3=126 \wedge y^3z^3=125$$

II. La ecuación resolvente (de raíces y^3; z^3) es $t^2-126t+125=0 \rightarrow (t=125 \vee t=1)$.

Es decir

$$y^3=125,\ z^3=1 \rightarrow y=5,\ z=1$$

Luego

- $x_1=5+1=6$
- $x_2=5w+w^2=5\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
- $x_3=5w^2+w=$

$$=5\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\therefore\ CS=\{6;\ -3+2\sqrt{3}i;\ -3-2\sqrt{3}i\}$$

2. Calcule la raíz real de la ecuación $x^3+12x-12=0$.

Resolución

I. Hacemos $x=y+z$; luego:

$$y^3+z^3+3yzx+12x-12=0$$

Lo cual se cumple si

$$y^3+z^3=12 \wedge yx=-4$$

$$\rightarrow y^3+z^3=12 \wedge y^3z^3=-64$$

II. La ecuación resolvente es $t^2-12t-64=0$.

Factorizamos: $(t-16)(t+4)=0$

$$\rightarrow t=16 \vee t=-4$$

$$\rightarrow y^3=16;\ z^3=-4$$

$$\rightarrow y=\sqrt[3]{16};\ z=-\sqrt[3]{4}$$

$$\therefore\ x=\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}$$

Discriminante de la ecuación cúbica

Si x_1; x_2; x_3 son las raíces de la ecuación cúbica $x^3+ax^2+bx+c=0$, entonces el número denotado por D:

$$D=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$$

se llama discriminante de la ecuación cúbica dada.

Teorema

El discriminante de la ecuación cúbica incompleta

$$x^3+px+q=0 \text{ es } D=-108\left[\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2\right].$$

Demostración

Sean x_1; x_2; x_3 las raíces de la ecuación $x^3+px+q=0$. Por el teorema de Cardano tenemos:

$$x_1+x_2+x_3=0$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p$$

$$x_1x_2x_3=-q$$

Además $x_1; x_2; x_3$ satisfacen

$$x_1^3+px_1+q=0 \qquad \text{(I)}$$

$$x_2^3+px_2+q=0 \qquad \text{(II)}$$

$$x_3^3+px_3+q=0 \qquad \text{(III)}$$

Restamos la ecuación (II) de (I)

$$x_1^3-x_2^3+p(x_1-x_2)=0$$

$$\rightarrow (x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+p)=0$$

Suponiendo que las tres raíces son diferentes (en otro caso el análisis es distinto y más fácil; dejamos la verificación para el lector). Luego:

$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2+p=0$$

Análogamente:

$$x_1^2+x_1x_3+x_3^2+p=0$$

$$x_2^2+x_2x_3+x_3^2+p=0$$

Completamos cuadrados en cada una de estas ecuaciones

$$(x_1-x_2)^2=-3x_1x_2-p$$

$$(x_1-x_3)^2=-3x_1x_3-p$$

$$(x_2-x_3)^2=-3x_2x_3-p$$

Multiplicamos miembro a miembro y obtenemos:

$$D=-(3x_1x_2+p)\,(3x_1x_3+p)\,(3x_2x_3+p)$$

$$\rightarrow D=-\left[p^3+3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)p^2+ +9x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)\cdot p+27(x_1x_2x_3)^2\right]$$

$$\rightarrow D=-\left[p^3+3p^3+\underbrace{9(-q)\cdot 0\cdot p}_{0}+27(-q)^2\right]$$

Entonces

$$D=-(4p^3+27q^2)$$

$$\therefore\ D=-108\left[\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2\right]$$

Ejemplo

Calcule el discriminante de la ecuación cúbica $x^3-12x+12=0$.

Resolución

Identificamos los coeficientes: $p=-12$; $q=12$

Como $D=-108\left[\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2\right]$

$$\rightarrow D=-108\left[\left(\frac{-12}{3}\right)^3+\left(\frac{12}{2}\right)^2\right]$$

$$\rightarrow D=-108\left[(-4)^3+6^2\right]$$

$$\rightarrow D=-108[-64+36]$$

$$\therefore\ D=-108(-28)=3024$$

Teorema del análisis de las raíces

Sea la ecuación cúbica

$$x^3+px+q=0,\ \{p; q\}\subset \mathbb{R},$$

de raíces $x_1; x_2; x_3$ y

$$\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Se cumple:

I. Si $\Delta<0 \rightarrow \{x_1; x_2; x_3\}\subset \mathbb{R}$, además todas distintas.

II. Si $\Delta=0 \rightarrow \{x_1; x_2; x_3\}\subset \mathbb{R}$, además $x_1=x_2$.

III. Si $\Delta>0 \rightarrow x_1\in \mathbb{R},\ x_2=\overline{x_3}\ \wedge\ x_2, x_3\in \mathbb{C}-\mathbb{R}$.

Demostración

Recordemos que si

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}} \quad \wedge \quad z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}},$$

donde $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$, las raíces son

$$x_1=y+z;\ x_2=yw+zw^2;\ x_3=yw^2+zw,$$

con $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Entonces

I. Si $\Delta<0$, entonces y, z; son imaginarios de la forma $a+bi$, $a-bi$. Luego, las raíces son:

- $x_1=a+bi+a-bi \rightarrow x_1=2a$
- $x_2=(a+bi)w+(a-bi)w^2$
  $\rightarrow x_2=-a-b\sqrt{3}$
- $x_3=(a+bi)w^2+(a-bi)w$
  $\rightarrow x_3=-a+b\sqrt{3}$

Nótese que las tres raíces son reales; este es el caso llamado irreductible de la fórmula de Cardano, porque el cálculo de los tres valores reales a que se reduce la expresión compleja es preciso hacerlo trigonométricamente.

II. Si $\Delta=0$, se tiene que y; z son reales además $y=z$ y las raíces son:

- $x_1=y+z \rightarrow x_1=2y$
- $x_2=yw+zw^2 \rightarrow x_2=y(w+w^2)$
  $\rightarrow x_2=-y$
- $x_3=yw^2+zw \rightarrow x_3=y(w^2+w)$
  $\rightarrow x_3=-y$

Nótese que las tres raíces son reales y dos de ellas, iguales.

III. Si $\Delta>0$, entonces y^3; z^3 son reales, de las cuales y; z son sus raíces aritméticas. Luego, las raíces son:

- $x_1=y+z \rightarrow x_1=y+z$
- $x_2=yw+zw^2 \rightarrow x_2=-\frac{y+z}{2}+\frac{y-z}{2}\sqrt{3}i$
- $x_3=yw^2+zw \rightarrow x_3=-\frac{y+z}{2}-\frac{y-z}{2}\sqrt{3}i$

Nótese que una raíz es real y las otras dos son complejas conjugadas.

Ejemplos

1. Analice las raíces de la ecuación $x^3-3x+2=0$.

Resolución

Vemos que

$$\Delta=\left(\frac{2}{2}\right)^2+\left(\frac{-3}{3}\right)^3=0.$$

Luego concluimos, por el teorema anterior, que las tres raíces son reales, dos de las cuales son iguales.

Verifiquemos resolviendo la ecuación.

Factorizamos el polinomio $P_{(x)}=x^3-3x+2$ por divisores binómicos.

Como $P_{(1)}=0 \rightarrow (x-1)$ es un factor de $P_{(x)}$.

$\rightarrow P_{(x)}=(x-1)\cdot q_{(x)}$. Entonces $q_{(x)}=\frac{P_{(x)}}{x-1}$

Hallamos $q_{(x)}$ aplicando la regla de Ruffini, así:

	1	0	−3	2
$x=1$		1	1	−2
	1	1	−2	0

$\rightarrow q_{(x)}=x^2+x-2$

$\rightarrow P_{(x)}=(x-1)(x^2+x-2)$

Luego

$$(x-1)(x^2+x-2)=0$$

$$\rightarrow\ (x-1)(x-1)(x+2)=0$$

$$\therefore\ x_1=x_2=1;\ x_3=-2.$$

2. Analice las raíces de la ecuación $x^3-4x+3=0$.

Resolución

Vemos que $\Delta=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{-4}{3}\right)^3<0$.

Por el teorema anterior concluimos que las tres raíces son reales y distintas.
Verifiquemos resolviendo la ecuación.

Factorizamos el polinomio
$P_{(x)}=x^3-4x+3$ por divisores binómicos.

Como $P_{(1)}=0\ \rightarrow\ (x-1)$ es un factor de $P_{(x)}$.

$\rightarrow\ P_{(x)}=(x-1)\cdot q_{(x)}$

Hallamos $q_{(x)}$ por la regla de Ruffini y obtenemos
$P_{(x)}=(x-1)(x^2+x-3)$.

Luego

$$(x-1)(x^2+x-3)=0$$

$$\rightarrow\ x-1=0\ \vee\ x^2+x-3=0$$

$$\rightarrow\ x=1\ \vee\ x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

$$\therefore\ x_1=1;\ x_2=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2};\ x_3=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

3. Resuelva la ecuación $x^3-3x+1=0$.

Resolución

Como $\Delta=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-3}{3}\right)^3<0$,

entonces las tres raíces son reales y distintas.

Sea $x=y+z$ la solución, luego en la ecuación se tiene:

$$y^3+z^3+3yzx-3x+1=0$$

$$\rightarrow\ y^3+z^3=-1;\ yz=1$$

Luego, la ecuación resolvente es $t^2+t+1=0$.

$$\rightarrow\ t=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$$\rightarrow\ y^3=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3};$$

$$z^3=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$$

$$\rightarrow\ y=\operatorname{cis}\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}\right);$$

$$z=\operatorname{cis}\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)$$

Donde $k=0;\ 1;\ 2$.

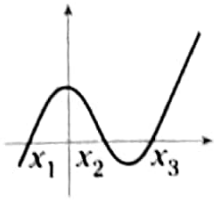
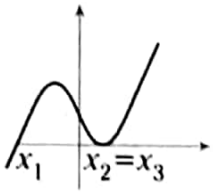
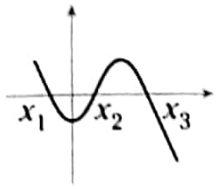
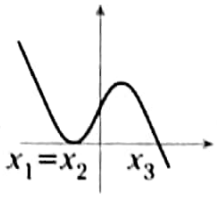
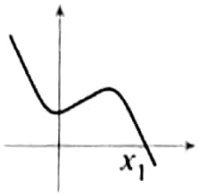
Como y es el conjugado de $z\ \wedge\ x=y+z$, entonces las raíces son:

- $x_1=2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\approx 1{,}530889$
- $x_2=2\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{3}=2\cos\frac{8\pi}{9}\approx -1{,}879385$
- $x_3=2\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{3}=2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right)\approx 0{,}347296$

Geométricamente

Sea el polinomio $P_{(x)}=a(x^3+px+q)$; $\{p;q\}\in\subset\mathbb{R}$, de raíces $x_1;x_2;x_3$ y $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$.

La gráfica de $P_{(x)}$ es cualquiera de los 6 casos.

$f_{(t)}$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

$\Delta > 0$

Caso irreducible de la fórmula de Cardano

Dada la ecuación cúbica: $x^3+px+q=0$, con p y q reales. Si $\Delta < 0$ su resolución trigonométrica es como sigue:

Como la solución es $x=y+z$, con $y^3=a+bi$; $z^3=a-bi$, entonces

$$x=(a+bi)^{1/3}+(a-bi)^{1/3}.$$

Hacemos $a=r\cos\theta$ y $b=r\operatorname{sen}\theta$, de tal manera que:

$$a^2+b^2=r^2;\ \tan\theta=\frac{b}{a},\ \text{entonces } (a+bi)^{1/3}=[r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)]^{1/3}.$$

Por el teorema de De Moivre, tenemos:

$$(a+bi)^{1/3}=\sqrt[3]{r}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{3}\right),\ \text{con } k=0;\ 1;\ 2.$$

Cuyos valores son

$$\sqrt[3]{r}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{3}\right);\qquad \sqrt[3]{r}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right);\qquad \sqrt[3]{r}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right).$$

Asimismo, los valores de $(a-bi)^{1/3}$ son los conjugados de los resultados anteriores. En tal sentido, las raíces de la ecuación cúbica $x^3+px+q=0$, con $\Delta < 0$, son:

$$x_1=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta}{3};\qquad x_2=2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right);\qquad x_3=2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right),$$

con $r^2=a^2+b^2$ y $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$.

ECUACIONES CUÁRTICAS

Son aquellas ecuaciones polinomiales de cuarto grado, cuya forma general es

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0;\ A\neq 0$$

La ecuación tiene 4 raíces a las que denotaremos por x_1; x_2; x_3; x_4. Luego podemos escribir la ecuación así:

$$A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=0;\ A\neq 0.$$

$$\rightarrow\ Ax^4-A(x_1+x_2+x_3+x_4)x^3+\ldots+Ax_1x_2x_3=0$$

Esta es otra forma de escribir la ecuación inicial.

Teorema de Cardano-Viète (para ecuaciones cuárticas)

En toda ecuación cuártica $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$, $A\neq 0$; de raíces x_1; x_2; x_3; x_4, se cumple:

I. Suma de raíces: $x_1+x_2+x_3+x_4=-\dfrac{B}{A}$

II. Suma de productos binarios:

$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_3x_4=\frac{C}{A}$$

III. Suma de productos ternarios:

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_2x_3x_4=-\frac{D}{A}$$

IV. Producto de raíces: $x_1x_2x_3x_4=\dfrac{E}{A}$

Ejemplo

Luego de resolver la ecuación $x^4-3x^2-6x-2=0$, de raíces x_1; x_2; x_3; x_4, halle:

I. $x_1+x_2+x_3+x_4$

II. $x_1x_2x_3x_4$

Resolución

Generalmente, una ecuación polinomial se resuelve por factorización.

Factorizamos el polinomio $P_{(x)}=x^4-3x^2-6x-2=0$ por el aspa doble especial.

$$x^4+0x^3-3x^2-6x-2$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & 2x & 2 \\ x^2 & -2x & -1 \end{array}$$

$$\text{ST: } x^2 \xrightarrow[\text{Falta}]{-4x^2} -3x^2 : \text{SDT}$$

$$\rightarrow\ (x^2+2x+2)(x^2-2x-1)=0$$

Luego

- $x^2+2x+2=0\ \rightarrow\ x=\dfrac{-2\pm 2i}{2}$

  $\rightarrow\ (x_1=-1+i;\ x_2=-1-i)$

- $x^2-2x-1=0\ \rightarrow\ x=\dfrac{2\pm\sqrt{8}}{2}$

  $\rightarrow\ (x_3=1+\sqrt{2};\ x_4=1-\sqrt{2})$

De donde:

I. $x_1+x_2+x_3+x_4=-1+i-1-i+1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=0$

II. $x_1x_2x_3x_4=(-1+i)(-1-i)(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-2$

Otro método

Usando el teorema de Cardano-Viète

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{0}{1}=0$$

$$x_1x_2x_3x_4=\frac{-2}{1}=-2$$

Resolución general de la ecuación cuártica

Sea la ecuación $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0;\ A\neq 0.$

Solución de Ferrari

La ecuación cuártica fue resuelta por primera vez el algebrista italiano Ludovico Ferrari (1522-1565), discípulo de Cardano. Luego se dieron muchos intentos para las ecuaciones de grado superior a 4, pero fueron en vano, ya que el matemático Abel demostró la imposibilidad de resolver por radicales las ecuaciones de grado superior a 4, utilizando la teoría de Galois.

En la ecuación $x^4+2px^3+qx^2+2rx+s=0$ se busca formar cuadrados perfectos.

Sumando miembro a miembro $(ax+b)^2$, a fin de que ambos miembros sean cuadrados perfectos, tenemos

$$x^4+2px^3+(q+a^2)x^2+2(r+ab)x+ +(s+b^2)=(ax+b)^2.$$

Supongamos que el primer miembro sea $(x^2+px+k)^2$.

$$\rightarrow x^4+2px^3+(q+a^2)x^2+2(r+ab)x+ +(s+b^2)\equiv(x^2+px+k)^2$$

Por identidad de polinomios:

$$p^2+2k=q+a^2;\ kp=r+ab;\ k^2=s+b^2$$

Eliminando a y b de estas ecuaciones tenemos

$$(pk-r)^2=(p^2+2k-q)(k^2-s),$$

con lo cual se forma la siguiente ecuación cúbica:

$$2k^3-qk^2+2(pr-s)k-p^2s+qs-r^2=0$$

De esta ecuación cúbica puede hallarse siempre un valor real de k, con lo cual a y b quedan determinadas.

Como $(x^2+px+k)^2=(ax+b)^2$

$\rightarrow x^2+px+k=\pm(ax+b)$

Luego, los valores de x se obtienen de las ecuaciones cuadráticas:

$$x^2+(p-a)x+k-b=0$$

$$x^2+(p+a)x+k+b=0$$

Ejemplo

Resuelva la ecuación $x^4-2x^3-5x^2+10x-3=0.$

Resolución

Sumamos en cada miembro $(ax+b)^2$. Así

$$x^4-2x^3+(a^2-5)x^2+2(ab+5)x+ +b^2-3=(ax+b)^2$$

Sea el primer miembro igual a $(x^2-x+k)^2$.

Es decir

$$x^4-2x^3+(a^2-5)x^2+2(ab+5)x+b^2-3\equiv \equiv x^4-2x^3+(2k+1)x^2-2kx+k^2$$

Por identidad de polinomios:

$$a^2=2k+6;\ ab=-k-5;\ b^2=k^2+3$$

Luego se obtiene $(2k+6)(k^2+3)=(-k-5)^2$,

que efectuando es $2k^3+5k^2-4k-7=0.$

Como vemos, un valor de k es -1,

de donde $a^2=4;\ ab=-4;\ b^2=4\ \rightarrow\ a=2;\ b=-2$

Luego, la ecuación $(x^2-x+k)^2=(ax+b)^2$ queda $(x^2-x-1)^2=(2x-2)^2$

$\rightarrow\ x^2-x-1=\pm(2x-2)$

Es decir

$$x^2-3x+1=0\ \rightarrow\ x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$x^2+x-3=0\ \rightarrow\ x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

Luego, las raíces son:

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ \frac{3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{13}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

Solución de Descartes

La siguiente solución fue dada por René Descartes (sabio y filósofo francés, inventor de la geometría analítica), en el año 1637. Así, sea la ecuación

$$x^4+Ax^3+Bx+Cx+D=0.$$

I. Hacemos el siguiente cambio de variable $x=y-\frac{A}{4}$, con lo cual se elimina el término cúbico y la ecuación queda reducida así:

$y^4+qy^2+ry+s=0$ (ecuación cuártica incompleta)

II. Suponga que el polinomio cuártico queda

$$y^4+qy^2+ry+5=(y^2+ky+l)(y^2-ky+m)$$

De la igualdad de polinomios se tiene:

$$l+m-k^2=q;\quad k(m-l)=r;\quad lm=s$$

De las dos primeras ecuaciones:

$$2m=k^2+q+\frac{r}{k};$$

$$2l=k^2+q-\frac{r}{k}$$

Y reemplazando en la tercera

$$(k^3+qk+r)(k^3+qk-r)=4sk^2$$

Es decir

$$k^6+2qk^4+(q^2-4s)k^2-r^2=0$$

Esta es una ecuación cúbica en k^2 y tiene siempre una solución positiva. Cuando se conoce k^2, se conocen los valores de l y m, y la solución de la cuártica incompleta se obtiene resolviendo las dos ecuaciones cuadráticas:

$$y^2+ky+l=0 \ \wedge\ y^2-ky+m=0$$

Ejemplo

Resuelva la ecuación $x^4-2x^2+8x-3=0$.

Resolución

Hagamos $x^4-2x^2+8x-3\equiv(x^2+kx+l)(x^2-kx+m)$.

De la igualdad de polinomios:

$$l+m-k^2=-2;\quad k(m-l)=8;\quad lm=-3 \qquad (\alpha)$$

De donde obtenemos:

$$(k^3-2k+8)(k^3-2k-8)=-12k^2$$

$$\rightarrow\ k^6-4k^4+16k^2-64=0$$

Nótese que un valor de k^2 es 4.

Entonces $k=2 \ \vee\ k=-2$.

Si tomamos $k=2$ en (α) tenemos:

$$m+l=2;\quad m-l=4\ \rightarrow\ m=3;\quad l=-1$$

Luego

$$x^4-2x^2+8x-3\equiv(x^2+2x-1)(x^2-2x+3)=0$$

Entonces

$$x^2+2x-1=0\ \rightarrow\ x=-1\pm\sqrt{2}$$

$$x^2-2x+3=0\ \rightarrow\ x=1\pm\sqrt{2}i$$

Luego, las raíces son:

$$-1+\sqrt{2};\quad -1-\sqrt{2};\quad 1+\sqrt{2}i;\quad 1-\sqrt{2}i$$

ECUACIONES BICUADRADAS

Es una ecuación cuártica de la forma particular

$$Ax^4+Bx^2+C=0;\quad ABC\neq 0$$

Resolución general

I. Hacemos el siguiente cambio de variable $x^2=t$

$$\rightarrow\ At^2+Bt+C=0$$

II. Usamos la fórmula general de la ecuación cuadrática

$$t=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

Como $t=x^2$, entonces

$$\boxed{x=\pm\sqrt{\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}}}$$

Ejemplos

1. Resuelva la ecuación $x^4-8x^2-9=0$.

Resolución

Hacemos $x^2=t \rightarrow t^2-8t-9=0$,

$\rightarrow (t-9)(t+1)=0$.

De donde:

- $t=9 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=3 \vee x=-3$
- $t=-1 \rightarrow x^2=-1 \rightarrow x=i \vee x=-i$

$\therefore$ CS$=\{3;-3;i;-i\}$

2. Resuelva la ecuación $x^4-5x^2-9=0$.

Resolución

Hacemos $x^2=y \rightarrow y^2-5y-9=0$.

Aplicamos la fórmula general de la ecuación cuadrática:

$$\rightarrow y=\frac{5\pm\sqrt{61}}{2} \rightarrow x^2=\frac{5+\sqrt{61}}{2} \vee x^2=\frac{5-\sqrt{61}}{2}$$

$$\therefore \text{CS}=\left\{\sqrt{\frac{5+\sqrt{61}}{2}};-\sqrt{\frac{5+\sqrt{61}}{2}};\sqrt{\frac{5-\sqrt{61}}{2}};-\sqrt{\frac{5-\sqrt{61}}{2}}\right\}$$

Propiedades

1. Si $x_1=\alpha$ y $x_2=\beta$ son dos raíces de una ecuación bicuadrada, tal que $|\alpha|\neq|\beta|$, entonces $x_3=-\alpha$ y $x_4=-\beta$ también son raíces de la ecuación bicuadrada.

   Luego: $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ y CS$=\{\alpha;-\alpha;\beta;-\beta\}$

2. Si α y β son dos raíces de una ecuación bicuadrada $Ax^4+Bx^2+C=0$ con $|\alpha|\neq|\beta|$, por el teorema de Cardano se cumple:

$$\alpha^2+\beta^2=-\frac{B}{A}$$

$$\alpha^2\cdot\beta^2=-\frac{C}{A}$$

Formación de una ecuación bicuadrada

Buscamos formar una ecuación bicuadrada conociendo α y β, dos de sus raíces; $\alpha\neq\pm\beta$. Si se conoce una raíz α, la otra será $-\alpha$; y si conocemos una raíz β, la otra será $-\beta$. Entonces las raíces son α; $-\alpha$; β; $-\beta$. Luego, la ecuación es $(x-\alpha)(x+\alpha)(x+\beta)(x-\beta)=0$, que efectuando se obtiene:

$$\boxed{x^4-(\alpha^2+\beta^2)x^2+\alpha^2\beta^2=0}$$

Ejemplos

1. Forme la ecuación bicuadrada si dos de sus raíces son 3; −5.

Resolución

Si una raíz es 3, la otra será −3. Si una raíz es −5, la otra será 5.

Entonces, la ecuación pedida es

$$(x-3)(x+3)(x+5)(x-5)=0$$

$$(x^2-9)(x^2-25)=0$$

De donde la ecuación requerida es

$$x^4-34x^2+225=0$$

2. Calcule el valor entero de m, de modo que la ecuación $x^4=(ax+m+1)(ax-m-1)$ tenga raíces en progresión aritmética (PA); además, $a=\sqrt{3m+4}$.

Resolución

Escribimos la ecuación así:

$$x^4=[ax+(m+1)][ax-(m+1)]$$

$\rightarrow\ x^4=a^2x^2-(m+1)^2$, con $a^2=3m+4$

$\rightarrow\ x^4-(3m+4)x^2+(m+1)^2=0 \qquad (*)$

Sean α; β; $-\alpha$; $-\beta$ las raíces, con $\alpha<\beta$.

Ordenándolas de menor a mayor quedan $-\beta$; $-\alpha$; α; β.

Como están en P.A., tendremos que

$$2\alpha=-\alpha+\beta \ \rightarrow\ \beta=3\alpha$$

Luego, las raíces son α; $-\alpha$; 3α; -3α. Entonces, la ecuación es

$$x^4-10\alpha^2x+9\alpha^4=0 \qquad (**)$$

De (*) y (**) se obtiene que

$$3m+4=10\alpha^2 \qquad (I)$$

$$(m+1)^2=9\alpha^4 \qquad (II)$$

De (II)

$$m+1=3\alpha^2 \ \vee\ m+1=-3\alpha^2$$

En (I)

$$3m+4=10\left(\frac{m+1}{3}\right) \ \vee\ 3m+4=-10\left(\frac{m+1}{3}\right)$$

$\rightarrow\ 9m+12=10m+10 \ \vee\ 9m+12=-10m-10$

$\rightarrow\ m=2 \ \vee\ m=-\dfrac{22}{19}$

Como m es entero $\rightarrow\ m=2$

3. Calcule la suma de los valores que puede tomar a, de tal manera que la ecuación bicuadrada $x^4-(a+2)x^2+4=0$ tenga dos raíces α; β ($\alpha\neq\pm\beta$), y que a la vez estas sean raíces de $x^2+ax+b=0$ para algún $b<0$.

Resolución

De la ecuación cuadrática

$$x^2+ax+b=0 \ \rightarrow\ \begin{cases}\alpha+\beta=-a\\ \alpha\cdot\beta=b\end{cases}$$

De la ecuación bicuadrada

$$x^4-(a+2)x^2+a=0 \rightarrow \begin{cases}\alpha^2+\beta^2=a+2\\ \alpha^2\beta^2=4 \rightarrow \alpha\beta=-2\end{cases}$$

Como $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$

$\rightarrow\ (-a)^2=a+2+2(-2) \ \rightarrow\ a^2-a+2=0$

Si a_1 y a_2 son los valores de a, por el teorema de Cardano se tiene que: $a_1+a_2=1$

ECUACIONES RECÍPROCAS

Polinomio recíproco

Un polinomio $P_{(x)}$ de grado n se llama recíproco si cumple la siguiente propiedad:

$$P_{(x)}=x^n\cdot p\left(\frac{1}{x}\right);\ n\in\mathbb{N}$$

Los siguientes polinomios son recíprocos.

- $P_{(x)}=2x^2-x+2$
- $Q_{(x)}=x^3+3x^2+3x+1$
- $R_{(x)}=3x^4-2x^3+5x^2-2x+3$
- $S_{(x)}=x^5+2x^4-x^3-x^2+2x+1$

Luego, podemos decir que los polinomios recíprocos son de la forma

$ax+a$

ax^2+bx+a

ax^3+bx^2+bx+a

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a$

$\vdots$

En consecuencia, si α es una raíz de un polinomio recíproco, entonces $1/\alpha$ es otra raíz. Es decir, una raíz es "la inversa multiplicativa de la otra".

Ejemplo

Factorice el polinomio

$P_{(x)}=x^4-10x^3+26x^2-10x+1.$

Resolución

Escribamos el polinomio así:

$$P_{(x)}=x^2\left[x^2-10x+26-\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}\right]$$

Agrupamos adecuadamente

$$P_{(x)}=x^2\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+26\right]$$

Hacemos un cambio de variable

$$x+\frac{1}{x}=y \;\rightarrow\; x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

Luego

$$P=x^2[y^2-2-10y+26]=x^2(y-4)(y-6)$$

En términos de la variable inicial:

$$P_{(x)}=x^2\left(x+\frac{1}{x}-4\right)\left(x+\frac{1}{x}-6\right)$$

$\therefore\; P_{(x)}=(x^2-4x+1)(x^2-6x+1)$ está factorizado.

Propiedad

Todo polinomio recíproco $P_{(x)}$ de grado impar se anula para $x=-1$. Por ejemplo, en el polinomio $P_{(x)}=x^3-5x^2-5x+1$ se observa que:

$P_{(-1)}=-1-5+5+1=0.$

Entonces $x=-1$ es una raíz de este polinomio.

Ejemplo

Factorice el polinomio

$P_{(x)}=x^5+5x^4+9x^3+9x^2+5x+1.$

Resolución

Observamos que $P_{(-1)}=0 \;\rightarrow\; (x+1)$ es un factor de $P_{(x)}$

Luego

$$P_{(x)}=(x+1)\cdot q_{(x)}$$

$$\rightarrow\; q_{(x)}=\frac{P_{(x)}}{x+1}$$

Hallamos $q_{(x)}$ usando la regla de Ruffini

	1	5	9	9	5	1
−1	↓	−1	−4	−5	−4	−1
	1	4	5	4	1	0

$$\rightarrow\; q_{(x)}=x^4+4x^3+5x^2+4x+1$$

Luego

$$P_{(x)}=(x+1)(x^4+4x^3+5x^2+4x+1)$$

Factorizamos $q_{(x)}$ por aspa doble especial

$$x^4+4x^3+5x^2+4x+1$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x & 1 \end{array}$$

$$\text{ST: } 2x^2 \xrightarrow[\text{Falta}]{3x^2} 5x^2\text{: SDT}$$

$\therefore\; P_{(x)}=(x+1)(x^2+3x+1)(x^2+x+1)$

está factorizado.

Ecuación recíproca

Si $P_{(x)}$ es un polinomio recíproco, entonces $P_{(x)}=0$ es una ecuación recíproca.

Luego, las siguientes ecuaciones son recíprocas:

- $P_{(x)}=x^3-2x^2-2x+1=0$
- $Q_{(x)}=x^4+x^3+x^2+x+1=0$
- $R_{(x)}=2x^5+3x^4-x^3-x^2+3x+2=0$

Ejemplos

1. Resuelva la ecuación $z^4+2z^3-6z^2+2z+1=0$.

   Resolución

   Dividiendo por z^2 y agrupando se tiene:

   $$\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+2\left(z+\frac{1}{z}\right)-6=0$$

   Hacemos $z+\frac{1}{z}=u \rightarrow z^2+\frac{1}{z^2}=u^2-2.$

   Luego tenemos la ecuación $u^2-2+2u-6=0$

   $\rightarrow (u-2)(u+4)=0$

   $\rightarrow u=2 \vee u=-4$

   De donde:

   - $z+\frac{1}{z}=2 \rightarrow z_1=1;\ z_2=1$
   - $z+\frac{1}{z}=-4 \rightarrow z_3=-2+\sqrt{3};\ z_4=-2-\sqrt{3}$

   $\therefore\ \text{CS}=\{1;\ -2+\sqrt{3};\ -2-\sqrt{3}\}$

2. Calcule el valor de m si la ecuación $(9m-4)x^2-\sqrt{m}\,(9m-4)x+m+5=0$ admite raíces recíprocas.

   Resolución

   Si la ecuación tiene raíces recíprocas, se cumple:

   $$9m-4=m+5 \rightarrow 8m=9$$

   $$\therefore\ m=\frac{9}{8}$$

ECUACIONES BINÓMICAS

Son aquellas ecuaciones polinomiales de la forma:

$$\boxed{x^n+A=0,\ n\in\mathbb{N}\ \wedge\ A\in\mathbb{C}\setminus\{0\}}$$

Para la resolución de esta ecuación aplicamos el teorema de De Moivre. Así:

$$x^n+A=0 \leftrightarrow x^n=-A$$

donde

$$-A=|-A|(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)=|-A|\operatorname{cis}\alpha$$

Entonces $x^n=|-A|\operatorname{cis}\alpha$

$$\therefore\ x=\sqrt[n]{|-A|}\operatorname{cis}\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),\ k=0;\ 1;\ \ldots;\ (n-1)$$

Ejemplos

1. Resuelva la ecuación $x^3-8=0$.

   Resolución

   Tenemos: $x^3-8=0 \rightarrow x^3=8$

   $\rightarrow x^3=8\operatorname{cis}0°$

   $\rightarrow x=\sqrt[3]{8}\operatorname{cis}\left(\frac{0°+2k\pi}{3}\right)$

   $\rightarrow x=2\operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{3}\right),\ k=0;\ 1;\ 2$

   Si $k=0$

   $\rightarrow x_1=2\operatorname{cis}0°=2(\cos 0°+i\operatorname{sen}0°)=2$

   Si $k=1$

   $$\rightarrow x_2=2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$$
   $$=-1+\sqrt{3}i$$

   Si $k=2$

   $$\rightarrow x_3=2\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}=2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)=$$
   $$=-1-\sqrt{3}i$$

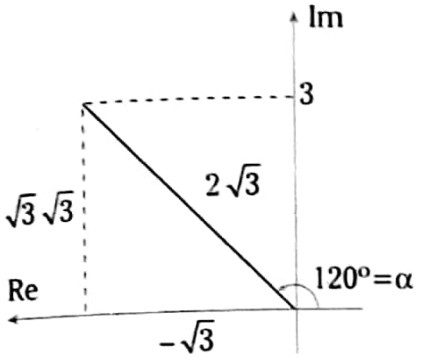
   $\therefore\ \text{CS}=\{2;\ -1+\sqrt{3}i;\ -1-\sqrt{3}i\}$

2. Resuelva la ecuación $x^4+\sqrt{3}-3i=0$.

Resolución

$$x^4+\sqrt{3}-3i=0 \leftrightarrow x^4=-\sqrt{3}+3i$$

Tenga en cuenta



En la forma polar:

$$|-\sqrt{3}+3i|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+3^2}=2\sqrt{3}$$

$$\tan\alpha=\frac{3}{-\sqrt{3}} \rightarrow \alpha=120^o$$

Como

$$-\sqrt{3}+3i=2\sqrt{3}\,\text{cis}\,120^o=2\sqrt{3}\,\text{cis}\frac{2\pi}{3}$$

$$\rightarrow x^4=2\sqrt{3}\,\text{cis}\frac{2\pi}{3}$$

$$\rightarrow x=\sqrt[4]{2\sqrt{3}}\,\text{cis}\left[\frac{\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)}{4}\right]$$

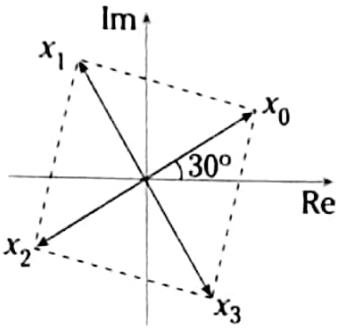
$$\rightarrow x=\sqrt[8]{12}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right) \quad ;$$

$$\rightarrow k=0;\ 1;\ 2;\ 3$$

Luego las raíces son:

- $x_0=\sqrt[8]{12}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$;
- $x_1=\sqrt[8]{12}\,\text{cis}\left(\frac{4\pi}{6}\right)$
- $x_2=\sqrt[8]{12}\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$;
- $x_3=\sqrt[8]{12}\,\text{cis}\left(\frac{10\pi}{6}\right)$

La representación geométrica de las raíces es:



Propiedades de las raíces de la ecuación $z^n-1=0$

I. La ecuación $z^n=1$ no admite raíces múltiples. Como sabemos, 1 en la forma polar se expresa como $1=\text{cis}0°$.

$$\rightarrow z=\text{cis}\frac{2k\pi}{n},\ n=0;\ 1;\ 2;\ ...;\ (n-1)$$

Para cada valor de k, los valores de z son diferentes.

Por ejemplo: si $z^3=1$, entonces

$$z=1;$$

$$z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

denotados por 1; w; w^2 respectivamente.

II. El producto y el cociente de dos raíces de $z^n=1$ o toda potencia entera de una raíz es también una raíz de la ecuación $z^n=1$. Veamos: Sean dos de las raíces

$$\alpha=\text{cis}\frac{2k_1\pi}{n} \wedge \beta=\text{cis}\frac{2k_2\pi}{n}$$

a. $\alpha \cdot \beta = \text{cis}\dfrac{2(k_1+k_2)\pi}{n}$ es raíz de $z^n=1$

b. $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\text{cis}2(k_1-k_2)\pi}{n}$ es raíz de $z^n=1$

c. Por definición $\alpha^n=1 \rightarrow (\alpha^p)^n=(\alpha^n)^p=1$

$\rightarrow$ α^p es raíz de $z^n=1$

III. Las raíces comunes de dos ecuaciones $z^n=1$; $z^m=1$ son también raíces de $z^p=1$, siendo p el máximo común divisor de m y n. Recíprocamente, si α es una raíz de $z^p=1$, será también raíz de $z^n=1$ y de $z^m=1$.

Veamos:

Sean $n=kp \wedge m=rp$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha^n=\alpha^{kp}=(\alpha^p)^k=1^k=1 \\ \alpha^m=\alpha^{rp}=(\alpha^p)^r=1^r=1 \end{cases}$$

Por lo tanto, α es raíz de z^n; z^m.

IV. Cuando n es un número primo y α es una raíz de la ecuación $z^n=1$, con $\alpha \neq 1$; la sucesión α; α^2; α^3; ...; α^n nos dará las n raíces de la ecuación.

Ejemplo

Resuelva la ecuación $x^{12}-1=0$.

Resolución

Factorizamos en $(x^6+1)(x^6-1)=0$.

$\rightarrow x^6-1=0 \vee x^6+1=0$

a. Si $x^6-1=0 \rightarrow (x^3-1)(x^3+1)=0$

$\rightarrow x^3=1 \vee x^3-1=0$, que tienen por raíces:

$$1;\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2};\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2};\ -1;\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2};\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

b. Si $x^6+1=0 \rightarrow x^3+\dfrac{1}{x^3}=0$.

Haciendo $x+\dfrac{1}{x}=u$

se tiene $u^3-3u=0$, con lo cual $u=0$; $u=\sqrt{3}$; $u=-\sqrt{3}$.

Entonces:

$$x+\frac{1}{x}=0;\ x+\frac{1}{x}=\sqrt{3};\ x+\frac{1}{x}=-\sqrt{3}$$

cuyas raíces son:

$$i;\ -i;\ \frac{-\sqrt{3}+i}{2};\ \frac{-\sqrt{3}-i}{2};\ \frac{\sqrt{3}+i}{2};\ \frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

Si llamamos a la raíz primitiva $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$, las demás raíces son:

$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6, \alpha^7, \alpha^8, \alpha^9, \alpha^{10}, \alpha^{11}, 1$

En general

Las raíces de la ecuación $x^n=1$ son:

$$x=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$k=0; 1; 2; ...; (n-1)$

De estas raíces, cuando k es primo se llaman raíces primitivas.

▸ Ecuación polinomial de grado n

Sea el polinomio general en una variable de grado n.

$$P_{(x)}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n;\quad a_0\neq 0$$

A la igualdad $P_{(x)}=0$ se le llama ecuación polinomial de grado n.

La resolución para estas ecuaciones surge –como hemos visto particularmente de la ecuación lineal, cuadrática, cúbica, cuártica, bicuadrada, recíproca y binomia–, mediante fórmulas generales en términos de sus coeficientes.

Sin embargo, no ha sido posible resolver en forma general una ecuación de quinto grado o superior mediante fórmulas generales (por radicales). Fue el matemático Évariste Galois (1811-1832) quien demostró que la ecuación polinomial general de grado $n \geq 5$ no es soluble por radicales, mediante la teoría de grupos (tratado en álgebra moderna). Pero si los coeficientes son numéricos, el valor de cualquiera de las raíces reales puede hallarse mediante aproximaciones (mediante las aplicaciones de la derivada).

Teoremas sobre ecuaciones polinomiales

Paridad de raíces complejas

En toda ecuación polinomial $P_{(x)}=0$ de grado $n \geq 2$ y coeficientes reales, una raíz es de la forma $a+bi$, $a; b \in \mathbb{R} \wedge b \neq 0$, si y solo si otra raíz es de la forma $a-bi$.

Demostración

Sea el polinomio $P_{(x)}$ de coeficientes reales $P_{(x)}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$; $a_0 \neq 0$. Supongamos que $z=a+bi$ es una raíz de $P_{(x)}$, probaremos que $\bar{z}=a-bi$ es otra de sus raíces.

Como z es una raíz de $P_{(x)}$, por definición de raíz se tiene:

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+...+a_n=0$$

Tomamos conjugado en ambos miembros:

$$\overline{a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+...+a_n}=\bar{0}$$

$$\rightarrow \bar{a}_0 \cdot \overline{z^n}+\bar{a}_1\overline{z^{n-1}}+\bar{a}_2\overline{z^{n-2}}+...+\bar{a}_n=\bar{0}$$

Pero a_0; a_1; a_2; ...; a_n son reales.

$$a_0 \cdot \bar{z}^n+a_1\bar{z}^{n-1}+a_2\bar{z}^{n-2}+...+a_n=0$$

De donde vemos que $\bar{z}$ es raíz del polinomio $P_{(x)}$.

Paridad de raíces irracionales

Una raíz de la ecuación polinomial $P_{(x)}=0$ de grado $n \geq 2$ y coeficientes racionales es de la forma $a+\sqrt{b}$, $a; b \in \mathbb{Q} \wedge \sqrt{b} \neq \notin \mathbb{Q}$, si y solo si otra de sus raíces es $a-\sqrt{b}$.

Ejemplos

1. Resuelva la ecuación $3x^3-5x^2+x-6=0$.

Resolución

Factorizamos el polinomio por el método de divisores binómicos.

Como 2 verifica la ecuación, entonces 2 es raíz.

Luego $3x^3-5x^2+x-6=(x-2)q_{(x)}$

El polinomio $q_{(x)}$ se halla usando la regla de Ruffini para

$$\frac{3x^3-5x^2+x-6}{x-2}$$

donde $q_{(x)}$ es el cociente.

Así:

	3	−5	1	−6
2	↓	6	2	6
	3	1	3	0

$\rightarrow q_{(x)}=3x^2+x+3$

Luego, la ecuación es: $(x-2)(3x^2+x+3)=0$

- $x-2=0 \rightarrow x_1=2$
- $3x^2+x+3=0 \rightarrow x=\dfrac{-1 \pm \sqrt{35}i}{6}$

$$\therefore \text{CS}=\left\{2;\ -\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{35}}{6}i;\ -\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{35}}{6}i\right\}$$

2. Resuelva la ecuación $x^4+2x^3-5x^2+6x+2=0$.

Resolución

Factorizamos por aspa doble especial

$$x^4+2x^3-5x^2+6x+2$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & -2x & 2 \\ x^2 & 4x & 1 \end{array}$$

$$\text{ST: } 3x^2 \xrightarrow[\text{Falta}]{-8x^2} -5x^2\text{: SDT}$$

$\rightarrow \left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+4x+1\right)=0$

$\rightarrow x^2-2x+2=0 \ \vee \ x^2+4x+1=0$

$\rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{-4}}{2} \ \vee \ x=\dfrac{-4\pm\sqrt{12}}{2}$

$\rightarrow x=\dfrac{2\pm 2i}{2} \ \vee \ x=\dfrac{-4\pm 2\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \ \text{CS}=\left\{1+i;\ 1-i;\ -2+\sqrt{3};\ -2-\sqrt{3}\right\}$

3. Si la ecuación polinomial de coeficientes racionales $x^5-7x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ tiene a $1+\sqrt{2}$ y $2+i$ como dos de sus raíces, calcule el valor de $a+b+c+d$.

Resolución

Como la ecuación $x^5-7x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ tiene coeficientes racionales: $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, entonces sus raíces son:

$x_1=1+\sqrt{2} \ \rightarrow \ x_2=1-\sqrt{2}$

$x_3=2+i \ \rightarrow \ x_4=2-i$

$x_5=?$

Por el teorema de Cardano:

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7$

$\rightarrow 1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+2+i+2-i+x_5=7$

$\rightarrow 6+x_5=7 \ \rightarrow \ x_5=1$

Como $x_5=1$ es la quinta raíz y es solución, entonces verifica la ecuación:

$1^5-7\cdot 1^4+a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d=0$

$\rightarrow 1-7+a+b+c+d=0$

$\rightarrow -6+a+b+c+d=0$

$\therefore \ a+b+c+d=6$

Generalización del teorema de Cardano-Viète

Dada la ecuación polinomial

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0;\ a_0\neq 0,$

de raíces $x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4;\ \ldots;\ x_n$, se cumple:

I. Suma de raíces:

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=-\frac{a_1}{a_0}$$

II. Suma de productos binarios:

$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0}$$

III. Suma de productos ternarios:

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\frac{a_3}{a_0}$$

$\vdots$

IV. Suma de productos tomados de k en k:

$$x_1x_2x_3\ldots x_k+x_2x_3\ldots x_kx_{k+1}+\ldots=(-1)^k\frac{a_k}{a_0}$$

$\vdots$

V. Producto de raíces: $x_1x_2x_3\ldots x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}$

Ejemplos

1. En la ecuación polinomial

$x^5-2x^4-8x^3+16x^2+16x-32=0,$

de raíces $x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4;\ x_5$, se cumple que:

I. $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=-\dfrac{-2}{1}=2$

II. $x_1x_2x_3x_4x_5=(-1)^5\dfrac{-32}{1}=32$

Factorizamos el polinomio por el método de divisores.
Como 2 verifica la ecuación, entonces 2 es raíz.

Luego

$$x^5-2x^4-8x^3+16x^2+16x-32=(x-2)\cdot q_{(x)}$$

El polinomio $q_{(x)}$ se halla usando la regla de Ruffini para

$$\frac{x^5-2x^4-8x^3+16x^2+16x-32}{x-2}$$

donde $q_{(x)}$ es el cociente.

Así:

	1	−2	−8	16	16	−32
2	↓	2	0	−16	0	32
	1	0	−8	0	16	0

$\rightarrow q_{(x)}=x^4-8x^2+16$

Entonces

$$(x-2)(x^4-8x^2+16)=0$$

$\rightarrow (x-2)(x^2-4)^2=0$

$\rightarrow (x-2)^3(x+2)^2=0$

$\rightarrow (x-2)^3=0 \ \vee \ (x+2)^2=0$

Luego, las raíces son

$$x_1=2;\ x_2=2;\ x_3=2;\ x_4=-2;\ x_5=-2$$

De donde:

I. $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2$

II. $x_1x_2x_3x_4x_5=32$

2. Si $1+\sqrt{3}$ es una raíz de $x^3+ax^2+bx+4=0$, con $a; b \in \mathbb{Q}$, calcule el valor de ab.

Resolución

I. Si $x_1=1+\sqrt{3} \rightarrow x_2=1-\sqrt{3}$
(teorema de la paridad de raíces)

II. Sea x_3 la tercera raíz, por el teorema de Cardano: $x_1x_2x_3=-4$

$\rightarrow (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})x_3=-4$

$\rightarrow -2x_3=-4 \rightarrow x_3=2$

III. Como $-a=x_1+x_2+x_3$
entonces
$-a=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+2, \rightarrow a=-4.$

IV. También
$b=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=x_1x_2+x_3(x_1+x_2)$

$\rightarrow b=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})+2(1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3})$

$\rightarrow b=-2+4 \rightarrow b=2$

$\therefore ab=-8$

TRANSFORMACIONES DE LAS ECUACIONES

Con frecuencia, es necesario transformar una ecuación en otra, cuyas raíces tengan una relación con las raíces de la ecuación general.
Las principales transformaciones son:

Cambiar de signo a las raíces

Dado el polinomio $P_{(x)}$ de raíces $x_1; x_2, ...; x_n$. Para hallar otro polinomio del mismo grado cuyas raíces sean $-x_1; -x_2; -x_3; ...; -x_n$, será suficiente cambiar la variable x del polinomio $P_{(x)}$ por $-x$.

Ejemplos

1. Sea $P_{(x)}=x^2+5x+6$
un polinomio de raíces −2, −3.
Entonces $P_{(-x)}=x^2-5x+6$
tiene como raíces a 2; 3.

2. Sea $H_{(x)}=x^2-4x-5$
un polinomio de raíces −1; 5.
Entonces $H_{(-x)}=x^2+4x-5$
tiene por raíces a 1; −5.

3. Sea $Q_{(x)}=x^3-2x^2+x-6$
   un polinomio de raíces 1; −2; 3.
   Entonces $Q_{(-x)}=-x^3-2x^2-x-6$
   tiene por raíces a −1; 2; −3.

Multiplicación de las raíces por una constante

Sea $P_{(x)}$ un polinomio de raíces $x_1; x_2; ...; x_n$. Buscaremos otro polinomio del mismo grado de P de raíces $rx_1; rx_2; rx_3; ..., rx_n$, donde r es constante no nula.

Sean x_k las raíces de $P_{(x)}$ y sean y_k las raíces del otro polinomio.

Luego, hacemos: $y_k=rx_k \rightarrow x_k=\frac{y_k}{r}$.

Será suficiente cambiar en $P_{(x)}$, x por $\frac{y}{r} \vee \frac{x}{r}$.

Ejemplos

1. Sea $P_{(x)}=x^2-4x+3$ un polinomio de raíces 1; 3. Buscaremos otro polinomio de raíces 4; 12, es decir, las raíces anteriores multiplicadas por 4.
   Sea x la raíz de $P_{(x)}$; se busca otro polinomio de raíces
   $$y=4x \rightarrow x=\frac{y}{4}.$$
   Entonces el polinomio buscado es
   $$P=\frac{y^2}{16}-4\left(\frac{y}{4}\right)+3$$
   o equivalentemente:
   $$P_{(y)}=\frac{1}{16}\left(y^2-16y+48\right)$$
   Factorizamos
   $$P_{(y)}=\frac{1}{16}(y-4)(y-12)$$
   de donde sus raíces son 4; 12.

2. Sea $P_{(x)}=x^2-3x-18$ un polinomio de raíces −3; 6. Se busca otro polinomio de raíces 1; −2, es decir, las raíces de $P_{(x)}$ quedan divididas entre −3.
   Sea x la raíz de $P_{(x)}$; lo que se busca es otro polinomio de raíz $y=\frac{x}{-3} \rightarrow x=-3y$, es decir, se reemplaza x por $-3y \vee -3x$.
   Se tendrá que reemplazar en $P_{(x)}$, x por $-3x$.
   Entonces, el polinomio es
   $$Q=(-3x)^2-3(-3x)-18.$$
   Es decir, $Q_{(x)}=9x^2+9x-18$ es el polinomio buscado de raíces 1; −2.
   Equivalentemente: $Q_{(x)}=9\left(x^2+x-2\right)$
   Factorizamos $Q_{(x)}=9(x-1)(x+2)$, de donde las raíces son 1; −2.

Las raíces aumentadas en una constante

Sea $P_{(x)}$ un polinomio de raíces $x_1; x_2; ...; x_n$. Buscaremos otro polinomio de raíces x_1+r; x_2+r; ...; x_n+r, es decir, las raíces aumentadas en una constante r.

Sean x_k las raíces de $P_{(x)}$; y sean y_k las raíces del otro polinomio. Hacemos: $y_k=x_k+r \rightarrow x_k=y_k-r$.

Solo hace falta reemplazar en el polinomio $P_{(x)}$, x por $y-r \vee x-r$.

Ejemplos

1. Sea $P_{(x)}=x^2-5x+6$ un polinomio de raíces 2; 3. Se busca otro polinomio de raíces 6; 7, es decir, las raíces aumentadas en 4.
   Será suficiente reemplazar x por $(x-4)$.
   Luego, $(x-4)^2-5(x-4)+6$ es el polinomio buscado, es decir, $x^2-13x+42$ tendrá raíces 6; 7.
2. Dada la ecuación $x^2+2x-15=0$, halle otra ecuación cuyas raíces sean el triple de las raíces de la ecuación anterior, disminuidas en 1.

Resolución

Sean x las raíces de $x^2+2x-15=0$. Se busca otra ecuación del mismo grado, cuyas raíces sean

$y=3x-1$ (el triple disminuido en 1)

$$\rightarrow x=\frac{y+1}{3}$$

Luego, reemplazando x por $\frac{x+1}{3}$ se tiene la ecuación

$$\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+2\left(\frac{x+1}{3}\right)-15=0$$

$$\rightarrow \frac{(x+1)^2}{9}+\frac{2}{3}(x+1)-15=0$$

Equivalentemente

$x^2+8x-128=0.$

Nótese que

$x^2+2x-15=0$ tiene raíces $x_1=-5;\ x_2=3$

$x^2+8x-128=0$ tiene raíces $y_1=-16;\ y_2=8$

De donde $y_1=3x_1-1;\ y_2=3x_2-1.$

Las raíces recíprocas

Dado un polinomio $P_{(x)}$ de raíces $x_1; x_2; ...; x_n$, se busca otro polinomio de raíces $\frac{1}{x_1}; \frac{1}{x_2}; ...; \frac{1}{x_n}$.

Para esto es suficiente cambiar en $P_{(x)}$, x por $\frac{1}{x}$.

Ejemplos

1. Halle una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean las inversas de las raíces de $x^2-4x+3=0$.

Resolución

Cambiamos x por $\frac{1}{x}$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^2-4\left(\frac{1}{x}\right)+3=0$$

$$\rightarrow 1-4x+3x^2=0 \rightarrow 3x^2-4x+1=0$$

$$\begin{array}{ll} 3x & -1 \\ x & -1 \end{array}$$

La ecuación buscada es $3x^2-4x+1=0$.

2. Sea $P_{(x)}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n=0$ una ecuación de raíces $x_1; x_2; ...; x_n$.

La ecuación de raíces $\frac{1}{x_1}; \frac{1}{x_2}; ...; \frac{1}{x_n}$ se encuentra cambiando x por $\frac{1}{x}$, así:

$$a_0\left(\frac{1}{x}\right)^n+a_1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}+a_2\left(\frac{1}{x}\right)^{n-2}+...+a_n=0$$

Multiplicando por x^n se tiene:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+ax+a_0=0$$

Luego podemos decir:

Si $a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0$

tiene las raíces $x_1; x_2; ...; x_n$,

entonces $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$

tiene las raíces

$$\frac{1}{x_1}; \frac{1}{x_2}; ...; \frac{1}{x_n}.$$

3. Halle una ecuación de tercer grado cuyas raíces sean las inversas de las raíces de la ecuación $x^3-2x^2+x-3=0$

Resolución

Si la ecuación $x^3-2x^2+x-3=0$ tiene raíces x_1; x_2 y x_3, para hallar otra ecuación cúbica de raíces $\frac{1}{x_1}$; $\frac{1}{x_2}$ y $\frac{1}{x_3}$ hacemos uso del resultado anterior. Luego: $-3x^3+x^2-2x+1=0$ es la ecuación buscada.

Cuadrado de las raíces

Dado un polinomio $P_{(x)}$ de raíces x_1; x_2; ...; x_n, otro polinomio del mismo grado de raíces x^1; x^2; ...; x_n^2 se consigue reemplazando x por $\sqrt{x}$.

Sea x la raíz de $P_{(x)}$; se busca otro polinomio de raíz $y=x^2$.

Luego $x=\sqrt{y}$

$\rightarrow$ en el polinomio se reemplaza x por $\sqrt{x}$.

Ejemplos

1. Busque una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean el cuadrado de las raíces de $x^2-5x+6=0$.

   Resolución

   Bastará reemplazar x por $\sqrt{x}$.

   Entonces

   $$(\sqrt{x})^2-5\sqrt{x}+6=0$$

   $\rightarrow$ $x+6=5\sqrt{x}$ $\rightarrow$ $(x+6)^2=25x$

   $\rightarrow$ $x^2+12x+36=25x$

   Por lo tanto, $x^2-13x+36=0$ será la ecuación buscada y, efectivamente, sus raíces son 4; 9, es decir, 2^2; 3^2.

2. Sean a y b las raíces de $x^2+3x+2=0$; calcule el valor de a^4+b^4.

   Resolución

   I. Buscaremos la ecuación de raíces a^2, b^2, así:

   $$\sqrt{x}^2+3\sqrt{x}+2=0$$

   $\rightarrow$ $3\sqrt{x}=-(x+2)$ $\rightarrow$ $9x=x^2+4x+4$

   $\rightarrow$ $x^2-5x+4=0$ tiene raíces a^2; b^2.

   II. Busquemos la ecuación de raíces a^4; b^4, así:

   $$\sqrt{x}^2-5\sqrt{x}+4=0$$

   $\rightarrow$ $x+4=5\sqrt{x}$

   $\rightarrow$ $x^2+8x+16=25x$

   $\rightarrow$ $x^2-17x+16=0$

   Luego la ecuación $x^2-17x+16=0$ tiene raíces a^4 y b^4, entonces por el teorema de Cardano: $a^4+b^4=17$.

ECUACIONES FRACCIONARIAS

Una expresión algebraica racional es fraccionaria si es de la forma

$$f_{(x)}=\frac{p_{(x)}}{q_{(x)}}$$

con $p_{(x)}$ y $q_{(x)}$ polinomios y grado $(q_{(x)})\geq 1$.

Si $f_{(x)}$ es una expresión algebraica racional fraccionaria; a la expresión $f_{(x)}=0$ se le llama ecuación fraccionaria.

Ejemplos

1. $\frac{3x-1}{x+1}-\frac{5}{2x-1}=0$

2. $\frac{\sqrt{2}}{x^2+1}-\frac{2}{x}=0$

3. $\frac{43x+1}{x^3-7x+1}-\frac{x^2}{x+3}=0$

Resolución de la ecuación fraccionaria

Para resolver la ecuación $\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = h_{(x)}$, donde $f_{(x)}$; $g_{(x)}$; $h_{(x)}$ son polinomios y $g_{(x)}$ es no constante, procedemos así:

I. Se analiza el conjunto de valores admisibles o campo de definición de la ecuación $g_{(x)} \neq 0$.

II. Se multiplica por $g_{(x)}$ y se tiene $f_{(x)} = h_{(x)} g_{(x)}$ una ecuación polinomial.

III. La solución de la ecuación fraccionaria son las soluciones de la ecuación polinomial de II, siempre y cuando satisfacen la condición I.

> **Tenga en cuenta**
>
> Toda ecuación fraccionaria se resuelve en el conjunto $\mathbb{C}$, a menos que se indique lo contrario.

Ejemplos

1. Resuelva la ecuación fraccionaria

$$\frac{2x}{x-2} - x = \frac{4}{x-2}.$$

Resolución

- Conjunto de valores admisibles:

  $CVA = \mathbb{C} - \{2\}$

- Resolveremos la ecuación fraccionaria

$$\frac{2x}{x-2} - \frac{4}{x-2} = x \rightarrow \frac{2(x-2)}{(x-2)} = x;\ x \neq 2$$

$$\rightarrow \frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = x \rightarrow x = 2$$

Observamos que se presenta una contradicción a la condición inicial: $x \neq 2$; por lo tanto, la ecuación no tiene solución: $CS = \phi$

2. Calcule el valor de x que verifica la ecuación

$$\frac{1}{2x-3} - \frac{3}{2x^2-3x} = \frac{5}{x}.$$

Resolución

- Hallamos el CVA: $2x - 3 \neq 0 \ \wedge \ x \neq 0$

  $\rightarrow x \neq \frac{3}{2} \ \wedge \ x \neq 0$

  Luego $CVA = \mathbb{C} - \left\{0;\ \frac{3}{2}\right\}$

- Multiplicamos la ecuación (ambos miembros) por $2x^2 - 3x$

$$\frac{2x^2-3x}{2x-3} - \frac{3(2x^2-3x)}{2x^2-3x} = \frac{5(2x^2-3x)}{x}$$

$$x - 3 = 10x - 15 \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

3. Resuelva la ecuación fraccionaria

$$\frac{2(x^2-x+1)}{x^3+1} - \frac{3(x+2)^3}{(x+1)(x+2)^3} = 1.$$

Resolución

> **Recuerde**
>
> Como $x^3+1 \equiv (x+1)(x^2-x+1)$, entonces, las raíces de (x^3+1) son:
>
> $x_1 = -1$
>
> $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$
>
> $x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

- Hallamos el CVA:

$$x^3 + 1 \neq 0 \ \wedge \ x + 1 \neq 0 \ \wedge \ x + 2 \neq 0$$

$$\rightarrow x \notin \left\{-1;\ -2;\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i;\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right\}$$

- Resolvemos la ecuación

$$\frac{2\cancel{(x^2-x+1)}}{(x+1)\cancel{(x^2-x+1)}}-\frac{3\cancel{(x+2)}^3}{(x+1)\cancel{(x+2)}^3}=1$$

$$\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+1}=1 \rightarrow -\frac{1}{x+1}=1$$

$$\rightarrow -1=x+1 \rightarrow x=-2$$

$$\therefore \text{ CS}=\{2\}$$

ECUACIONES IRRACIONALES

Una expresión algebraica es irracional si al menos una de sus variables está afectada de símbolos radicales o exponentes fraccionarios. Por ejemplo, $f_{(x)}=\sqrt{x-2}+\frac{1}{x}$ es irracional.

Sea $f_{(x)}$ una expresión algebraica irracional; a la expresión $f_{(x)}=0$ se le llama ecuación irracional.

Ejemplo

Las siguientes ecuaciones son irracionales

a. $\sqrt{7-x}+\sqrt[3]{x}-1=0$

b. $\frac{5}{\sqrt{2x-1}}+5x+7=0$

Resolución de la ecuación irracional

Todas las ecuaciones irracionales se resuelven en el conjunto $\mathbb{R}$. Para su mejor estudio, analizaremos por separado aquellas ecuaciones que presentan radicales de índice impar y las que presentan radicales de índice par.

Radicales de índice impar

Sea $f_{(x)}=\sqrt[2n+1]{g_{(x)}}$. La función está definida para todo $g_{(x)}\in\mathbb{R} \wedge x\in\mathbb{R}$ ya que las ecuaciones irracionales solo se estudian en $\mathbb{R}$.

Para la resolución de las ecuaciones irracionales de índice impar, usaremos el siguiente teorema.

$$\forall\, x\in\mathbb{R}: \sqrt[2n+1]{x}=a \leftrightarrow x=a^{2n+1}$$

Ejemplos

1. Resuelva la ecuación $\sqrt[3]{x^3+8x-1}=x+1$.

Resolución

Aplicamos el teorema:

$$\sqrt[3]{x^3+8x-1}=x+1 \rightarrow x^3+8x-1=(x+1)^3$$

$$\rightarrow x^3+8x-1=x^3+3x^2+3x+1$$

Transponiendo términos y simplificando se tiene:

$$3x^2-5x+2=0$$

$$\rightarrow (3x-2)(x-1)=0$$

$$\rightarrow 3x-2=0 \vee x-1=0$$

$$\rightarrow x=\frac{2}{3} \vee x=1$$

$$\therefore \text{ CS}=\left\{\frac{2}{3} \vee 1\right\}$$

2. ¿De cuántos elementos está constituido el conjunto solución de la siguiente ecuación?

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}+1\right)=\sqrt[3]{\frac{2}{x+1}}$$

Resolución

Multiplicamos por $\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{x+1}$ con $x\neq 0 \wedge x\neq -1$

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x}$$

Elevamos al cubo

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{2x}=\sqrt[3]{2x}^3$$

$$\rightarrow x-\cancel{1}+x+\cancel{1}+3\sqrt[3]{x^2-1}\ \sqrt[3]{2x}=2x$$

$$\rightarrow \cancel{2x}+3\sqrt[3]{x^2-1}\cdot\sqrt[3]{2x}=\cancel{2x}$$

$\rightarrow 3\sqrt[3]{2x(x^2-1)}=0 \rightarrow x(x^2-1)=0$

$\rightarrow x(x+1)(x-1)=0;\ x\neq 0 \ \wedge\ x\neq -1$

$\rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1$

Por lo tanto, tiene un solo elemento en su conjunto solución.

Radicales de índice par

El estudio de las ecuaciones irracionales solo se realiza en los reales; es decir, si $g_{(x)}=\sqrt[2n]{f_{(x)}}, n\in\mathbb{N}$, se dirá que $g_{(x)}$ es real no negativo si y solo si $f_{(x)}\geq 0$; además, queda garantizada la definición de $g_{(x)}$ si y solo si $f_{(x)}\geq 0$.

Para resolver la ecuación $g_{(x)}=\sqrt[2n]{f_{(x)}}$ procedemos así:

I. La ecuación está bien definida si $g_{(x)}\geq 0 \ \wedge\ f_{(x)}\geq 0$, de donde obtenemos el campo de definición para la ecuación: CVA.

II. Garantizada la existencia, elevamos a la $2n$ en ambos miembros: $g^{2n}_{(x)}=f_{(x)}$

III. La solución general estará formada por aquellos x que cumplen con I y II.

Ejemplos

1. Resuelva la ecuación

$$\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}=1.$$

Resolución

I. Definimos bien la ecuación

$$3x-2\geq 0 \ \wedge\ x+3\geq 0 \leftrightarrow x\geq \frac{2}{3} \ \wedge\ x\geq -3,$$

de donde $x\geq \frac{2}{3} \rightarrow \text{CVA}=\left[\frac{2}{3};\ +\infty\right\rangle$

II. En $\sqrt{3x-2}=\sqrt{x+3}+1$ elevamos al cuadrado

$$3x-2=x+3+1+2\sqrt{x+3}$$

$\leftrightarrow 2x-6=2\sqrt{x+3}$

$\rightarrow x-3=\sqrt{x+3}$, la cual está definida si $x\geq 3$.

Nuevamente al cuadrado

$$x^2-6x+9=x+3$$

$\rightarrow x^2-7x+6=0 \ \wedge\ x\geq 3$

$\rightarrow (x-6)(x-1)=0$, con $x\geq 3$; entonces $x=6$

$\therefore\ \text{CS}=\{6\}$

2. Resuelva la ecuación

$$\sqrt{x^2-21x+90}-\sqrt{x^2+3x-54}=x-6.$$

Resolución

I. Hallamos el CVA.

$$x^2-21x+90\geq 0 \ \wedge\ x^2+3x-54\geq 0$$

$\rightarrow \underbrace{(x-15)(x-6)\geq 0} \ \wedge\ (x-6)(x+9)\geq 0$

$\rightarrow x\in\langle -\infty;\ 6]\cup[15;\ +\infty\rangle \ \wedge$
$\wedge\ x\in\langle -\infty;\ -9]\cup[6;\ +\infty\rangle$

CVA: $x\in\langle -\infty;\ -9]\cup[15;\ +\infty\rangle\cup\{6\}$

II. Resolveremos la ecuación para

$$x\in[15;\ +\infty\rangle\cup\{6\}$$

Entonces

$$\sqrt{(x-6)(x-15)}-\sqrt{(x-6)(x+9)}=$$
$$=\sqrt{x-6}^2$$

$$\sqrt{x-6}\ \sqrt{x-15}-\sqrt{x+9}\ \sqrt{x-6}=$$
$$=\sqrt{x-6}\ \sqrt{x-6}$$

Simplificamos $\sqrt{x-6}$ e igualamos a cero este factor.

Cuando cancelamos un factor algebraico en el numerador, este se iguala a cero y se despeja la incógnita para encontrar una solución de la ecuación.

- Es decir: $x-6=0 \rightarrow x=6$
- $\sqrt{x-15}-\sqrt{x+9}=\sqrt{x-6}$

$\rightarrow \sqrt{x-15}=\sqrt{x+9}+\sqrt{x-6}$

Elevamos al cuadrado convenientemente

$\rightarrow (\sqrt{x-15})^2=(\sqrt{x+9}+\sqrt{x-6})^2 \vee x=6$

$\rightarrow x-15=x+9+x-6+$
$+2\sqrt{(x+9)(x-6)} \vee x=6$

$\rightarrow -18-x=2\sqrt{(x+9)(x-6)} \vee x=6$

cuya ecuación no tiene solución ya que $(-18-x)<0$, pues $x\geq 15$. Entonces, la única solución es $x=6$.

$\therefore$ CS$=\{6\}$

III. Ahora resolveremos, similarmente, para $x \in \langle -\infty; -9]$. Así:

$$\sqrt{(x-6)(x-15)}-\sqrt{(x-6)(x+9)}=-\sqrt{6-x}^2$$

Simplificamos $\sqrt{6-x}$

$$\sqrt{15-x}-\sqrt{-x-9}=-\sqrt{6-x}$$

$$\sqrt{15-x}+\sqrt{6-x}=\sqrt{-x-9}$$

Elevamos al cuadrado:

$$15-x+6-x+2\sqrt{15-x}\sqrt{6-x}=-x-9$$

$$\underbrace{\underbrace{30-x}_{+}+\underbrace{2\sqrt{15-x}\sqrt{6-x}}_{+}}_{+}=0,\ x\in\langle -\infty; -9]$$

Como la suma es positiva, es imposible la igualdad. En este caso no hay soluciones.

IV. De (II) y (III) se tiene: CS$=\{6\}$.

Gerolamo Cardano

Nació el 24 de septiembre de 1501 en Pavía, actual Italia, y murió el 21 de septiembre de 1576 en Roma. Fue un reconocido matemático, médico, astrólogo y filósofo de su tiempo, además de un gran aficionado a las predicciones y a los juegos de azar.

Fue hijo ilegítimo de Chiara Micheria y de Fazio Cardano, abogado de profesión, quien además de ejercer las leyes daba conferencias sobre geometría en la Universidad de Pavía y en la Fundación Piatti de Milán, y era gran amigo de Leonardo da Vinci.

Cardano se acercó a las matemáticas por medio de su padre, como asistente; pero él aspiraba a ser algo más. Su padre quería que estudiase Derecho, pero en 1520 ingresó a la Universidad de Pavía para estudiar medicina. Debido al estallido de la Guerra de los Cuatro Años, Cardano continuó sus estudios en la Universidad de Padua. Era un alumno brillante, pero muy crítico, lo que le ocasionó algunas enemistades. Al poco tiempo de su traslado a Padua, su padre murió; Cardano malgastó el dinero de la herencia y se dedicó a los juegos de azar para mejorar sus finanzas. Sus conocimientos sobre probabilidades le permitieron obtener ciertas ventajas sobre sus contrincantes, y en las apuestas en los juegos de cartas, dados y ajedrez fue más lo que ganó que lo que perdió. Lamentablemente, esto se había convertido en un estilo de vida para él.

En 1525 se graduó de médico, pero, a pesar del respeto que se ganó como estudiante, no pudo ingresar al Colegio Médico debido a su reputación de hombre difícil, pues consideraban que sus opiniones no eran las convencionales y que las expresaba de manera brusca y sin pensar en las consecuencias. Además, su nacimiento ilegítimo era otro motivo por el cual lo rechazaban.

Cardano decidió irse a Sacco, un pequeño pueblo no muy alejado de Padua. Allí instaló un pequeño consultorio y conoció a su futura esposa, Lucía Bandarini, hija de un capitán de la milicia. En 1531 se casaron, y al año siguiente se mudaron a Gallarete, cerca de Milán. Intentó ingresar al Colegio Médico nuevamente, pero fue rechazado. Abatido por no poder ejercer la medicina, Cardano regresó a las apuestas para mantenerse económicamente, pero no le fue tan bien, por lo que se vio obligado a empeñar algunas joyas de su esposa. Probaron suerte en Milán, pero les fue peor.

Las cosas cambiaron cuando Cardano obtuvo el puesto de profesor de matemática en la Fundación Piatti de Milán. Además, siguió dedicándose a tratar algunos pacientes, a pesar de no ser miembro del Colegio. Se dice que consiguió algunas curas casi milagrosas y su reputación lo llevo incluso a ser consultado por algunos médicos del Colegio. Esto trajo como consecuencia la aparición de admiradores y seguidores, con lo cual Cardano pudo construir una base de fiadores influyentes.

Sin embargo, Cardano seguía sin pertenecer al Colegio, así que, a manera de venganza, escribió un libro, en 1536, en el que atacaba la aptitud médica de la institución y también a sus miembros.

Esta no era la mejor forma de conseguir una plaza, pues al siguiente año su solicitud nuevamente fue rechazada. Pero dos años después, tras la presión de sus admiradores, el colegio cambió la cláusula relativa al nacimiento ilegítimo y admitió a Cardano. Para 1538, Cardano publicó dos libros, uno de ellos era *La práctica de la aritmética y la medición simple.*

Un año después entabló comunicación con Tartaglia, quien había alcanzado la fama tras ganar un concurso sobre la resolución de cúbicas, e intentó convencerlo para que le explicara su método. Tartaglia accedió siempre y cuando Cardano le jurara que no iba publicarlo antes que él. Durante seis años, Cardano trabajó en las ecuaciones de tercer y cuarto grado mediante radicales.

En 1450 Cardano renunció a su puesto de matemático en la Fundación Piatti, vacante que fue cubierta por su asistente Ludovico Ferrari, quien había resuelto las ecuaciones cuárticas mediante raíces. Durante los siguientes dos años, Cardano volvió a relacionarse a los juegos de azar y las apuestas. Para 1545, Cardano publicó su mejor obra matemática, *Ars Magna*. En ella explicaba los métodos de solución de la ecuación cúbica y cuártica. Y como había descubierto que Tartaglia no fue el primero en resolver una ecuación cúbica por radicales, no sintió que estaba faltando a su promesa al publicar esta obra.

En 1546 su esposa Lucía muere, pero a Cardano le interesaba más la fama que estaba alcanzado gracias a la venta de sus libros. Pronto se convirtió en el rector del Colegio de Médicos y ganó la reputación de ser el mejor médico del mundo. Curó al arzobispo de St. Andrews, John Hamilton, quien padecía de un asma severa, entre otros pacientes acaudalados, y se hizo rico y próspero. Pero sufrió lo que llamó "la mala suerte del poderoso". Su hijo mayor, Giambatista, también médico, se casó con Brandonia di Seroni, "una mujer indigna y desvergonzada", según las palabras de Cardano, a la que le interesaba solo el dinero y que se burlaba públicamente de su esposo por no ser el padre de sus tres hijos. Esto provocó que Giambatista la envenenara. Luego de ser arrestado, confesó el crimen. Cardano contrató a los mejores abogados, pero en el juicio, el jurado decretó que para salvar la vida de su hijo debía llegar a un acuerdo con los Di Seroni. La familia le pidió una suma que Cardano no podría haber reunido. Giambatista fue torturado en prisión y, posteriormente, ejecutado el 13 de abril de 1560.

Como padre de un convicto ejecutado, Cardano fue odiado, así que viajó a Bolonia y solicitó un puesto para trabajar como profesor de medicina. Su segundo hijo, Aldo, se estaba dedicando a las apuestas y empezó a relacionarse con gente de mala reputación. Llegó incluso a robar joyas y dinero de la casa de su padre, quien lo denunció a las autoridades y fue desterrado de Bolonia. En 1570 Cardano fue procesado por herejía luego de hacer el horóscopo de Jesús y escribir un libro en alabanza a Nerón. Estuvo poco tiempo en prisión; tras su liberación, fue vetado para desempeñar un puesto universitario y publicar cualquier otra obra. Luego viajó a Roma, donde inesperadamente fue reconocido como miembro del Colegio de Médicos y recibió del papa Gregorio XIII el perdón y una pensión. En esta época Cardano escribió su autobiografía, en la que predijo la fecha exacta de su muerte, aunque se cree que lo consiguió suicidándose. Su cuerpo fue trasladado a Milán y enterrado en la iglesia de San Marco.

Además de los grandes avances en el álgebra, Cardano hizo múltiples contribuciones a la probabilidad, la hidrodinámica, la mecánica y la geología.

Fuente:

http://www.ugr.es/~eaznar/cardano.htm
http://es.wikipedia.org/wiki/Gerolamo_Cardano
http://noticiariomatematico.blogspot.com/2008_09_01_archive.html.

Problemas RESUELTOS

Problema 1

Resuelva la ecuación $\dfrac{5x+1}{5}+\dfrac{3x-2}{3}+\dfrac{2x-3}{2}=0$

Resolución

Recuerde

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

En la ecuación:

$$\frac{5x}{5}+\frac{1}{5}+\frac{3x}{3}-\frac{2}{3}+\frac{2x}{2}-\frac{3}{2}=0$$

$$\rightarrow\ 3x=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\ \rightarrow\ 3x=\frac{59}{30}\ \rightarrow\ x=\frac{59}{90}$$

$$\therefore\ CS=\left\{\frac{59}{90}\right\}$$

Problema 2

Dada la ecuación en x

$(2x-1)n^2-(3x-1)n-2(x-1)=0$,

calcule el valor de n para que la ecuación tenga infinitas soluciones.

Resolución

Efectuamos

$$2xn^2-n^2-3nx+n-2x+2=0$$

Agrupando los términos con x

$$x(2n^2-3n-2)=n^2-n-2$$

Tendrá infinitas soluciones cuando

$$2n^2-3n-2=0\ \wedge\ n^2-n-2=0$$

$$\begin{array}{ll} 2n & 1 \\ n & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} n & 1 \\ n & -2 \end{array}$$

$$n=1/2 \vee n=2\ \wedge\ n=2 \vee n=-1$$

Por lo tanto, tiene infinitas soluciones cuando $n=2$.

Problema 3

Resuelva la ecuación lineal en x.

$$\frac{x+a}{ab+a+1}+\frac{x+b}{ab+b+1}=\frac{x-a}{ab-a+1}+\frac{x-b}{ab-b+1}$$

Resolución

Restamos 1 en cada bloque:

$$\frac{x+a}{ab+a+1}-1+\frac{x+b}{ab+b+1}-1$$

$$=\frac{x-a}{ab-a+1}-1+\frac{x-b}{ab-b+1}-1$$

Efectuando

$$\frac{x-ab-1}{ab+a+1}+\frac{x-ab-1}{ab+b+1}=\frac{x-ab-1}{ab-a+1}+\frac{x-ab-1}{ab-b+1}$$

Se cumplirá la igualdad solo cuando

$$x-ab-1=0$$

$$\therefore\ x=ab+1$$

Problema 4

Si la ecuación cúbica $x^3+x^2-1=0$ tiene $CS=\{a;b;c\}$, calcule el valor de M.

$$M=\frac{a\sqrt{-a}}{\sqrt{a^2-bc}}+\frac{b\sqrt{-b}}{\sqrt{b^2-ac}}+\frac{c\sqrt{-c}}{\sqrt{c^2-ab}}$$

Resolución

Como a es una raíz de $x^3+x^2-1=0$, entonces tenemos que $a^3+a^2-1=0$; y además, por el teorema de Cardano, $abc=1$.

Luego, $a^3+a^2-1=0$ es equivalente a

$$a^3+a^2-abc=0;\ a\neq 0\ \rightarrow\ a(a^2+a-bc)=0;\ a\neq 0$$

Entonces, cancelando a tenemos

$$a^2+a-bc=0\ \rightarrow\ a^2-bc=-a$$

$$\sqrt{a^2-bc}=\sqrt{-a}$$

De donde

$$\frac{a\sqrt{-a}}{\sqrt{a^2-bc}}=a$$

Similarmente

$$\frac{b\sqrt{-b}}{\sqrt{b^2-ac}}=b \quad ; \quad \frac{c\sqrt{-c}}{\sqrt{c^2-ab}}=c$$

Luego, M es igual a $a+b+c$.

Finalmente aplicamos el teorema de Cardano y tenemos que $M=a+b+c=-1$.

Problema 5

Halle la ecuación polinomial de menor grado y coeficientes racionales que tenga una de sus raíces igual a $2+\sqrt[3]{3}$.

Resolución

Si $x=2+\sqrt[3]{3}$, hallar la ecuación de coeficientes racionales implica eliminar los índices de los radicales de

$$x=2+\sqrt[3]{3} \quad \rightarrow \quad x-2=\sqrt[3]{3}$$

Elevamos al cubo

$$(x-2)^3=\sqrt[3]{3} \quad \rightarrow \quad x^3-3x^2\cdot 2+3x\cdot 4-8=3$$

Luego, la ecuación es

$$\rightarrow \quad x^3-6x^2+12x-11=0$$

Problema 6

Determine las condiciones para que se cumpla:

I. $x^2-8x+\alpha=0$ y tenga raíces iguales.

II. $3x^2-10x+\alpha=0$ y tenga raíces positivas.

III. $3x^2-10x+\alpha=0$ y tenga raíces de signos opuestos.

IV. $x^2+8x+\alpha=0$ y tenga las dos raíces negativas.

Resolución

I. Raíces iguales (discriminante nulo)

En $x^2-8x+\alpha=0 \rightarrow \Delta=(-8)^2-4(\alpha)=0$

De donde $\alpha=16$

II. Raíces positivas $\begin{cases}\Delta\geq 0\\ x_1+x_2>0\\ x_1x_2>0\end{cases}$

En $3x^2-10x+\alpha=0$

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=\dfrac{10}{3}>0\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{\alpha}{3}>0\end{array}\right\}\alpha>0$$

$$\Delta=10^2-4(3\alpha)\geq 0 \quad \rightarrow \quad \alpha\leq\frac{25}{3}$$

de donde $0<\alpha\leq\dfrac{25}{3}$

$$\therefore \quad \alpha\in\left\langle 0;\ \frac{25}{3}\right]$$

III. Raíces de signos opuestos $\begin{cases}\Delta>0\\ \cancel{x_1x_2>0}\end{cases}$

En la ecuación: $3x^2-10x+\alpha=0$

$$x_1x_2=\frac{\alpha}{3}<0 \quad \rightarrow \quad \alpha<0$$

$x_1x_2<0$

$$\Delta=10^2-4(3\alpha)>0 \quad \rightarrow \quad \alpha<\frac{25}{3}$$

De $\alpha<0 \wedge \alpha<\dfrac{25}{3} \rightarrow \alpha<0$

$$\therefore \quad \alpha\in\langle-\infty;\ 0\rangle$$

IV. Raíces negativas $\begin{cases}\Delta\geq 0\\ x_1+x_2<0\\ x_1x_2>0\end{cases}$

En la ecuación: $x^2+8x+\alpha=0$

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=-8<0\\ x_1x_2=\alpha>0\end{array}\right\}\alpha>0$$

$$\Delta=8^2-4(\alpha)>0 \quad \rightarrow \quad \alpha<16$$

De donde $0<\alpha<16$

$$\therefore \quad \alpha\in\langle 0;\ 16\rangle$$

Problema 7

Resuelva la ecuación cuadrática en x.

$a(b-c)x^2+b(a-c)x+c(a-b)=0$, $\{a; b; c\}=\mathbb{R}$

Resolución

Nótese que la ecuación cuadrática se verifica para $x=-1$:

$$a(b-c)-b(a-c)+c(a-b)=0$$

Entonces sus raíces son:

$$x_1=-1 \ \wedge \ x_2=?$$

Luego de la ecuación dada

$$a(b-c)x_2+b(a-c)x+c(a-b)=0$$

se tiene: $x_1x_2=\dfrac{c(b-a)}{a(b-c)}$

$$\rightarrow (-1)x_2=\frac{c(b-a)}{a(b-c)} \quad \rightarrow \quad x=\frac{c(b-a)}{a(b-c)}$$

$$\therefore \ CS=\left\{-1;\ \frac{c(b-a)}{a(b-c)}\right\}$$

Problema 8

Si $\{a; b\}$ es el conjunto solución de la ecuación $x^2-197781x-197771=0$, calcule el valor de $a^2+b^2+a^2b^2+2ab(a+b+1)$.

Resolución

Como podrá percatarse, lo pedido es equivalente a $(a+b+ab)^2$.

Por el teorema de Cardano-Viète

$$a+b=197781 \ \wedge \ ab=-197771$$

$$\rightarrow a+b+ab=10$$

$$\therefore \ (a+b+ab)^2=100$$

Problema 9

Si el conjunto solución de la ecuación $5x^3+3x^2+5=0$ es $\{a; b; c\}$, calcule el valor de R.

$$R=\frac{ab(a^2b^2-1)+bc(b^2c^2-1)+ac(a^2c^2-1)+5a^3+3a^2}{abc}$$

Resolución

Por el teorema de Cardano:

$$\text{En } 5x^3+3x^2+5=0 \rightarrow \begin{cases} a+b+c=-\dfrac{3}{5} \\ ab+ac+bc=0 \\ abc=-\dfrac{5}{5}=-1 \end{cases}$$

Lo pedido es

$$R=\frac{a^3b^3-ab+b^3c^3-bc+a^3c^3-ac+5a^3-3a^2}{abc}$$

$$R=\frac{a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3-(ab+ac+bc)}{abc}+\frac{5a^3+3a^2}{abc}$$

Como $ab+ac+bc=0$

$$\rightarrow \ a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3=3a^2b^2c^2=3$$

Asimismo, como a es una raíz: $5a^3+3a^2+5=0$

$$\rightarrow \ 5a^3+3a^2=-5$$

Luego

$$R=\frac{3-0}{-1}+\frac{-5}{-1}=-3+5=2$$

Problema 10

Calcule el grado del polinomio de menor grado que posee a:

I. $\sqrt{3}+2$ como raíz simple.

II. $3+\sqrt{5}$ como raíz doble.

III. $1-2i$ como raíz triple.

IV. $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ como raíz simple.

Siendo el polinomio de coeficientes racionales.

Resolución

Si el polinomio es de coeficiente racional:

I. $2+\sqrt{3}$ es solución de una cuadrática.

II. $3+\sqrt{5}$ también es solución de una cuadrática, pero como es de multiplicidad doble, entonces $3+\sqrt{5}$ será solución de una cuártica.

III. $1-2i$ es solución de una cuadrática, pero como es de triple multiplicidad, entonces $1-2i$ será solución de una ecuación de grado 6.

IV. $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ es solución de una ecuación bicuadrada.

Luego, sumando los grados se tiene

$$2+4+6+4=16$$

Por lo tanto, el polinomio será de grado 16.

Problema 11

Halle una ecuación cuadrática de raíces p y q si se sabe que:

I. En $2x^2-(p-1)x+p-3=0$ sus raíces positivas difieren en 1.

II. $x^2+(q-1)x+q-2=0$ tiene solución única.

Resolución

La ecuación buscada es

$$x^2-(p+q)x+pq=0 \qquad (\alpha)$$

con los datos I y II hallaremos p y q.

I. Sus raíces son positivas y difieren en 1.
Factorizamos el polinomio

$$2x^2-(p-1)x+p-3=0$$

$$\begin{array}{ll} 2x & -(p-3) \\ x & -1 \end{array}$$

$\rightarrow\ (x-1)(2x-p+3)=0$

$\rightarrow\ x_1=\dfrac{p-3}{2};\ x_2=1$

Por condición: $\dfrac{p-3}{2}=2\ \rightarrow\ p=7$

II. Tiene solución única ($\Delta=0$)

$$\Delta=(q-1)^2-4(q-2)=0$$

$\rightarrow\ q^2-6q+9=0$

$\rightarrow\ (q-3)^2=0\ \rightarrow\ q=3$

Si reemplazamos p y q en (α), se tiene la ecuación pedida: $x^2-10x+21=0$.

Problema 12

Si p y q son números reales para los cuales las ecuaciones cuadráticas

$8x^2-(4p+2)x+2=0\ \wedge\ (7q-2)x^2-(5q-3)x+1=0$

tienen las mismas raíces, encuentre el valor de $p\cdot q$.

Resolución

Si tienen las mismas raíces, entonces

$$\frac{8}{7q-2}=\frac{4p+2}{5q-3}=\frac{2}{1}$$

Luego

- $\dfrac{8}{7q-2}=\dfrac{2}{1}\ \rightarrow\ 7q-2=4\ \rightarrow\ q=\dfrac{6}{7}$

- $\dfrac{4p+2}{5q-3}=\dfrac{2}{1}\ \rightarrow\ 2p+1=5q-3$

  $\rightarrow\ 2p+1=5\left(\dfrac{6}{7}\right)-3\ \rightarrow\ p=\dfrac{1}{7}$

$\therefore\ pq=\dfrac{6}{49}$

Problema 13

Si dos de las raíces de la ecuación

$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex-2=0$

de coeficientes reales son los complejos i y $1-i$, obtenga $a+b+c+d+e$ si $c-e=1$.

Resolución

I. Si i es una raíz, se tiene:

$$ai+b-ci-d+ei-2=0$$

$$(a-c+e)i+b-d-2=0$$

Como $c-e=1$

$\rightarrow\ a=1$

II. Las raíces son $i;\ -i;\ 1-i;\ 1+i;\ x^5$

Por el teorema de Cardano:

$$i(-i)(1-i)(1+i)x_5=2$$

$\rightarrow\ x_5=1$

III. Como 1 es una raíz, se tiene:

$$a+b+c+d+e-2=0$$

$\therefore\ a+b+c+d+e=2$

Problema 14

Encuentre el valor de k si en la ecuación en x

$x^4-(3k-2)x^2+(k-1)^2=0$

dos de sus raíces negativas distintas suman -6.

Resolución

Sean α; β; $-\alpha$; $-\beta$ las raíces, con α; $\beta \in \mathbb{R}^+$

Por dato: $\alpha+\beta=6$

La ecuación bicuadrada es

$$x^4-(\alpha^2+\beta^2)x^2+\alpha^2\beta^2=0$$

Asimismo es

$$x^4-(3k-2)x^2+(k-1)^2=0$$

De donde se tiene:

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=3k-2 \\ (\alpha\beta)^2=(k-1)^2 \rightarrow \alpha\beta=k-1 \vee \alpha\beta=1-k \\ \alpha+\beta=6 \end{cases}$$

Sabemos que $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$ (*)

Por datos:

I. Si $\alpha\beta=k-1$, con $k>1$; reemplazando en (*)

$$6^2=3k-2+2(k-1)$$

$\rightarrow 36=5k-4 \rightarrow k=8$,

de donde un valor de k es 8.

II. Si $\alpha\beta=1-k$, con $k<1$; reemplazando en (*)

$$6^2=3k-2+2(1-k)$$

$\rightarrow 36=3k-2+2-2k \rightarrow k=36$

Notamos que este valor no es menor que 1.

$\therefore\ k=8$

Problema 15

En un concurso nacional de matemática, frente a la resolución de una ecuación cuadrática, ocurre lo siguiente:

I. Un alumno se equivocó en el término independiente y obtuvo como soluciones 8 y 2.

II. Otro alumno se equivocó en el coeficiente del término lineal y obtuvo como soluciones -9 y -1.

¿Cuál fue la ecuación correcta?

Resolución

I. Si obtuvo como soluciones 8 y 2, la ecuación que resolvió fue

$$x^2-\underset{\substack{\uparrow \\ \text{correcto}}}{(8+2)}x+\underset{\substack{\uparrow \\ \text{equivocado}}}{8\cdot 2}=0$$

II. Si obtuvo como soluciones -9 y -1, la ecuación que resolvió fue

$$x^2-\underset{\substack{\uparrow \\ \text{equivocado}}}{(-9-1)}x+\underset{\substack{\uparrow \\ \text{correcto}}}{(-9)(-1)}=0$$

Por lo tanto, la ecuación correcta fue

$$x^2-10x+9=0$$

Problema 16

Sabiendo que c es una raíz de la ecuación

$ax^5+(b-ac)x^4-bcx^3-bx^2-(-a-bc)x+ac=0$;

$a\neq 0$, ¿qué condición debe cumplirse en a, b y c para que todas las raíces sean reales? (a; b; c; $\in \mathbb{R}$)

Resolución

Si c es una raíz, por la regla de Ruffini se tiene:

	a	$b-ac$	$-bc$	$-b$	$-a+bc$	ac
c	↓	ac	bc	0	$-bc$	$-ac$
	a	b	0	$-b$	$-a$	0
1	↓	a	$a+b$	$a+b$	a	
	a	$a+b$	$a+b$	a	0	
-1	↓	$-a$	$-b$	$-a$		
	a	b	a	0		

Solo faltaría que las raíces de $ax^2+bx+a=0$ sean reales; sabemos que una ecuación cuadrática tiene soluciones reales si la discriminante no es negativa, entonces

$$\Delta=b^2-4ac\geq 0$$

Por lo tanto, la condición es

$$b^2\geq 4ac \wedge a; b; c\in \mathbb{R}$$

Problema 17

La ecuación $x^4-7x-12=0$ posee dos raíces cuya suma es -1. Calcule la suma de las inversas de las otras dos.

Resolución

Si la suma de dos de sus raíces es -1, la suma de las otras dos es 1.

Factorizamos el polinomio

$$x^4+0x^3-0x^2-7x-12$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & -x & -3 \\ x^2 & x & 4 \end{array}$$

$$\text{ST: } x^2 \xrightarrow[\text{Falta}]{-x^2} 0x^2\text{: SDT}$$

$$\rightarrow \left(x^2-x-3\right)\left(x^2+x+4\right)=0$$

En

$$x^2-x-3=0 \rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1x_2=-3 \end{cases}$$

$$x^2+x+4=0 \rightarrow \begin{cases} x_3+x_4=-1 \\ x_3x_4=4 \end{cases}$$

De las condiciones se pide

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$$

Problema 18

Si las ecuaciones cuadráticas

$x^2+x+a=0 \ \wedge \ x^2+2x+b=0$

tienen una raíz común, calcule el valor de

$$M=\frac{5(a-b)^2}{b-2a}.$$

Resolución

Si α es la solución común, entonces

$\alpha^2+\alpha+a=0$ (I)

$\alpha^2+2\alpha+b=0$ (II)

De (II)−(I): $\alpha=a-b$ (la solución común)

Se reemplaza en (II)

$$(a-b)^2+2(a-b)+b=0 \rightarrow (a-b)^2=b-2a$$

Luego, lo pedido es

$$M=5\left(\frac{\cancel{b-2a}}{\cancel{b-2a}}\right) \rightarrow M=5$$

Problema 19

¿Para qué valor del parámetro real n la ecuación $x^3-2x^2+(n+5)x+n=0$ tiene dos raíces imaginarias puras y conjugadas?

Resolución

Sean las raíces ki; $-ki$, $k \in \mathbb{N}$

Entonces, el polinomio tiene un factor x^2+k^2.

Es decir: $\dfrac{x^3-2x^2+(n+5)x+n}{x^2+k^2}$ es exacta

Dividiendo por el método de Horner

1	1	−2	$n+5$	n
0	↓	0	$-k^2$	
$-k^2$	3		0	$2k^2$
	1	−2	0	0

Del esquema se tiene:

$n+5-k^2=0$ (α)

$n+2k^2=0$ (β)

De $2(\alpha)+\beta$ se tiene: $3n+10=0 \rightarrow n=-\dfrac{10}{3}$

Problema 20

Resuelva la ecuación de incógnita x en el conjunto $\mathbb{R}$.

$$\frac{x+a-b}{x-a}-\frac{a^2+b^2}{x^2-a^2}=\frac{x+a+b}{x+a}$$

Resolución

I. Conjunto de valores admisibles

$$x-a\neq 0 \wedge x+a\neq 0$$

$$\rightarrow x\in \mathbb{R}-\{a;-a\}$$

II. Resolvemos la ecuación:

$$\frac{x+a-b}{x-a}-\frac{x+a+b}{x+a}=\frac{a^2+b^2}{x^2-a^2}$$

Multiplicamos toda la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\frac{(x+a-b)(x+a)-(x+a+b)(x-a)}{\cancel{(x-a)(x+a)}}=\frac{a^2+b^2}{\cancel{x^2-a^2}}$$

Operamos

$$x^2+ax+ax+a^2-bx-ab-$$
$$-(x^2-ax+ax-a^2+bx-ab)=a^2+b^2$$

Efectuamos y simplificamos

$$2x(a-b)+2a^2=a^2+b^2$$

$$\rightarrow x=-\frac{a+b}{2}$$

$$\therefore \text{CS}=\left\{-\frac{a+b}{2}\right\}$$

Problema 21

Calcule el valor de $\frac{q^5}{r^4}$ si la ecuación $x^5-5qx+4r=0$ tiene una raíz de multiplicidad 2.

Resolución

Sea c la raíz de multiplicidad 2, entonces $(x-c)^2$ es un factor de $x^5-5qx+4r$. Luego, la división $\frac{x^5-5qx+4r}{(x-c)^2}$ es exacta.

Efectuamos por el método de Horner

1	1	0	0	0	$-5q$	$4r$
$2c$		$2c$	$-c^2$			
			$4c^2$	$-2c^3$		
$-c^2$				$6c^3$	$-3c^4$	
					$8c^4$	$-4c^5$
	1	$2c$	$3c^2$	$4c^2$	0	0

Del esquema se tiene:

$$\begin{cases} 4r-4c^5=0 \wedge -5q+5c^4=0 \\ r=c^5 \wedge q=c^4 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{q^5}{r^4}=\frac{(c^4)^5}{(c^5)^4}=1$$

Problema 22

Resuelva la ecuación fraccionaria.

$$\frac{x(x+4)+6}{x+2}+\frac{x(x+6)+12}{x+3}=\frac{x(x+2)+2}{x+1}+$$
$$+\frac{x(x+8)+20}{x+4}$$

Resolución

Efectuando en los numeradores de cada fracción

$$\frac{(x+2)^2+2}{x+2}+\frac{(x+3)^2+3}{x+3}=$$
$$=\frac{(x+1)^2+1}{x+1}+\frac{(x+4)^2+4}{x+4},$$

Con $x\neq -2 \wedge x\neq -3 \wedge x\neq -1 \wedge x\neq -4$

$$\rightarrow x+2+\frac{2}{x+2}+x+3+\frac{3}{x+3}=$$
$$=x+1+\frac{1}{x+1}+x+4+\frac{4}{x+4}$$

$$\rightarrow \frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}=\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x+4}$$

$$\rightarrow \frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}=\frac{4}{x+4}-\frac{3}{x+3}$$

$$\rightarrow \frac{x}{(x+2)(x+1)}=\frac{x}{(x+4)(x+3)}$$

$$x=0 \vee (x+2)(x+1)=(x+4)(x+3)$$

$$x=0 \vee \cancel{x^2}+3x+2=\cancel{x^2}+7x+12$$

$$x=0 \vee x=-\frac{5}{2}$$

$$\therefore \quad CS=\left\{0;\ -\frac{5}{2}\right\}$$

Problema 23

Si las ecuaciones cuárticas

$$x^4+ax^2-2=0 \wedge x^4+x^3-bx-4=0$$

tienen tres raíces comunes, determine el valor de $a-b$.

Resolución

Como las ecuaciones tienen tres raíces comunes, estas generan un factor cúbico común de las cuárticas dadas. Sea x^3+mx^2+nx+p el factor común de los polinomios $(x^4+ax^2-2) \wedge (x^4+x^3-bx-4)$.

Entonces

$$x^4+ax^2-2=(x^3+mx^2+nx+p)q_{1(x)} \quad (\alpha)$$

$$x^4+x^3-bx-4=(x^3+mx^2+nx+p)q_{2(x)} \quad (\beta)$$

De $(\beta)-(\alpha)$

$$x^3-ax^2-bx-2=(x^3+mx^2+nx+p)(q_{2(x)}-q_{1(x)})$$

De donde $q_{2(x)}-q_{1(x)}=1$

$\rightarrow a=-m;\ b=-n;\ p=-2$

De $(2\alpha)-(\beta)$

$$x^4-x^3+2ax^2+bx=(x^3+mx^2+nx+p)(2q_{1(x)}-q_{2(x)})$$

De donde $2q_{1(x)}-q_{2(x)}=x$

$\rightarrow -1=m;\ 2a=n;\ b=p$

con lo cual $a=1 \wedge b=-2$

$\therefore\ a-b=1-(-2)=3$

Problema 24

En un polinomio mónico $P_{(x)}$ de coeficientes racionales, se sabe que una de sus raíces es $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

Determine el producto de las raíces de dicho polinomio, si es de grado mínimo.

Resolución

Reduciendo la raíz $x=\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ se encuentra $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$.

Como nos piden una ecuación polinomial de coeficientes racionales, debemos eliminar los radicales.

De $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{2} \rightarrow (x-\sqrt{2})^3=(\sqrt[3]{2})^3$

$$\rightarrow x^3-3x^2\sqrt{2}+3x\sqrt{2^2}-\sqrt{2^3}=2$$

$$\rightarrow x^3+6x-2=(3x^2+2)\sqrt{2}$$

$$(x^3+6x-2)^2=(3x^2+2)^2\sqrt{2}^2$$

De donde el polinomio buscado es

$$P_{(x)}=(x^3+6x-2)^2-2(3x^2+2)^2.$$

Por el teorema de Cardano, el producto de raíces es igual al término independiente (por ser mónico y de grado par).

Luego, $x_1 \cdot x_2 \ldots x_6=P_{(0)}=(-2)^2-2(2)^2$

$\therefore\ x_1x_2 \ldots x_6=-4$

Problema 25

Si se sabe que las raíces de la ecuación $x^3-2x^2+x+3=0$ son $x_1;\ x_2;\ x_3$, halle una ecuación cúbica de raíces $x_1x_2;\ x_1x_3;\ x_2x_3$ en incógnita y.

Resolución

La ecuación buscada será

$$(y-x_1x_2)(y-x_1x_3)(y-x_2x_3)=0.$$

Efectuando

$$y^3-(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)y^2+$$
$$+x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)y-(x_1x_2x_3)^2=0$$

Aplicamos el teorema de Cardano en la ecuación dada:

$$x_1+x_2+x_3=2$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1$$
$$x_1x_2x_3=-3$$

Finalmente se tendrá

$$y^3-y^2+(-3)(2)y-(-3)^2=0$$

Por lo tanto, la ecuación es $y^3-y^2-6y-9=0$.

Problema 26

Halle los números reales a y b, de modo que $(1+i)$ sea una raíz de la ecuación $x^5+ax^3+b=0$.

Resolución

Por el teorema de la paridad de raíces, si $1+i$ es una raíz, otra raíz será $1-i$, siendo $x^2-2x+2=0$ la ecuación que genera a estas raíces, lo cual implica que x^2-2x+2 es un factor de x^5+ax^3+b.

Es decir, $\dfrac{x^5+ax^3+b}{x^2-2x+2}$ es exacta.

Luego, por el método de Horner

1	1	0	a	0	0	b
2		+2	−2			
−2			4	−4		
				$2a+4$	$-2a-4$	
					$4a$	$-4a$
	1	2	$a+2$	$2a$	0	0

Del esquema se tiene:

Como la ecuación es exacta (resto es nulo)

- $-2a-4+4a=0 \rightarrow a=2$
- $b-4a=0 \rightarrow b=8$

Problema 27

Determine las condiciones para el parámetro a real, para que las cuatro raíces de la ecuación

$$x^4-ax^3+(a+2)x^2-ax+1=0$$

sean positivas.

Resolución

Por el teorema de Cardano: $x_1+x_2+x_3+x_4=a$; y como las raíces son positivas, $a>0$.

Resolvemos la ecuación recíproca

$$x^2\left[x^2-ax+(a+2)-\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}\right]=0$$

Hacemos $x+\dfrac{1}{x}=y \rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$.

Como $x \in \mathbb{R}^+$ entonces $y \geq 2$

La ecuación queda: $x^2[y^2-2-ay+a+2]=0$

$\rightarrow y^2-ay+a=0$, con $y \geq 2$

Es decir, $y^2-ay+a=0$; $a>0$ es una ecuación cuadrática de soluciones mayores o iguales a 2, es decir, $y_1 \geq 2$ $y_2 \geq 2$.

Luego, se debe cumplir que:

$$\Delta \geq 0 \ \wedge \ y_1-2 \geq 0 \ \wedge \ y_2-2 \geq 0$$
$$\rightarrow \Delta \geq 0 \ \wedge \ (y_1-2)(y_2-2) \geq 0$$
$$\rightarrow a^2-4a \geq 0 \ \wedge \ y_1y_2-2(y_1+y_2)+4 \geq 0$$

Recuerde que $a>0$

$$\rightarrow a-4 \geq 0 \rightarrow -a+4 \geq 0 \rightarrow a \geq 4 \ \wedge \ a \leq 4$$

$\therefore \ a=4$

Problema 28

Si $a>b>0$, determine el cociente entre la mayor y la menor solución de la ecuación en x.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b}$$

Resolución

I. Conjunto de valores admisibles.

$$x \neq 0 \wedge x+a+b \neq 0$$

II. De la ecuación:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a+b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=0$$

$$\frac{x+a+b-x}{x(x+a+b)}+\frac{a+b}{ab}=0$$

$$\rightarrow (a+b)\left[\frac{1}{x(x+a+b)}+\frac{1}{ab}\right]=0; \quad a+b>0$$

$$\rightarrow ab+x^2+(a+b)x=0$$

Luego, $x^2+(a+b)x+ab=0$

$$\rightarrow (x+a)(x+b)=0$$

$$\rightarrow x=-a, \ x=-b$$

$$\rightarrow x_{\text{mayor}}=-b; \ x_{\text{menor}}=-a$$

Por lo tanto, lo pedido es $\frac{-b}{-a}=\frac{b}{a}$.

Problema 29

Si los coeficientes, en el orden en que se encuentran en el polinomio

$P_{(x)}=(m+2)x^4+(m-1)x^2+2-m$,

están en progresión aritmética, determine una de las raíces reales de $P_{(x)}$.

Resolución

Recuerde que a, b, c están en PA $\rightarrow$ $2b=a+c$

Entonces, para el polinomio se cumplirá

$$2(m-1)=(m+2)+(2-m)$$

$$\rightarrow 2m-2=4 \rightarrow m=3$$

Así, el polinomio es $P_{(x)}=5x^4+2x^2-1$.

Sus raíces se calculan así:

$$x=\pm\sqrt{\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(5)(-1)}}{2(5)}} \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-1\pm\sqrt{6}}{5}}$$

Como se piden las soluciones reales, entonces

$$x=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{6}}{5}} \vee x=-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{6}}{5}}$$

Problema 30

Si dos de las raíces de la ecuación $3x^3-6x^2-9x+n=0$ se diferencian en 1, calcule el valor de n.

Resolución

Sean $x_1; x_2; x_3$ las raíces.

Del dato: $x_1-x_2=1 \rightarrow x_2=x_1-1$ (α)

Por el teorema de Cardano-Viète:

- $x_1+x_2+x_3=2$ (I)
- $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-3$ (II)
- $x_1x_2x_3=-\frac{n}{3}$ (III)

De (α): $x_2=x_1-1$, entonces en (I)

$$x_1+(-1+x_1)+x_3=2 \rightarrow x_3=3-2x_1$$

Reemplazamos en (II)

$$x_1(x_1-1)+x_1(3-2x_1)+(x_1-1)(3-2x_1)=-3$$

$$\rightarrow x_1^2-x_1+3x_1-2x_1^2+3x_1-2x_1^2-3+3x_1=-3$$

$$\rightarrow -3x_1^2+7x_1=0 \rightarrow x_1(7-3x_1)=0$$

De donde: $x_1=0 \vee x_1=\frac{7}{3}$

Si $x_1=0$

$\rightarrow x_2=-1; \ x_3=3$, entonces $n=0$

Si $x_1=\frac{7}{3}$

$\rightarrow x_2=\frac{4}{3}; \ x_3=-\frac{5}{3}$, entonces $n=\frac{140}{9}$

Problema 31

Resuelva la ecuación en x

$x^4+ax^3+2x+b=0$

si se sabe que admite una raíz real de multiplicidad tres.

Resolución

Sean α; α; α; β las raíces, α; $\beta \in \mathbb{R}$.

Por el teorema de Cardano-Viète:

I. $x_1+x_2+x_3+x_4=3\alpha+\beta=-a$

II. Suma de productos binarios: $3\alpha(\alpha+\beta)=0$, de donde $\alpha=0 \vee \alpha=-\beta$.

III. Productos ternarios: $\alpha^2(\alpha+3\beta)=-2$

Observamos que $\alpha\neq 0$, luego:

De II y III: $\alpha=-\beta \wedge \alpha^2(\alpha+3\beta)=-2$

Se tiene: $(-\beta)^2(-\beta+3\beta)=-2$

$\rightarrow \beta^3=-1 \rightarrow \beta=-1 \rightarrow \alpha=1$

Por lo tanto, las raíces son 1; 1; 1; –1.

Problema 32

Dada la ecuación en x

$x^3+(n+2)x^2+(n^2-3)x+n^3+2=0$,

determine el valor del parámetro real n para que el valor de $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ sea máximo, siendo x_1; x_2; x_3 las raíces de dicha ecuación.

Resolución

Aplicando el teorema de Cardano-Viète

$x_1+x_2+x_3=-(n+2)$;

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=n^2-3$

Y recordando que

$(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$,

se tiene:

$$(-(n+2))^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(n^2-3)$$

$$\rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=-n^2+4n+10$$

$$=14-(n-2)^2$$

Por lo tanto, el valor máximo ocurre si $n=2$ y dicho máximo es 14.

Problema 33

Luego de resolver la ecuación

$$\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=8,$$

calcule la suma de sus soluciones.

Resolución

Hacemos $\sqrt[3]{x}=y$, con $y\neq -1 \wedge 1$; se tiene:

$$\frac{y^4-1}{y^2-1}-\frac{y^2-1}{y+1}=8$$

$$\frac{(y^2+1)\cancel{(y^2-1)}}{\cancel{y^2-1}}-\frac{\cancel{(y+1)}(y-1)}{\cancel{y+1}}=8$$

$$y^2+1-y+1=8 \leftrightarrow y^2-y-6=0$$

$$\rightarrow (y-3)(y-2)=0$$

De donde $y=3 \vee y=-2$

$$y=3=\sqrt[3]{x} \rightarrow x=27$$

$$y=-2=\sqrt[3]{x} \rightarrow x=-8$$

Por lo tanto, la suma de soluciones es

$$27+(-8)=19$$

Problema 34

Si x_0 es una solución compleja de la ecuación fraccionaria: $\frac{2x}{x+1}-\frac{x-1}{x}=x$, calcule su módulo.

Resolución

- CVA: $x+1\neq 0 \ \wedge \ x\neq 0$

  $\rightarrow \ x\neq -1 \ \wedge \ x\neq 0$

  $\rightarrow$ CVA$=\mathbb{C}-\{-1;0\}$

- Resolvemos la ecuación

$$\frac{2x^2-(x-1)(x+1)}{(x+1)x}=x$$

$\rightarrow \ 2x^2-x^2+1=x^2(x+1)$

$\rightarrow \ \cancel{x^2}+1=x^3+\cancel{x^2} \ \rightarrow \ x^3-1=0$

$\rightarrow \ (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\rightarrow \ x_1=1; \ x_2=w; \ x_3=w^2$

con $w=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Entonces: $|w|=\sqrt{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

Problema 35

Resuelva la ecuación de incógnita x.

$$\frac{a+x}{a^2+ax+x^2}-\frac{a-x}{ax-x^2-a^2}=\frac{3}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}$$

Resolución

Podemos escribir la ecuación así:

$$\frac{a+x}{a^2+ax+x^2}-\frac{a-x}{a^2-ax+x^2}=\frac{3}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}$$

$$\frac{(a+x)(a^2-ax+x^2)+(a-x)(a^2+ax+x^2)}{\cancel{(a^2+ax+x^2)(a^2-ax+x^2)}}=$$

$$=\frac{3}{\cancel{x(a^4+a^2x^2+x^4)}}$$

Reducimos y obtenemos:

$$a^3+x^3+a^3-x^3=\frac{3}{x} \ \rightarrow \ x=\frac{3}{2a^3}$$

$$\therefore \ \text{CS}=\left\{\frac{3}{2a^3}\right\}$$

Problema 36

Resuelva la ecuación

$(x-16)^3+(11-x)^3+125=60x-15x^2$.

Resolución

Podemos escribir la ecuación así:

$$(x-16)^3+(11-x)^3+5^3=15(4x-x^2)$$

entonces $(x-16)^3+(11-x)^3+5^3=3(x-16)(11-x)5$

Luego en la ecuación tenemos:

$$\cancel{3}(x-16)(11-x)\cancel{5}=\cancel{15}(4x-x^2),$$

que se reduce a $x^2-27x+176=x^2-4x$

$\rightarrow \ 23x=176 \ \rightarrow \ x=\dfrac{176}{23}$

$\therefore \ \text{CS}=\left\{\dfrac{176}{23}\right\}$

Problema 37

Resuelva la ecuación

$2x^3+(\sqrt{x-2}-\sqrt{2-x})x^5+3x+4=26$.

Resolución

I. Se define la ecuación irracional

$x-2\geq 0 \ \wedge \ 2-x\geq 0 \ \rightarrow \ x=2$

Luego, la ecuación solo está definida en $\{2\}$.

II. $2x^3+23x+4=26 \ \leftrightarrow \ 2x^3+3x-22=0$

Vemos que $x=2$ verifica la ecuación.

$\therefore \ \text{CS}=\{2\}$

Problema 38

Si x_0 es una solución de $\sqrt[3]{2x+7}+\sqrt[3]{x+3}=1$,

calcule el valor de $\sqrt[3]{2x_0-2}$.

Resolución

Podemos escribir la ecuación así

$$\sqrt[3]{2x+7}+\sqrt[3]{x+3}+(-1)=0$$

> **Recuerde**
> Si $a+b+c=0 \rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

$$\rightarrow \sqrt[3]{2x+7}^3+\sqrt[3]{x+3}^3+(-1)^3$$

$$=3\sqrt[3]{(2x+7)}\sqrt[3]{x+3}(-1)$$

$$\rightarrow (2x+7)+(x+3)+(-1)=3\sqrt[3]{(2x+7)(x+3)}(-1)$$

$$\rightarrow \cancel{3}(x+3)=-\cancel{3}\sqrt[3]{(2x+7)(x+3)}$$

$$(x+3)^3=-(2x+7)(x+3) \leftrightarrow (x+3)\left[(x+3)^2+2x+7\right]=0$$

$$\rightarrow (x+3)\left(x^2+8x+16\right)=0$$

$$\rightarrow (x+3)(x+4)^2=0$$

$$\rightarrow x=-3 \ \vee \ x=-4$$

Entonces

$$x=-3 \ \vee \ x=-4,$$

de donde solo $x=-3$ verifica la ecuación.

Por lo tanto, lo pedido es $\sqrt[3]{2(-3)-2}=2$.

Problema 39

Luego de resolver la ecuación

$\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x-2}=1$, calcule la mayor solución.

Resolución

Si $x-2=t^3 \rightarrow x=t^3+2$

En la ecuación

$$\sqrt{t^3+2+1}-\sqrt[3]{t^3}=1 \leftrightarrow \sqrt{t^3+3}=t+1$$

Al cuadrado

$$t^3+3=t^2+2t+1 \leftrightarrow t^3-t^2-2t+2=0$$

Al factorizar se obtiene:

$$(t-1)\left(t+\sqrt{2}\right)\left(t-\sqrt{2}\right)=0$$

$$t=1 \ \vee \ t=-\sqrt{2} \ \vee \ t=\sqrt{2}$$

Como se busca el mayor valor de x, este se consigue con el mayor valor de $t=\sqrt{2}$.

Con $t=\sqrt{2} \rightarrow x=\sqrt{2}^3+2$

$$\therefore \ x_{\text{máx}}=2\sqrt{2}+2$$

Problema 40

Resuelva la ecuacion de incógnita x.

$$x\left(\sqrt{m^2-x^2}+\sqrt{n^2-x^2}\right)=mn; \quad m>n>0$$

Resolución

Primero se define bien la ecuación:

$$m^2-x^2 \geq 0 \ \wedge \ n^2-x^2 \geq 0$$

$$\rightarrow x^2 \leq n^2 \ \wedge \ x^2 \leq m^2 \rightarrow x \leq n^2$$

Luego elevamos al cuadrado

$$x^2\left[m^2-x^2+n^2-x^2+2\sqrt{(m^2-x^2)(n^2-x^2)}\right]=m^2n^2$$

Se transponen términos y se da forma de un cuadrado perfecto. Así:

$$\underbrace{m^2n^2-(m^2+n^2)x^2+x^4}-2\sqrt{(m^2-x^2)(n^2-x^2)}x^2+x^4=0$$

$$\rightarrow \underbrace{(m^2-x^2)(n^2-x^2)-2\sqrt{(m^2-x^2)(n^2-x^2)}x^2+x^4}=0$$

$$\rightarrow \left(\sqrt{(m^2-x^2)(n^2-x^2)}-x^2\right)^2=0$$

$$\rightarrow (m^2-x^2)(n^2-x^2)=x^4 \rightarrow (m^2+n^2)x^2=m^2n^2$$

$$\rightarrow x=\pm\frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$\therefore \ \text{CS}=\left\{\frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}; \ \frac{-mn}{\sqrt{m^2+n^2}}\right\}$$

Test 13

1. Resuelva la ecuación

$$\frac{1}{5}\left(x+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right).$$

A) $\left\{\frac{25}{4}\right\}$ B) $\left\{\frac{-4}{30}\right\}$ C) $\left\{\frac{16}{30}\right\}$
D) $\left\{\frac{-16}{30}\right\}$ E) $\left\{-\frac{4}{30}\right\}$

2. Calcule el valor de $\frac{a-1}{3}$ si se sabe que -6 es una raíz de la ecuación $x^2+(a+3)x+a+2=0$.

A) 2 B) 5 C) 1
D) 4 E) 0

3. Si $\left\{m;\ \frac{1}{m}\right\}$ es el conjunto solución de la ecuación $3x^2-5x+k=0$, calcule el valor de M.
$M=1+2+3+4+5+...+(k+1)^2$.

A) 85 B) 96 C) 110
D) 100 E) 136

4. Si la ecuación cuadrática $ax^2-ax+4=0$ tiene una única solución, entonces el valor de $\sqrt[4]{a}$ es

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 2
D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{16}$

5. Calcule el valor de $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)$ si se sabe que α y β son las raíces de la ecuación cuadrática
$mx^2-3mx+m=0;\ m>0$.

A) $3m$ B) m^2-1 C) 6
D) -6 E) 1

6. Si $m=0$ representa la diferencia de las raíces de la ecuación $x^2-(a+2)x+4a^2=0$, forme una ecuación cuadrática que tenga por raíces a los valores de a.

A) $x^2+2x+4=0$
B) $15x^2+4x+4=0$
C) $15x^2-4x-4=0$
D) $15x^2+16x-4=0$
E) $16x^2+15x+4=0$

7. Dada la ecuación de coeficientes reales $2x^3+mx^2+nx+6=0$, si $x_0=1-\sqrt{2}i$ es una de las raíces de la ecuación, entonces el valor de m es

A) 4 B) -2 C) -6
D) -4 E) 2

8. Si α; β; γ son las raíces de $x^3-x+1=0$, entonces el valor de $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ es

A) -3 B) 3 C) 1
D) -1 E) 0

9. Si a_1; a_2; a_3; a_4 son las raíces de la ecuación $2008x^4+2009x^2+2010=0$, calcule el valor de $a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3$.

A) 1 B) -1 C) 0
D) -2010 E) 2010

10. Resuelva la ecuación fraccionaria $\frac{x^3-4x}{5x+10}=0$ y determine la suma de soluciones.

A) 2 B) 3 C) -5
D) 1 E) 4

11. Si x_0 es solución de la ecuación

$$\frac{x^2-6x+10}{x^2+8x+17}=\frac{(x-3)^2}{(x+4)^2},$$

calcule el valor de $2x_0^2+x_0+1$.

A) $-\frac{1}{2}$ B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

12. Resuelva la ecuación fraccionaria $\frac{x^2-4}{x-2}=4$.

A) $\{2\}$
B) $\{-2; 2\}$
C) ϕ
D) $\{1; -2\}$
E) $\{-2\}$

CLAVES

1 D	3 E	5 C	7 B	9 C	11 E
2 C	4 C	6 C	8 A	10 A	12 C

Problemas PROPUESTOS

Nivel I

1. Luego de resolver la ecuación en x

$$x+a+\frac{x-2a}{3}+\frac{x-3a}{5}=\frac{23x-4a}{15}-2a,$$

indique lo correcto:

A) La solución depende de a ($a \in \mathbb{R}$).
B) Tiene una sola solución.
C) No tiene solución.
D) Tiene infinitas soluciones.
E) Tiene dos soluciones.

2. Calcule el valor de m si una raíz de la ecuación $x^3+(m-1)x^2+(3m-1)x-19=0$ es 1.

A) 4
B) -4
C) -5
D) 5
E) 7

3. Si x_0 es una raíz de la ecuación $x^3=x+3$, calcule el valor de $\dfrac{2x_0^3-5}{2x_0+1}$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $-\frac{3}{5}$
D) -4 E) 1

4. Las raíces de la ecuación cuadrática $x^2-ax+b=0$ verifican el sistema lineal

$$\begin{cases}5x_1+x_2=3\\x_1+5x_2=9\end{cases}$$

Calcule el valor de a.

A) 2 B) 3 C) 4
D) -2 E) 5

5. Calcule el mayor valor que tiene m para que la ecuación $x^2+m=(m+1)x-1$ tenga raíces iguales.

A) 1 B) 5 C) 3
D) -1 E) -3

6. Dada la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, de raíces x_1; x_2, halle la relación entre los coeficientes si una raíz es la mitad de la otra.

A) $ab^2=9a^2c$
B) $2b^2=9ac$
C) $3b=2c$
D) $5b=7c$
E) $7b=4a$

7. Si CS$=\{a;b\}$ es el conjunto solución de la ecuación $2x^2-x+3=0$, calcule el valor de $(2a-1)(2b-1)+8$.

A) 10 B) 12 C) 17
D) 14 E) 15

8. Si una raíz del polinomio $P_{(x)}$ es 2, tal que $P_{(x)}=yx^2-yx-6$, determine el valor de la otra raíz.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) -1

9. Calcule el valor de p si las raíces de la ecuación

$$x^2-(p+3)x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+1=0$$

son $x_1=mm+1$; $x_2=mm$; $m \in \mathbb{R}^+$.

A) $-\frac{2}{3}$ B) 0 C) $\frac{1}{3}$
D) 1 E) -2

10. Si $\{u; v\}$ es el conjunto solución de la ecuación $x^2+3x+k=0$, tal que $u^3+v^3=6k$, calcule el valor de k.

A) 1 B) −1 C) 2
D) −2 E) 9

11. Luego de resolver la ecuación bicuadrada
$x^4-(3n-1)x^2+n(2n-1)=0;\ \ n<0,$
indique cuántas soluciones reales tiene dicha ecuación.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

12. Si la ecuación de incógnita x
$(a^4-13a^2)x+a^2+a=6-36x$
tiene como conjunto solución $\mathbb{R}$, calcule los valores de a.

A) 2; 3 B) −2; −3 C) 2; −3
D) 2; −4 E) 3; −4

13. La ecuación fraccionaria
$$\frac{x-1}{2x-1}+\frac{2x+1}{x-1}=a$$
se transforma en una ecuación lineal. Calcule la suma del valor de a con la solución de la ecuación resultante.

A) $\frac{23}{22}$ B) $\frac{61}{22}$ C) $\frac{65}{22}$
D) $\frac{47}{22}$ E) $\frac{22}{65}$

14. Halle una ecuación cuadrática de raíces m y n si se sabe que las ecuaciones siguientes
$6x^2+(2m+1)x+4n+2=0 \ \wedge\ 2x^2+5x+6=0$
son equivalentes.

A) $x^2-5x+6=0$
B) $x^2-11x+28=0$
C) $x^2-3x+4=0$
D) $x^2-x-2=0$
E) $x^2-5x-10=0$

15. Calcule el módulo de una de las raíces de la ecuación cuadrática
$(x-2)^2+\sqrt{7+2\sqrt{10}}\,x=-4x.$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 1 E) 3/2

16. Obtenga una ecuación bicuadrada en x, sabiendo que sus raíces son las raíces de la ecuación $z^2-4z-7=0$.

A) $x^4-8x^2-14=0$
B) $x^4-4x^2-7=0$
C) $x^4-8x^2+14=0$
D) $x^4-24x^2+49=0$
E) $x^4-30x^2+49=0$

17. Calcule el valor de m para el cual la suma de cuadrados de las raíces de la ecuación $x^2-mx+1=0$ sea mínima.

A) 0 B) $\sqrt{2}$ C) 1
D) −1 E) $-\sqrt{2}$

18. ¿Para qué valor de k la diferencia de raíces de la ecuación cuadrática es mínima?
$4x^2-10(2k+1)x+14k+5=0$

A) 0 B) 1 C) $-\frac{11}{50}$
D) $-\frac{44}{60}$ E) $\frac{11}{100}$

19. Indique un valor de m para el cual la suma de las cuartas potencias de las raíces de la ecuación $x^2-mx+1=0$ sea mínima.

A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) $\sqrt{3}$
D) -1 E) 0

20. Si la ecuación fraccionaria

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{x^2-3x+11}{x^2+3x+11}$$

se transforma en una ecuación polinomial, halle la suma de productos binarios de las raíces de la ecuación transformada.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

Nivel II

21. Respecto a la ecuación de incógnita x:
$a(a^2-1)x=0$,
establezca el valor de verdad de cada proposición.

I. Es compatible para cualquier valor de a.
II. Si $a=-1$, tiene infinitas soluciones.
III. Si $a=0$, tiene solución única.
IV. Si $a \in \{0; 1; -1\}$, tiene una única solución y es igual a cero.

A) VVVV B) VFVF C) FFVV
D) FFFV E) VVFF

22. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones con respecto a la ecuación en x.

$$a^2(a-2)-(a+1-a\sqrt{a}-\sqrt{a})x=a-2$$

I. Es determinado cuando $a\neq 1 \wedge a\neq -1$.
II. Es indeterminado cuando $a=1 \vee a=-1$.
III. Es incompatible cuando $a=2$.

A) VVV B) VVF C) VFV
D) FFV E) VFF

23. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, basándose en la siguiente ecuación:

$$x(x-1)^2(2x-3)^3(x^2-\sqrt{3})^2=0$$

I. Tiene cuatro raíces o cuatro soluciones.
II. Tiene diez raíces y cinco soluciones.
III. Tiene a $x=0$ como una raíz simple y a $x=3/2$ como raíz triple.

A) FVV B) FFV C) FFF
D) VFV E) VFF

24. Luego de resolver la ecuación en x

$$\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ac}+\frac{x-c}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

establezca el valor de verdad de las proposiciones.

I. Si $a+b+c=0$, la ecuación tiene infinitas soluciones con $abc\neq 0$.
II. Si $a+b+c\neq 0$, siempre existe solución y es única.
III. Siempre la solución es $a+b+c$.

A) VVV B) VFV C) VVF
D) FVV E) FFV

25. Si m; n; p son las raíces de la ecuación cúbica $x^3-2x^2+4x-2=0$, calcule el valor de M.

$$M=\left[\frac{m^{3/2}}{m-1}+\frac{n^{3/2}}{n-1}+\frac{p^{3/2}}{p-1}\right]^2$$

A) 8
B) 4
C) 2
D) 18
E) 20

26. Dada la ecuación cúbica

$4x^3+12x^2-209x-627=0$, si x_0 es una de sus raíces, calcule el valor de $\frac{x_0^2}{209}$. Considere $x_0 \neq -3$.

A) $\frac{1}{12}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{4}$

D) $-\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{19}$

27. Si el polinomio $P_{(x)}=ax^3+bx^2-6x+c$, $a \neq 0$ admite como raíces a

$$x_1=\frac{1}{2};\ x_2=\frac{p^{10}+1}{p+1};\ x_3=\frac{p^{10}+1}{p^{10}-p},$$

donde $p \notin \{-1; 0; 1\}$, calcule el valor de c.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

28. Si las ecuaciones de incógnita x

$3nx^2-2nx+1=0;\ n \neq 0 \ \wedge$

$$\frac{x+m+n+pq}{n-m+q}+\frac{x+n+q+m}{n+m+q}=(m+n+p)^q$$

son equivalentes, halle el valor de n.

A) 0 B) 3 C) 1
D) 2 E) A $\vee$ C

29. Si $3x^2+(k+a)x+5-k=0$ tiene raíces recíprocas y $6x^2+(2p-1)x+8=0$ tiene raíces simétricas, resuelva la ecuación $x^2+6px-2k=0$.

A) $\{4; -1\}$
B) $\{-4; 1\}$
C) $\{3; -3\}$
D) $\{2; 4\}$
E) $\{-8; 2\}$

30. Luego de resolver $x^2+4x+3+i=0$, indique la parte imaginaria de una de las soluciones.

A) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

B) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

C) $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

D) $\sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}$

E) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

31. De la ecuación $x^3+mx^2-n=0$; $m \in \mathbb{R} \wedge n>0$, establezca el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. Si $m>0$, tiene una sola solución real.

II. Si $m<0$, tiene las tres soluciones reales y positivas.

III. Si $m>0$, tiene dos soluciones negativas y una positiva.

A) VFV B) VVF C) FFV
D) FVF E) FFF

32. Determine la condición que debe cumplir el parámetro real λ, de manera que

$x^4-2(\lambda-1)x^2+\lambda^2-2\lambda=0$

admita al menos una raíz real y otra compleja imaginaria.

A) $\lambda<0$
B) $\lambda<2$
C) $0 \leq \lambda<2$
D) $\lambda>2 \wedge \lambda>3$
E) $-2<\lambda<0$

33. Luego de resolver la ecuación

$$\frac{2(x^2-6x+9)}{(x^2-5x+6)(x-4)(x-3)}=\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{5}{x-3},$$

enuncie el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I. La solución es racional.
II. La solución es irracional o la solución es una fracción.
III. La solución es real y la solución es entera.

A) VVV B) FVF C) FFV
D) VFV E) VVF

34. Resuelva la ecuación $x^4+mx^3+2x+n=0$; $n\neq 0$, e indique la suma de todas sus raíces sabiendo que admite una raíz triple.

A) 2 B) –1 C) –2
D) 1 E) 0

35. Si se sabe que $n\neq p$, resuelva la ecuación de incógnita x.

$$\frac{x^2+(a+2b)x+b^2+ab+n}{x^2+(b+2a)x+a^2+ab+p}=\frac{x+b}{x+a}$$

A) $\frac{n+p}{n-p}$ B) $\frac{n-p}{an-bp}$ C) $\frac{b-a}{n-p}$
D) $\frac{ap-bn}{n-p}$ E) $\frac{bp-an}{n-p}$

36. Luego de resolver la ecuación fraccionaria en x

$$\frac{1}{m(x+3)-2n}-\frac{1}{n(x+3)-2m}=\frac{1}{0{,}75(n-m)(x+5)},$$

indique una de las soluciones obtenidas.

A) $\frac{3m-n}{9n-11m}$ B) $\frac{9m-11n}{3n-m}$ C) $\frac{9n-11m}{3n-m}$
D) $\frac{3n-m}{9m-11n}$ E) $\frac{3n-m}{9n-11m}$

37. Luego de resolver la ecuación irracional

$$x-a+b=\frac{a\sqrt{x-a}+b\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}};\ a\neq b,$$

calcule la suma de sus soluciones.

A) $6a$ B) $6b+a$ C) $\frac{5a-b}{3}$
D) $\frac{7a-b}{3}$ E) $\frac{4a+b}{3}$

38. Determine el producto de las soluciones de la ecuación fraccionaria

$$\frac{1}{5}\frac{(5x-1)^2}{5x+1}+\frac{1}{3}\frac{(3x-1)^2}{3x+1}=\frac{8}{15}.$$

A) 9 B) $\frac{1}{3}$ C) 3
D) 1 E) 0

39. Para la ecuación irracional

$$\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x^4-1}}+\sqrt[3]{x^2-\sqrt{x^4-1}}=x,$$

indique lo correcto.

A) Tiene una sola solución.
B) No tiene solución en $\mathbb{R}$.
C) La suma de las soluciones es 2.
D) La única solución es 3.
E) A $\wedge$ D

40. Considere a y b reales positivos y resuelva la ecuación irracional

$$\sqrt{x^2-ax+a^2}+\sqrt{x^2-bx+b^2}=\sqrt{a^2+ab+b^2}.$$

A) CS={$a+b$}
B) CS={ab}
C) $CS=\left\{\frac{a+1}{b+1}\right\}$
D) $CS=\left\{\frac{ab}{a+b}\right\}$
E) $CS=\left\{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right\}$

41. Calcule el mayor valor de a, tal que las raíces de la ecuación $x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a=0$ estén en progresión aritmética.

A) 1 B) 3/2 C) 2
D) 3 E) 0

42. Luego de resolver la ecuación $x^3+3x-2i=0$ se obtienen las raíces x_1; x_2; x_3. Calcule $|x_1|+|x_2|+|x_3|$.

A) 3
B) 4
C) 5
D) $\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$
E) $\sqrt{7}+\sqrt{2}+1$

43. En la ecuación de incógnita x

$$\frac{a^2}{8}+4-x^3=2\left(x+\frac{a}{4}\right)^2,$$

el cuadrado de la única raíz positiva es igual a la diferencia de los cuadrados de las otras raíces. Calcule dicha raíz real positiva.

A) $\sqrt{a}+3$ B) $\sqrt{a}$ C) $\sqrt{2}$
D) 2 E) 1

44. Si se sabe que a; b; c son raíces de la ecuación

$x^3-2x^2+3x+4=0$,

halle otra ecuación cúbica cuyas raíces sean $a(a+1)$; $b(b+1)$; $c(c+1)$.

A) $x^3+2x^2+3x+8=0$
B) $x^3+4x+8=0$
C) $x^3+46x+8=0$
D) $x^3-12x-8=0$
E) $x^3+3x+8=0$

45. Si las raíces de la ecuación $x^2+2(m+2)x+5=0$ son superiores a la unidad, entonces

A) $m\in\langle -5;\ -2-\sqrt{5}]$.
B) $m\in\langle 1;\ +\infty\rangle$.
C) $m\in\langle -(\sqrt{5}+2);\ \sqrt{5}+2\rangle$.
D) $m\in\langle -\infty;\ \sqrt{5}+2\rangle$.
E) $m\in\langle -\infty;\ \sqrt{5}+2]\cup[\sqrt{5}-2;\ +\infty\rangle$.

46. Para la ecuación polinomial $x^6-x^3+2x^2-3x-1=0$, es cierto que tiene

A) cuatro raíces reales.
B) seis raíces reales.
C) cuatro raíces no reales.
D) al menos dos raíces positivas.
E) dos raíces reales negativas.

47. De la ecuación $x^4+px^2+q=0$, indique la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.

I. Si $p>0$, posee cuatro raíces reales.
II. Si $p>0 \wedge q<0$, siempre tendrá dos raíces reales.
III. Si $p^2=4q$, tendrá cuatro raíces reales.

A) VVV B) VVF C) FVF
D) VFF E) FFF

48. Resuelva la ecuación bicuadrada $x^4+(b-a)(x^3+1)+(x+1)^3+c(x-3)-1=0$ y calcule el producto de sus raíces.

A) 5 B) $\sqrt{5}$ C) 10
D) 6 E) 8

49. Sabiendo que las ecuaciones cuadráticas
$x^2+mx+2n=0 \wedge x^2+nx+2m=0$
poseen una raíz en común, halle otra ecuación cuadrática cuyas raíces sean las no comunes de las anteriores.

A) $x^2+(m+n)x+mn=0$
B) $x^2-(m+n)x+mn=0$
C) $x^2+2mx+n=0$
D) $x^2+2nx+m=0$
E) $x^2-2(m+n)x+9mn=0$

50. Halle una raíz de la ecuación cuadrática
$a(a+2b)x^2+b(b+2c)x+c(c+2a)=0$.
Considere $a+b+c=0$.

A) $\frac{c-a}{b-c}$ B) $\frac{a-b}{b-c}$ C) $\frac{b(c-a)}{a(b-c)}$
D) $\frac{c(a-b)}{a(b-c)}$ E) $\frac{a-b}{c-a}$

51. Resuelva la ecuación irracional de incógnita x.
$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{b}+\sqrt{x-a}}=\sqrt{\frac{a}{b}};\ \{a;\ b\}\subset\mathbb{R}^+$$

A) $\{a-b\}$
B) $\{2a-b\}$
C) $\{a+b\}$
D) $\{2b-a\}$
E) $\{2(a+b)\}$

52. Dada la ecuación cúbica $3x^3-4x^2+13x+2=0$, indique lo correcto.

A) Tiene tres raíces reales y positivas.
B) Tiene dos raíces positivas y una raíz negativa.
C) Tiene dos raíces negativas y una raíz positiva.
D) Posee una sola raíz real y negativa.
E) Posee una sola raíz real y positiva.

53. Si $\left(1+\frac{1}{p}\right)$ es la suma de las dos raíces positivas de la ecuación bicuadrada: $4x^4-(4m+1)x^2+m=0$ y la ecuación cuadrática: $2px^2-4px+5p=3x^2+x-8$ tiene el producto de sus raíces igual a dos veces su suma, calcule el valor de $p+m$.

A) 3 B) 7 C) 11
D) 15 E) 19

54. ¿Para qué valores de m la ecuación
$$(2\sqrt{x})^2+\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2+3\left(1+\frac{3}{m}\right)=0$$
tiene solución única?

A) $-\frac{3}{5}$ B) 2; −3 C) 4; $-\frac{5}{3}$
D) 1; 2 E) $-\frac{3}{5}$; −3

55. Si la ecuación cuadrática $a_2x^2+a_1x+a_0=0$ tiene como conjunto solución
$CS=\left\{1+\frac{1}{3k+1};\ 1+\frac{1}{3k+4}\right\}$, calcule el valor de S.
$$S=\frac{(3k+1)(3k+4)(a_0+a_1+a_2)}{a_2}$$

A) 1 B) −1 C) 2
D) −2 E) $\frac{a_1}{a_2}$

56. Sea $P_{(x)}$ un polinomio:
$P_{(x)}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$; $a_0\neq0$ tal que $P_{(1)}=1$.
Si $a_0^2+a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=1$, calcule el valor de E.
$E=(a_0+1)^2+(a_1+1)^2+...+(a_n+1)^2$

A) n B) $n+2$ C) $n+3$
D) $2n+4$ E) $n+4$

57. Dado el polinomio

$$P_{(x)}=x^4-(ab+ac+bc)x^3+$$
$$+(ab+ac+bc)x-2abc(a+b+c),$$

calcule el valor de M.

$$M=\frac{P_{(ab+ac+bc)}}{(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2}$$

A) 1 B) 2 C) −2
D) −1 E) 0

58. Determine el valor real de a para que la ecuación

$16x^4-ax^3+(2a+17)x^2-ax+16=0$

tenga exactamente cuatro raíces reales diferentes que forman una progresión geométrica.

A) 200 B) 170 C) 190
D) 180 E) 100

59. Resuelva la ecuación fraccionaria

$$\frac{x^3+6x}{3x^2+2}=\frac{3\sqrt{2}\left(1+\sqrt[3]{3}\right)}{3\sqrt[3]{9}+1} \text{ en } \mathbb{R}.$$

A) $\sqrt{6}$
B) $\sqrt[3]{6}$
C) $\sqrt[12]{12}$
D) $\sqrt[6]{12}$
E) $\sqrt[6]{72}$

60. Si se cumple que

$$\sqrt[7]{1+\sqrt{x}}-\sqrt[7]{1-x}+\sqrt[7]{1-\sqrt{x}}=1,$$

calcule el valor de E.

$E=x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x+6$

A) 61 B) 32 C) 21
D) 10 E) 6

CLAVES
Problemas propuestos

NIVEL I

1 C	5 C	9 A	13 C	17 A
2 D	6 B	10 E	14 B	18 C
3 E	7 D	11 A	15 A	19 A
4 A	8 E	12 C	16 E	20 D

NIVEL II

21 E	29 B	37 D	45 A	53 A
22 B	30 C	38 E	46 C	54 A
23 A	31 E	39 E	47 C	55 A
24 C	32 C	40 D	48 E	56 E
25 D	33 E	41 D	49 B	57 A
26 C	34 A	42 B	50 D	58 B
27 A	35 E	43 C	51 C	59 E
28 B	36 B	44 C	52 D	60 E

BIBLIOGRAFÍA

APOSTOL, Tom

1960 *Análisis matemático*. Volumen I. Barcelona: Editorial Reverté

BELL, Eric

1993 *Historias de las matemáticas*. México D. F.: Fondo de Cultura Económica

BOYER, Carl

1989 *Historia de la matemática*. México D. F.: Editorial Trillas

COTLAR, M.; Sadosky C.

1971 *Introducción al álgebra*. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

CHURCHILL, Ruel V.; WARD B., James

1990 *Variable compleja y aplicaciones*. Madrid: Editorial McGraw-Hill

DE OLIVERO, Augusto C.

1990 *Introducción al análisis combinatorio y probabilidades*

DIEUDONNÉ, J.

1966 *Fundamentos del análisis moderno*. Barcelona: Editorial Reverté

GENTILE, Enzo R.

1977 *Estructuras algebraicas*. Washington D.C.: OEA. Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico

GARCÍA, Arnaldo

1990 *Álgebra un curso introductorio*. Fondo Americano

HERSTEIN, I. N.

2008 *Álgebra moderna*. México D. F.: Editorial Trillas.

KUROSCH, A. G.

1975 *Álgebra superior*. Moscú: Editorial MIR

LA SALLE, Hasser

1990 *Análisis matemático*. México D. F.: Editorial Trillas

LIPSCHUTZ, Seymour

1978 *Topología general*. Colección Schaum. México D. F.: Editorial McGraw-Hill

MURRAY, Spiegel

1990 *Variable compleja*. Colección Schaum. México D. F.: Editorial McGraw-Hill

PERERO, Mariano

1994 *Historia de las matemáticas*. México D. F.: Editorial Utema

POTÁPOV, M.; ALEXÁNDROV, V. y P. PASICHENKO

1986 *Álgebra y principios del análisis*. Moscú: Editorial MIR

KALNIN, R. A.

1988 *Álgebra y funciones elementales*. Moscú: Editorial MIR

RIBNIKOV, K.

1989 *Análisis combinatorio*. Moscú: Editorial MIR

Álgebra TOMO I

Es una publicación de consulta fundamental para estudiantes y docentes de los niveles secundario y preuniversitario. Ha sido concebida por un equipo de profesores especialistas en la materia bajo una estructura temática que va de lo simple a lo complejo, con un lenguaje sencillo y claro. En cada capítulo presentamos definiciones, problemas resueltos, problemas propuestos, la biografía de un matemático representativo, así como un test con el que podrás autoevaluarte. De esta manera, como estudiante, la presente obra te permitirá ingresar en el estudio de una disciplina matemática cuyo campo de aplicación es diverso. Para el docente, medirá la dosificación adecuada de la asignatura con una variedad de ejercicios para la práctica.

La publicación aborda los temas siguientes: nociones preliminares; leyes de exponentes; polinomios; multiplicación algebraica; división algebraica de polinomios; divisibilidad de polinomios y cocientes notables; factorización de polinomios; máximo común divisor, mínimo común múltiplo y fracciones; radicación; binomio de Newton; números reales; números complejos y, finalmente, ecuaciones algebraicas.

lum.editores
www.elumbreras.com.pe

ISBN: 978-612-307-366-4
9 786123 073664

00016882